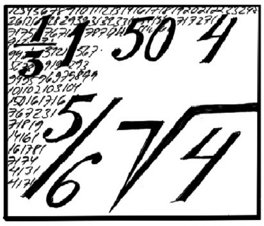


Raja-arvo ei aina käyttäydy niin kuin luulisi

Simo K. Kivelä

Funktion raja-arvo

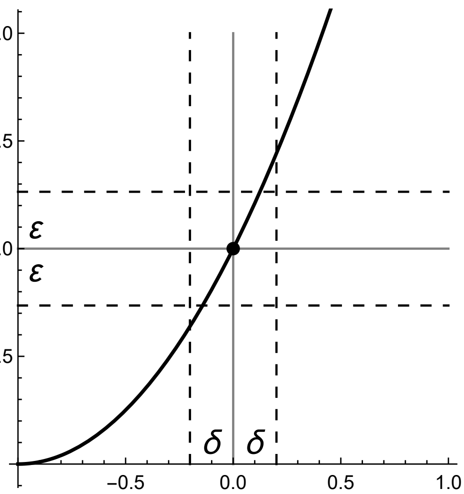
$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

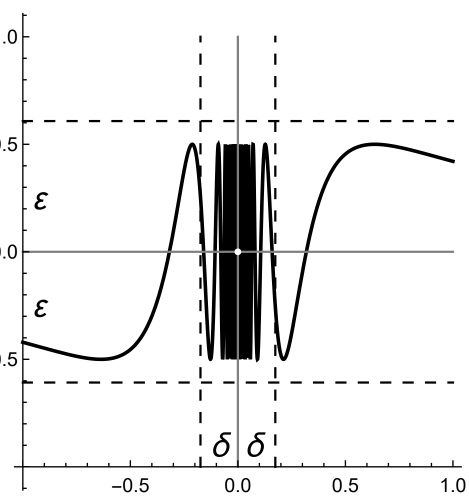
luonnehditaan usein sanomalla, että funktion arvot $f(x)$ saadaan niin lähelle lukua b kuin halutaan, kunhan muuttujan x arvot viedään riittävän lähelle lukua a. Tavoitteena on luoda asiasta mielikuva, mutta varsinaiseksi määritelmäksi tämä ei oikein kelpaa.

Täsmällisyyteen pyrkivä määritelmä käyttää usean aloittelevan matematiikan opiskelijan kammoamia kreikkalaisia kirjaimia epsilon ja delta, ε ja δ. Matematiikan pitkään historiaan verrattuna määritelmä on nuori, 1800-luvulta. Kuvan piirtäminen auttaa määritelmän ymmärtämisessä eikä se lopulta ole kovin ihmeellinen, joskin edellyttää usein hieman uutta ajattelutapaa. Siis:

Funktion f raja-arvo pisteessä a on b, merkitään $\lim_{x\to a} f(x) = b$, jos jokaista positiivilukua ε kohden on olemassa positiiviluku δ siten, että $|f(x) - b| < \varepsilon$, kun $0 < |x - a| < \delta$.

Merkintä $0 < |x - a|$ on hieman hämäävä, koska itseisarvo ei kuitenkaan voi negatiivinen olla. Tätä ei olekaan tarkoitus korostaa, vaan ilmaista, että yhtäsuuruus ei tule kysymykseen, ts. ei saa olla $x = a$. Ei siis tarkastella lainkaan funktion f arvoa pisteessä a eikä sen edes tarvitse olla määritelty tässä pisteessä. (Tarkkaan ottaen määritelmään pitäisi lisätä, että huomioon otetaan vain ne pisteet x, joissa funktio on määritelty. Tätä ei kuitenkaan kannata liikaa miettiä pyrittäessä ymmärtämään määritelmän idea.)





Ylemmässä kuvassa on $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ (musta piste). Vaakasuorat katkoviivat rajaavat alueen, jossa funktion arvot ovat enintään epsilonin etäisyydellä raja-arvosta 1. Pystysuorat katkoviivat alueen, jossa argumentti x on enintään deltan etäisyydellä tarkastelupisteestä 0. Kuvan mukainen delta ei kelpaa vastaamaan vaakasuorien katkoviivojen epsilonia, mutta pienentämällä deltaa päästään tilanteeseen, jossa vastaavat funktion arvot ovat vaakasuorien katkoviivojen välissä. Näin käy, valitaanpa epsilon millaiseksi tahansa.

Alemmassa kuvassa tutkitaan, onko $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ (valkoinen piste). Kuvan tilanteessa epsilonia vastaava delta on löytynyt. Itse asiassa deltalle kävisi mikä tahansa arvo. Jokaiselle epsilonille pitäisi kuitenkin löytää jokin sitä vastaava delta, mutta tämä ei onnistu, jos epsilon on < 0.5. Tämä merkitsee, että raja-arvo ei ole 0, eikä sitä itse asiassa ole olemassakaan.

Yhdistetyn funktion raja-arvo

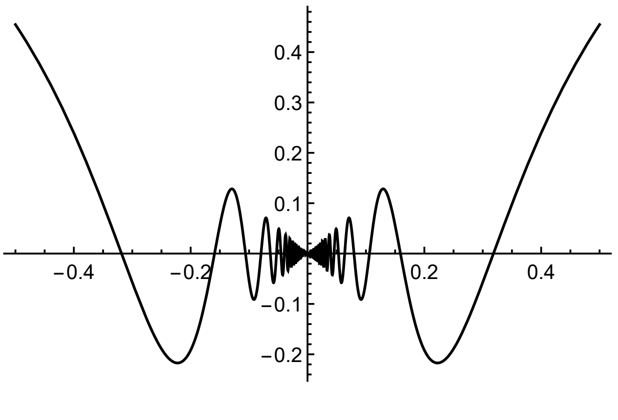
Alussa esitetty raja-arvon luonnehdinta antaa aiheen uskoa, että jos

$$\lim_{x\to a} g(x) = b \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to b} f(x) = c,$$

niin myös

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = c.$$

Jos siis x lähestyy a:ta, niin $g(x)$ lähestyy b:tä ja tällöin $f(g(x))$ lähestyy c:tä. Tämä pitäisi tietenkin todistaa epsilon-delta-määritelmään perustuen eikä vain luottaa intuitioon. Jos taas lausuma ei olekaan oikea, sen kaatamiseen riittää yksi vastaesimerkki.



Olkoon g oheisen kuvan mukainen funktio, $g(x) = x\sin(1/x)$. Tämä ei ole määritelty origossa, jossa raja-arvoa tarkastellaan, mutta sen ei tarvitsekaan olla. Koska

$$|x\sin(1/x)| = |x||\sin(1/x)| \le |x|,$$

on

$$|g(x) - 0| < \varepsilon, \text{ jos } 0 < |x - 0| < \varepsilon = \delta.$$

Epsilonia vastaava delta on siis sama kuin epsilon itse, ja raja-arvo origossa on 0.

Funktion f arvo origossa olkoon $f(0) = 1$, muutoin olkoon $f(x) = 0$. Tällöin $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Millainen sitten on yhdistetty funktio $f(g(x))$? Se saa samoja arvoja kuin ulkofunktio f, ts. 0 ja 1. Jos $g(x) = 0$, arvo on 1, muutoin se on 0. Funktiolla g on äärettömän paljon nollakohtia, jotka kasautuvat origoon (kuvan mukaisesti; lukija laskekoon nollakohdat tarkemmin). Tällöin yhdistetty funktio saa jokaisella välillä $]-\delta, \delta[$ sekä arvoja 1 että arvoja 0. Näin ollen yhdistetyllä funktiolla ei ole raja-arvoa origossa eikä yhdistetyn funktion raja-arvoa koskeva otaksuma ainakaan tässä tapauksessa päde.

Voisi tietenkin ajatella, että otaksuma olisi voimassa siinä tapauksessa, että yhdistetyllä funktiolla on raja-arvo. Näinkään ei ole, mikä nähdään tarkastelemalla yhdistettyä funktiota $f \circ f$, ts. lauseketta $f(f(x))$. Jos nimittäin $x \neq 0$, on $f(x) = 0$ ja siis $f(f(x)) = 1$. Tällöin $\lim_{x\to 0} f(f(x)) = 1$.

Luonnolliselta tuntuva lausuma yhdistetyn funktion raja-arvosta ei siis näytä olevan totta ainakaan yleisesti. Itse asiassa se on kyllä melkein totta, mutta tarvitaan yksi lisäoletus: ulkofunktion pitää olla jatkuva. Tämän todistaminen jääköön harjoitustehtäväksi lukijalle. Vihjeen saa vaikkapa artikkelin lopussa mainittavista ranskankielisistä dokumenteista, joiden lukemisessa ei kovin paljoa ranskan taitoa tarvita. Matemaattinen notaatio on kansainvälistä.

Mitä Wikipedia sanoo

Suomenkielinen raja-arvoa käsittelevä Wikipedia-artikkeli esittää yhdistettyä funktiota koskevan lausuman totena. Englanninkielisen ja saksankielisen mukaan lausuma ei pidä paikkaansa ja vastaesimerkkikin esitetään. Ranskankielisen mukaan lausuma pätee.

Mistä tässä on kysymys? Eikö Wikipedia-artikkeleihin voi luottaa?

Lähdekritiikki on tietenkin aina paikallaan ja kaikki inhimillinen toiminta on virhealtista. Tässä on kuitenkin kyse hieman muustakin. Suomenkielisessä artikkelissa on yksinkertaisesti virhe. Englannin-, saksan- ja ranskankieliset ovat omassa kontekstissaan oikein. