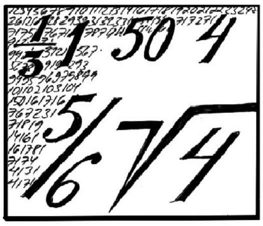

Differentiaaliyhtälöiden globaali olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause

Eeli Tamminen
eeli.tamminen@helsinki.fi

Johdanto

Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseet (OY-lauseet) ovat differentiaaliyhtälöiden teorian perustavimpia tuloksia. Nimensä mukaisesti ne takaavat eri differentiaaliyhtälöille – ja erityisesti alkuarvotehtäville – niiden ratkaisun olemassaolon ja sen, että muita ratkaisuja ei ole olemassa, eli saadun ratkaisun yksikäsitteisyyden.

Differentiaaliyhtälöt ovat yhtälöitä, joissa muuttujan sijaan on jonkin ratkaistavan funktion $y(x)$ derivaattoja $y'(x)$, $y''(x)$ jne. Esimerkiksi

$$3y'(x) + x^2 = y(x) + 2x$$

on ensimmäisen kertaluvun (eli siinä on vain ensimmäinen derivaatta) differentiaaliyhtälö. Alkuarvotehtäväksi kutsutaan differentiaaliyhtälöä, jonka lisäksi on annettu ratkaistavan funktion arvo joissain pisteessä, kuten esimerkiksi $y(1) = -\frac{1}{3}$.

OY-lauseita on erilaisille differentiaaliyhtälöille sekä differentiaaliyhtälösysteemeille. Tässä artikkelissa rajoitutaan tarkastelemaan ensimmäisen kertaluvun lineaaristen differentiaaliyhtälöiden alkuarvotehtäviä, eli yhtälöitä muotoa

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big) \text{ ja } y(x_0) = y_0. \qquad (*)$$

OY-lauseita voidaan ajatella olevan kahta eri tyyppiä: globaali ja lokaali. Lokaali OY-lause koskee differentiaaliyhtälön ratkaisua jollain reaalivälillä $I \subset \mathbb{R}$. Tämän vastine koko reaalivälille $\mathbb{R}$ on globaali OY-lause.

Lähteessä [1] on esitetty yksityiskohtaisesti lokaalin OY-lauseen todistus ja pääkohdiltaan globaalin tapauksen todistus. Tässä artikkelissa esitetään yksityiskohtaisesti globaalin OY-lauseen todistus. Lauseen lokaali vastine oletetaan tunnetuksi. Tämän todistus on rakenteltaan samanlainen kuin globaalin tapauksen. Seuraavaksi on vielä esitetty lokaali OY-lause:

Lause 1. *Olkoon $(x_0, y_0) \in E \subset \mathbb{R}^2$. Olkoon funktio $f : E \to \mathbb{R}$ jatkuva ja toteuttakoon se lokaalin Lipschitz-ehdon muuttujan y osalta.*

Tällöin on olemassa sellainen $\delta_1 > 0$, että alkuarvotehtävällä $(*)$ on ratkaisu $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ välillä $I_1 = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$.

Olkoon y_2 myös alkuarvotehtävän ratkaisu. Ratkaisuille y_1 ja y_2 pätee $\big(x, y_k(x)\big) \in E$, missä $k = 1, 2$. Nyt $y_1(x) = y_2(x)$ kaikilla $x \in I_1 \cap I_2$.

Esitietoja

Ennen globaalin OY-lauseen todistusta esitetään vielä joitain hyödyllisiä aputuloksia.

Määritelmä 1. Olkoon $H \subset \mathbb{R}^2$. Sanotaan, että funktio $f : H \to \mathbb{R}$ on *tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen*, jos on olemassa sellainen $M \geq 0$, että kaikilla $(x,y_1),(x,y_2)\in H$ on voimassa

$$\big|f(x,y_1)-f(x,y_2)\big|\le M\big|(x,y_1)-(x,y_2)\big|.$$

Määritelmä 2. Olkoon $g:E\to\mathbb{R}$. Olkoon funktiot $f_n:I\to\mathbb{R}$, missä $n\in\mathbb{N}$, jatkuvia ja $x_0\in I$. *Picardin iteroinniksi* [1] kutsutaan jonoa integraaleja

$$\begin{aligned} f_0(x) &= f_0,\\ f_1(x) &= \int_{x_0}^{x} g\big(t,f_0(t)\big)\,dt+f_0,\\ &\vdots\\ f_{n+1}(x) &= \int_{x_0}^{x} g\big(t,f_n(t)\big)\,dt+f_0, \end{aligned}$$

missä $\big(x,f_n(x)\big)\in E\times\mathbb{R}$, kaikilla $n\in\mathbb{N}$.

Lemma 1. *Olkoon väli $I\subset\mathbb{R}$ ja $a_n\ge 0$ sellaisia, että $\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\infty$. Olkoot funktiot $u_n:I\to\mathbb{R}$, $n\ge 1$, sellaisia, että kaikilla $x\in I$ pätee $|u_{n+1}-u_n|\le a_n$. Tällöin funktiojono (u_n) suppenee tasaisesti*[2] *kohti funktiota $u:I\to\mathbb{R}$ ja kaikilla $x\in I$ on voimassa*

$$u(x)=u_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\big(u_{n+1}(x)-u_n(x)\big).$$

Todistus. Olkoon $x\in I$ ja $\varepsilon>0$. Funktiojonon $\big(u_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ jäsenille on voimassa

$$u_n(x):=u_1(x)+\sum_{k=1}^{n}\big(u_{k+1}(x)-u_k(x)\big),$$

kun $n\ge 2$.

Olkoon $n,m\in\mathbb{N}$ siten, että $n>m$. Nyt

$$\begin{aligned} \big|u_n(x)-u_m(x)\big| &= \left|\sum_{k=m}^{n-1}u_{k+1}(x)-u_k(x)\right|\\ &\le \sum_{k=m}^{n-1}\big|u_{k+1}(x)-u_k(x)\big|\\ &\le \sum_{k=m}^{n-1}a_k\\ &\le \sum_{k=m}^{\infty}a_k\\ &<\infty. \end{aligned}$$

Koska edellinen summa on äärellinen, löytyy sellainen $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$, että $\sum_{k=n_\varepsilon}^{\infty}a_k<\varepsilon$. Nyt

$$\big|u_n(x)-u_m(x)\big|\le\sum_{k=n_\varepsilon}^{\infty}a_k<\varepsilon,$$

eli jono $\big(u_n(x)\big)$ on Cauchy-jono. Tällöin se suppenee, eli on olemassa rajafunktio $u:I\to\mathbb{R}, u(x):=\lim_{n\to\infty}u_n(x)$. Erityisesti tämä funktio u on, kuten lemmassa määritelty.

Lisäksi kaikilla $n_\varepsilon\ge n$ pätee

$$\begin{aligned} \big|u_n(x)-u(x)\big| &\le \sum_{k=n}^{\infty}\big|u_{k-1}(x)-u_k(x)\big|\\ &\le \sum_{k=n}^{\infty}a_i\\ &\le \sum_{k=n_\varepsilon}^{\infty}a_i\\ &<\varepsilon. \end{aligned}$$

Siis suppeneminen on tasaista. □

Globaali OY-lause

Lause 2. *Olkoon $[a,b]\subset I$ kompakti ja $I\subset\mathbb{R}$ jokin (mahdollisesti rajoittamaton) väli. Olkoon funktio $f:I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jatkuva ja suorakaiteessa $[a,b]\times\mathbb{R}$ tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen. Olkoon $(x_0,y_0)\in I\times\mathbb{R}$. Tällöin alkuarvotehtävällä $(*)$ on ratkaisu $y:I\to\mathbb{R}$ siten, että kaikki välin I osaväleillä annetut ratkaisut ovat sen rajoittumia.*

Ennen globaalin OY-lauseen varsinaista todistusta tehdään muutamia valmisteluja. Olkoon alkuarvotehtävällä $(*)$ ratkaisu $y:I\to\mathbb{R}$. Nyt analyysin peruslauseella funktiolle y' saadaan

$$\int_c^x y'(t)dt=y(x)-y(c),$$

missä $c\in\mathbb{R}$. Valitaan $c=x_0$. Lisäksi derivaatta y' saadaan ratkaistua (sopivasta) differentiaaliyhtälöstä

$$y'(t)=f\big(t,y(t)\big).$$

Nyt

$$y(x)=\int_{x_0}^{x}f\big(t,y(t)\big)\,dt+y(x_0). \tag{1}$$

Derivoimalla ylläoleva integraaliyhtälö saadaan johdettua alkuarvotehtävän $(*)$ kaava, jossa $y(x_0)=y_0$.

Olkoon $[a,b]\subset I$ suljettu väli. Merkitään $K:=[a,b]\times\mathbb{R}$. Selvästi alkuarvotehtävän ehdolle $y(x_0)=y_0$ pätee $(x_0,y_0)\in K$. Funktion f normille pätee:

$$\|f\|:=\max_{x\in[a,b]}\big|f(x,y_0)\big|>0,\text{ kun }(x_0,y_0)\in K. \tag{2}$$

[1] Tämä on eräs numeerisen integroinnin menetelmä.

[2] Toisin sanoen on voimassa $\sup_{x\in I}\big|u_n(x)-u(x)\big|\to 0$, kun $n\to\infty$. Vertaa pisteittäiseen suppenemiseen, jossa kaikilla $x\in I$ pätee $\big|u_n(x)-u(x)\big|\to 0$, kun $n\to\infty$. Huomaa, että tasainen- $\Longrightarrow$ pisteittäinen suppeneminen, mutta pisteittäinen- $\not\Longrightarrow$ tasainen suppeneminen.

Muulloin $f(x) = 0$, kaikilla $x \in [a, b]$. Alkuarvotehtävällä $(*)$ olisi tällöin ratkaisu $y(x) = y_0$, kaikilla $x \in [a, b]$.

Määritelmästä 2 saadaan yhtälölle (1) Picardin iteraatio. Siis

$$y_0(x) = y_0 \text{ ja } y_{n+1}(x) = \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_n(t)\right) dt + y_0,$$

missä funktiot y_n ovat jatkuvia ja $\left(x_0, y_n(x_0)\right) \in K$.

Näytetään aluksi, että funktiolle f saadaan Picardin iteraatio: Lauseen 2 määrittelystä tiedetään, että f on jatkuva. Nyt $\int_{x_0}^{x} f\left(t, y_n(t)\right)$ on jatkuva, jos y_n on jatkuva. Koska $y_n \to y$ tasaisesti ja y on jatkuva, niin funktio y_n on jatkuva. [2, s. 249]

Määritelmästä tiedetään, että $x_0 \in [a, b]$ ja $y_n(x_0) \in \mathbb{R}$. Tällöin $\left(x_0, y_n(x_0)\right) \in [a, b] \times \mathbb{R} = K$.

Koska kuvaus $f(x, y)$ on tasaisesti Lipschitz-jatkuva suorakaiteessa K, on sillä Lipschitz-vakio $M \geq 0$. Kuten edellä todettu: Picardin iteraation funktiot y_n sijaitsevat suorakaiteessa K. Tällöin

$$\left|y_{n+1}(x) - y_n(x)\right| \leq \frac{M^n \|f\|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}, \tag{3}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $x \in [a, b]$.

Sijoitetaan $n = 0$ kaavaan (3), jolloin saadaan arvioksi $\left|y_1(x) - y_0\right| \leq \|f\| |x - x_0|$. Huomataan, että

$$\begin{aligned}\left|y_1(x) - y_0(x)\right| &\leq \left|\int_{x_0}^{x} f\left(t, y_0(x)\right) dt\right| \\ &\leq \int_{x_0}^{x} \left|f\left(t, y_0(x)\right)\right| dt \\ &\leq \|f\| |x - x_0|.\end{aligned}$$

Siis arvio pätee, kun $n = 0$.

Olkoon $n = m + 1$. Nyt

$$\begin{aligned}&\left|y_{(m+1)+1}(x) - y_{m+1}(x)\right| \\ &\leq \int_{x_0}^{x} \left|f\left(t, y_{m+1}(x)\right) - f\left(t, y_m(x)\right)\right| dt \\ &\leq \int_{x_0}^{x} \Big|M\left|y_{m+1}(t) - y_m(t)\right|\Big| dt \\ &= M \int_{x_0}^{x} \left|y_{m+1}(t) - y_m(t)\right| dt.\end{aligned}$$

Toinen ylöspäin arvioiminen nojaa tietoon, että funktio f on Lipschitz. Kun oletetaan, että arvio (3) pätee, kun $n = m$, niin saadaan

$$\begin{aligned}&\left|y_{(m+1)+1}(x) - y_{m+1}(x)\right| \\ &\leq M \int_{x_0}^{x} \frac{M^m \|f\|}{(m+1)!} |t - x_0|^{(m+1)+1} dt \\ &= \frac{M^{m+1} \|f\|}{(m+1)!} \int_{x_0}^{x} |t - x_0|^{m+2} dt \\ &= \frac{M^{m+1} \|f\|}{(m+1)!} \cdot \frac{(x - x_0)|x - x_0|^{m+1}}{m+2} \\ &= \frac{M^{m+1} \|f\|}{(m+2)!} |x - x_0|^{m+2}.\end{aligned}$$

Siis kaava (3) on tosi.

Huomataan, että kaikilla $x, x_0 \in [a, b]$ on voimassa $|x - x_0| \leq b - a$. Tämän tiedon ja arvion (3) nojalla saadaan

$$\left|y_{n+1}(x) - y_n(x)\right| \leq \frac{M^n \|f\|}{(n+1)!} (b - a)^{n+1} := a_n.$$

Nyt majorantille a_n pätee

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \|f\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^n}{(n+1)!} (b - a)^{n+1} \\ &= \|f\| \left(-M^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^{n-1}}{n!} (b - a)^n\right) \\ &= -\frac{\|f\|}{M} + \frac{\|f\|}{M} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!} (b - a)^n \\ &= \frac{\|f\|}{M} \left(e^{M(b-a)} - 1\right) \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Viimeinen yhtäsuuruus saadaan hyödyntämällä eksponenttifunktion sarjakehitelmää

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Nyt voimme soveltaa Lemmaa 1. Siis välillä $[a, b]$ on voimassa

$$y(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(y_{n+1}(x) - y_n(x)\right). \tag{4}$$

Funktio y on rajafunktiona jatkuva, sillä funktiot y_n ovat jatkuvia kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Edelleen $\left(x, y(x)\right) \in K$, kun $x \in [a, b]$.

Varsinainen todistus

Nyt olemme valmiit todistamaan globaalin OY-lauseen. Osoitetaan aluksi ratkaisun olemassaolo. Siis täytyy näyttää, että funktio (4) toteuttaa yhtälön (1).

Olemassaolon todistus. Olkoon y funktio, kuten kohdassa (4). Näytetään, että

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f\left(t, y_n(t)\right) dt = \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right) dt, \qquad (5)$$

kaikilla $x \in I$.

Raja-arvon määritelmällä ja Lipschitz-jatkuvuudella saadaan

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{x_0}^{x} \left(t, y_n(t)\right) dt - \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right) dt\right| \\
&\leq \int_{x_0}^{x} \left| f\left(t, y_n(t)\right) - \left(t, y(t)\right)\right| dt \\
&\leq \int_{x_0}^{x} M\left|y_n(t) - y(t)\right| dt.
\end{aligned}$$

Koska $y_n \to y$ tasaisesti välillä $[a,b]$, on voimassa $\max_{t\in I}\left|y_n(t) - y(t)\right| \to 0$, kun $n \to \infty$. Nyt hyödyntämällä tätä

$$\begin{aligned}
M\int_{x_0}^{x} \left|y_n(t) - y(t)\right| dt &\leq M(x - x_0)\max_{t\in I}\left|y_n(t) - y(t)\right| \\
&\leq M(b-a)\max_{t\in I}\left|y_n(t) - y(t)\right| \\
&\to 0, \text{kun } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Siis yhtälö (5) on tosi. Tällöin kaikilla $x \in [a,b]$ Picardin iteraatiosta saatu ratkaisu

$$\begin{aligned}
y(x) &:= \lim_{n\to\infty} y_{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_n(t)\right) dt\right) \\
&= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right) dt
\end{aligned}$$

on alkuarvotehtävän $(*)$ ratkaisu $y : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Olkoon $[a_n, b_n] \subset I$, missä $n \in \mathbb{N}$, nouseva jono välejä siten, että

$$I = \bigcup_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Jos I on suljettu, niin jokin väli $[a_i, b_i]$, $i \in \mathbb{N}$, sisältää välin I reunan. Jos I on avoin, niin jonon (a_n) on oltava aidosti vähenevä tai (b_n) on oltava aidosti kasvava[3]. Aiemman nojalla tiedämme, että ratkaisu $y := y_n : [a_n, b_n] \to \mathbb{R}$ on olemassa.

Olkoon $x_0 \in I$. Erityisesti $x_0 \in [a_n, b_n]$, jollain $n \in \mathbb{N}$. Lauseen 1 lokaaliin yksikäsitteisyyteen[4] vedoten ratkaisulla y on olemassa derivaatta välin I sisäpisteessä x_0 tai toispuoleinen derivaatta, jos x_0 on välin I päätepiste. Tällöin funktio y on alkuarvotehtävän $(*)$ ratkaisu koko välillä $I \subset \mathbb{R}$. □

Todistetaan seuraavaksi ratkaisun yksikäsitteisyys.

Yksikäsitteisyyden todistus. Olkoon $y_i : I_i \to \mathbb{R}$, missä $i \in \{1,2\}$, kumpikin alkuarvotehtävän ratkaisuja, joille on voimassa $\{\left(x, y_i(x) \mid x \in I_i\right)\} \subset K$, $i \in \{1,2\}$. Pitää näyttää, että nämä kaksi ratkaisua ovat samat, eli arvio (6).

Vastaoletus: olkoon $x \in I_1 \cap I_2$ sellainen, että $y_1(x) \neq y_2(x)$. Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}$ ja $x < x_0$. Nyt on olemassa

$$x_1 = \sup\{x \in I_1 \cap I_2 \mid y_1(x) \neq y_2(x) \text{ ja } x < x_0\},$$

sillä tämä joukko on oletuksien nojalla epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu.

Näytetään, että funktioiden y_1 ja y_2 kuvaajat yhtyvät jossain pisteen x_0 ympäristössä.[5]

Olkoon $\delta > 0$ ja $J = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset I_1 \cap I_2$. Koska funktiot y_1 ja y_2 ovat jatkuvia, niin kaikilla $x \in J$ on voimassa $\left(x, y_i(x)\right) \in K$.

Olkoon $x_0 \leq x < x_0 + \delta$. Vastaavasti voidaan osoittaa tilanne $x_0 - \delta < x \geq x_0$. Funktioiden y_1 ja y_2 erotukselle on olemassa arvio

$$0 \leq \left|y_2(x) - y_1(x)\right| \leq \frac{2qM^{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}, \qquad (6)$$

missä $q := \delta\|f\|$, kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $x \in J$.

Kun $n = 0$, niin

$$\begin{aligned}
\left|y_1(x) - y_2(x)\right| &\leq M\int_{x_0}^{x} \left|y_1(t) - y_2(t)\right| dt \\
&\leq M\int_{x_0}^{x} 2q dt \\
&= M \cdot 2q(x - x_0) \\
&\leq \frac{2qM^{0+1}}{(0+1)!}(b-a)^{0+1}.
\end{aligned}$$

