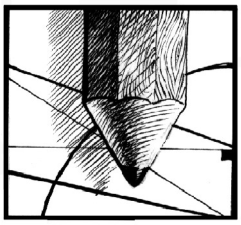

Hamiltonin kvaternioiden renessanssi?

Teuvo Laurinolli

Tieteenhistorian merkittävimpiin nimiin kuuluvan William Rowan Hamiltonin (1805–1865) poikkeuksellinen lahjakkuus tuli esille jo varhaislapsuudessa ilmiömäisenä kielten oppimisena. Luotettavana pidetyn St Andrewsin yliopiston toimittaman elämäkerran[1] mukaan Hamilton osasi jo viisivuotiaana äidinkielensä lisäksi kolmea vierasta kieltä, latinaa, kreikkaa ja hepreaa. Opettajana oli hänen setänsä, joka oli erinomainen pedagogi. Kieliä hän oppi myöhemmin lisää ja kerrotaan hänen elämänsä loppupuolella rentoutuneen lukemalla persialaista runoutta alkukielellä.

Luvunlaskukin sujui Williamilta vaivattomasti, mutta hän haaveili runoilijan urasta. Matematiikka vei voiton, kun hän 12-vuotiaana hävisi päässälaskukisoissa Irlannissa vierailevalle amerikkalaiselle ihmelapselle Zerah Colburnille. Muutamassa vuodessa hän kävi läpi ranskankielisen Clairautin *Algebran* ja Newtonin *Principian* sekä Laplacen *Mecánique célesten*, josta hän löysi 17-vuotiaana virheen. Irlannin johtava luonnontieteilijä (Royal Astronomer) John Brinkley kommentoi nuoren Hamiltonin löydöstä: ”This young man, I do not say will be, but is, the first mathematician of his age.”

Hamiltonin yliopisto-opinnot alkoivat vauhdikkaasti Dublinin Trinity Collegessa 1824. Jo ensimmäisenä vuotena julkaistiin 19-vuotiaan Hamiltonin tutkielma *On causticsi*, joka ilmestyi Irlannin tiedeakatemian sarjassa. Samoihin aikoihin Hamilton rakastui kiihkeästi tuttavaperheen tyttäreen Catherine Disneyhin. Ajan tavan mukaisesti Hamilton pyysi Catherinen kättä hänen vanhemmiltaan. Asiaa harkittuaan he antoivat kieltävän vastauksen, koska toinen kosija katsottiin vakavaraisemmaksi. Hamilton masentui ja suunnitteli itsemurhaa, mutta uppoutuminen runouteen palautti vähitellen hänen elämänhalunsa ja intohimonsa matematiikkaan. Runous auttoi häntä myöhemminkin vastoinkäymisten ja masennusten voittamiseen. Catherine ei kuitenkaan kadonnut hänen elämästään, vaikka Hamilton myöhemmin avioitui Helen Baylyn kanssa.

Trinity Collegen loppututkinnon molemmat osat (Sciences & Classics) valmistuivat 1826 korkeimmilla *optime*-arvosanoilla. Opintoihin kuulunut laaja tutkielma *Theory of Systems of Rays* herätti huomiota ja Hamilton nimitettiinkin heti Brinkleyn seuraajaksi kuninkaallisen tähtitieteilijän virkaan Dunsink-observatorioon, josta tuli hänen elinikäinen virka-asuntonsa. Samalla hänet nimitettiin Trinity Collegen astronomian professoriksi. Piispan virkaan siirtynyt Brinkley oli kuitenkin neuvonut Hamiltonia kieltäytymään observatorion johtajan virasta ja hän taisi olla oikeassa, koska Hamilton menetti pian mielenkiintonsa tähtitieteeseen ja omistautui kokonaan matematiikalle ja fysiikalle.

Hamiltonin laajasta matemaattisesta aktiivisuudesta erottuu kaksi ydinaluetta: Newtonin mekaniikan syventäminen sekä kompleksilukujen algebra ja sen yleistäminen. Edellisellä alueella hän jatkoi Lagrangen aiempia tutkimuksia määrittelemällä mekaanista systee-

[1] `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk`

miä kuvaavan funktion $\mathcal{H}(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$, jossa vektorit $\mathbf{q}$ ja $\mathbf{p}$ ovat hiukkasen paikkaa ja liikemäärää kuvaavia vektoreita ja t on aikamuuttuja. Tämä *Hamiltonin funktio*[2] toteuttaa yksinkertaiset differentiaaliyhtälöt (Hamiltonin yhtälöt), jotka määräävät systeemin aikaevoluution. Hamiltonin 1830-luvulla kehittelemän mekaniikan merkitys on ajan kuluessa kasvanut ja on keskeisessä asemassa myös nykyfysiikassa mukaan lukien kvanttimekaniikka ja kvanttikenttäteoria.

Kompleksiluvut oli haparoiden löydetty jo 1500–1600-luvuilla ja otettu hallintaan 1700-luvulla. Matemaatikot, heidän joukossaan Euler (1707–1783) ja Gauss (1777–1855), määrittelivät ne binomeina $z = x + yi$, jotka voitiin hahmottaa myös muodossa $z = x\cdot 1 + y\cdot i$. Tässä x ja y ovat reaalilukuja, 1 on reaaliyksikkö ja i on imaginaariyksikkö, jonka neliö on -1. Kompleksilukujen algebra toimi täsmälleen samoilla laskusäännöillä kuin reaalilukujen algebra. Kompleksilukujen ja xy-tason pisteiden (tai vektoreiden) vastaavaisuus oli tiedossa ja sitä oli tehokkaasti hyödynnetty. Gauss oli vuonna 1800 todistanut algebran peruslauseen, jonka mukaan *jokaisella polynomilla* on nollakohta kompleksilukujen joukossa $\mathbb{C}$. Polynomin kertoimet saavat olla mitä tahansa reaalilukuja ja jopa mitä tahansa kompleksilukuja.

Hamilton saattoi kuitenkin olla ensimmäinen, joka riisui imaginaariyksiköltä mystisen auran määritellessään kahden kompleksitason pisteen $z_1 = (x_1, y_1)$ ja $z_2 = (x_2, y_2)$ yhteenlaskun ja kertolaskun proosallisesti asettamalla

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

ja

$$z_1 z_2 = (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

sekä nimeämällä sitten tason yksikköpisteet $(1,0) = 1$ ja $(0,1) = i$.

Kesytettyään kompleksiluvut tason pisteiksi Hamilton suuntasi katseensa korkeampiin ulottuvuuksiin. Jos 2-ulotteisen xy-tason pisteet saadaan toimimaan algebrana, miksi ei 3-ulotteisen xyz-avaruudenkin? Tästä aiheesta tulikin Hamiltonin loppuelämän *magnum opus*.

Lukualueen laajentaminen avaruuteen kompasteli kertolaskuun. Hamilton ponnisteli vuosien ajan löytääkseen toimivan määritelmän avaruuspisteiden $r_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ja $r_2 = (x_2, y_2, z_2)$ tulolle. Noina vuosina hänen lapsillaan oli tapana aamiaispöydässä tiedustella isältään: ”Well, Papa can you multiply triplets?” Läpimurto tapahtui maanantaina 16.10.1843, jolloin Hamilton oli vaimonsa kanssa kävellen matkalla tiedeakatemian kokoukseen[3]. Ollessaan ylittämässä Royal Canal -siltaa Hamilton oivalsi, että laajennus olikin tehtävä neliulotteiseen avaruuteen eli pisteille $q = (x, y, z, t)$, jotka hän nimesi *kvaternioiksi*. Sittemmin on vakiintunut tavaksi kirjoittaa kvaternio Hamiltonin esimerkkiä noudattaen järjestykseen $q = (t, x, y, z)$ ja edelleen kompleksilukujen mallin mukaiseen muotoon

$$q = t + xi + yj + zk = t\cdot 1 + x\cdot i + y\cdot j + z\cdot k.$$

Tässä kvartetissa 1 on reaaliyksikkö eli skalaariyksikkö ja i, j, k ovat imaginaariyksiköitä, jotka voidaan ajatella xyz-avaruuskoordinaatiston akselien suuntaisiksi yksikkövektoreiksi. Kertoimet t, x, y, z ovat reaalilukuja. Kompleksilukualgebran tapaan muotoa $q = t + xi + yj + zk$ olevien kvaternioiden kertolasku määritellään tällaisten polynomien kertolaskuna sillä lisäehdolla, että

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Tämä oivallus työllisti Hamiltonin hänen elämänsä loppuun asti. Hän kehitteli kvaternioiden algebraa ja analyysiä sekä muokkasi niistä käsitteellisiä työkaluja moniin fysiikan ja geometrian tarpeisiin. Mekaniikan lait ja Maxwellin yhtälöt kirjoitettiin kvaternioiden avulla. Nykyisen vektorialgebran ja -analyysin peruskäsitteet (mm. piste- ja ristitulo sekä nabla-operaattori) versoivat Hamiltonin käsissä kvaternioista erikoistapauksina. Nämä versot syrjäyttivät 19. vuosisadan lopulla kvaterniot fysiikan työkaluina. Vaikutusvaltaisten oppikirjojen tekijät (mm. Heaviside ja Gibbs) valitsivat vektoriformalismin yleisiä kvaternioita konkreettisempana ja helpommin ymmärrettävänä tapana kuvata fysikaalisia suureita. Vähitellen kvaterniot väistyivät taka-alalle, vaikka ne Irlannissa pysyivät pitkään Hamiltonin jälkeenkin matematiikan yliopisto-opintojen pakollisena osana. Toisaalta kvaterniot inspiroivat jo 1800-luvulla monia muita algebrallisia laajennuksia, kuten Hermann Grassmannin (1809–1877) ja William Kingdon Cliffordin (1845–1879) kehittelemät Grassmannin ja Cliffordin algebrat sekä ns. geometrinen algebra. Nämä ovat edelleenkin elinvoimaisia matematiikan aloja.

Hamilton käytti seitsemän viimeistä elinvuottaan 840-sivuisen pääteoksensa, Eukleideen geometrian tyyliin nimetyn, *Elements of quaternions* koostamiseen. Hän ei ehtinyt saada sitä valmiiksi ennen kuolemaansa vuonna 1865. Hänen poikansa William Edwin Hamilton toimitti kirjan painokuntoon ja kirjoitti sen esipuheen. Se ilmestyi 1866. Hamiltonin vaikeaselkoisen esitystavan vuoksi lukijakunta on jäänyt vähäiseksi.

Digitaalisen tekniikan ja tietokonegrafiikan aikana 1990-luvulla unohduksiin jääneet kvaterniot löydettiin uudelleen. Kävi ilmi, että kappaleiden liikettä avaruudessa tai sellaisen liikkeen projektiota kuvaruudulla voidaan ohjata/ohjelmoida kvaternioalgebran avulla.

[2] `https://fi.m.wikipedia.org/wiki/Hamiltonin_mekaniikka`

[3] Tapahtuman muistoksi Dublinissa järjestetään vuosittain lokakuun 16. päivänä Hamilton walk -kävely, joka suuntautuu samalle sillalle.

Hamilton oli muotoillut kvaternioiden avulla ns. *voileipäkaavan*, joka kuvaa avaruudessa tapahtuvaa kiertoliikettä laskennallisesti. Nykyisin kvaternioita käytetäänkin tietokoneohjelmiin integroituina software-komponentteina tuottamaan liikkuvaa 3D-grafiikkaa näytölle tai – konkreettisemmin – navigoimaan lentokoneita tai avaruusaluksia. Mainittakoon, että teoreettisessa fysiikassakin on löytynyt uutta käyttöä kvaternioille mm. alkeishiukkasten spin-ominaisuuksien matemaattisessa mallintamisessa.

Solmu-lehden oppimateriaalikansiossa[4] on sinne joulukuussa 2020 luovuttamani pdf-muotoinen kirjanen *Ensiaskeleet Hamiltonin kvaternioalgebraan*[5]. Siinä käydään läpi kompleksilukujen ja kvaternioiden algebran perusteet Hamiltonin voileipäkaavaan saakka. Esityksen ymmärtäminen edellyttää lukion ensimmäisen vuoden pitkän matematiikan tietoja. Tervetuloa Hamiltonin jalanjäljille!

[4]`https://matematiikkalehtisolmu.fi/oppimateriaalit.html`

[5]`https://matematiikkalehtisolmu.fi/2020/Kvaterniot-TL-v1.pdf`