Siis arvio on tosi, kun $n = 0$. Oletetaan, että arvio (6) on tosi, kun $n = m$. Kun $n = m+1$ saadaan

$$\begin{aligned}
\left|y_2(x) - y_1(x)\right| &\leq M\int_{x_0}^{x} \left|y_2(t) - y_1(t)\right| dt \\
&\leq M\int_{x_0}^{x} \frac{2qM^{m+1}}{(m+1)!}\left|x - x_0\right|^{m+1} dt \\
&= \frac{2qM^{(m+1)} + 1}{(m+1)!}\int_{x_0}^{x} \left|x - x_0\right|^{m+1} dt \\
&= \frac{2qM^{(m+1)+1}}{(m+1)!} \cdot \frac{1}{(m+1)+1}\Big|_{x_0}^{x} \left|t - x_0\right|^{(m+1)+1} \\
&= \frac{2qM^{(m+2}}{(m+2)!}\left|x - x_0\right|^{m+2} \\
&\leq \frac{2qM^{(m+2)}}{(m+2)!}(b-a)^{m+2},
\end{aligned}$$

[3]Esimerkiksi olkoon $I = (0,1]$. Määritellään $a_n = (n+1)^{-1}$ ja $b_n = 1$. Nyt $I = \bigcup_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)^{-1}, 1\right]$.

[4]Tämän todistus vastaa globaalin yksikäsitteisyyden todistusta.

[5]Tämä vastaa lokaalin OY-lauseen yksikäsitteisyyden todistamista.

mikä todistaa arvion (6).

Edelleen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2qM^{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} = 2qe^{M(b-a)} < \infty,$$

jolloin $\frac{2qM^{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \to 0$, eli $\big|y_2(x) - y_1(x)\big| \to 0$, kun $n \to \infty$. Siis $y_1(x) = y_2(x)$, kun $x \in J$.

Siis kaikilla $x \in \,]x_1, x_0]$ pätee $y_1(x) = y_2(x)$. Vastaavasti voidaan todistaa, kun $x \in [x_0, x_1[$, eli $x_0 < x$.[6]

Lisäksi funktiot y_1 ja y_2 ovat jatkuvia. Tällöin $y_1(x_1) = y_2(x_1)$, mikä on ristiriita. Siis kaikilla $x \in I_1 \cap I_2$ pätee $y := y_1(x) = y_2(x)$. □

Kaksi esimerkkiä

On hyvä muistaa, että kaikilla differentiaaliyhtälöillä ei välttämättä ole yksikäsitteistä ratkaisua (jos ratkaisu ylipäänsä on olemassa!). Tästä esimerkkinä on alkuarvotehtävä

$$y'(x) = 3y(x)^{\frac{2}{3}} \text{ja } y(0) = 0.$$

Selvästi funktio $f(x,y) := 3y^{\frac{2}{3}}$ on jatkuva, mutta se ei ole Lipschitz-jatkuva kohdassa $x = 0$.

Esitetään vielä tapaus, jossa globaali OY-lause pätee. Olkoon ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö

$$y'(x) + x^2 y(x) = \frac{3}{x^4 + \pi},$$

jolle $y(2) = \pi$. Kyseessä on alkuarvotehtävä.

Olkoon suorakaide $K := [-c, c] \times \mathbb{R}$. Funktio

$$g(x,y) := \frac{3}{x^4 + \pi} - x^2 y$$

on muuttujan y suhteen tasaisesti Lipschitz-jatkuva suorakaiteessa K, sillä

$$\big|g(x,y_1) - g(x,y_2)\big| = x^2|y_1 - y_2| \le c^2|y_1 - y_2|.$$

Alkuarvotehtävä täyttää siis Lauseen (2) ehdot. Tällöin alkuarvotehtävällä on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu $y : I \to \mathbb{R}$, jolle $y(2) = \pi$. Suorakaiteen K määrittelystä väliksi I saadaan koko reaaliväli $\mathbb{R}$.

Viitteet

[1] Gyllenberg, Mats; Lamberg, Lasse; Ola, Petri; Piiroinen, Petteri ja Häsä, Jokke. *Tavalliset differentiaaliyhtälöt*, luentomoniste. Helsingin yliopisto, 2016.

[2] Harjulehto, Petteri; Klén, Riku ja Koskenoja, Mika. *Analyysiä reaaliluvuilla*. Unigrafia Oy: Helsinki, 2017.

[6] Tämä on esitetty lähteessä [1].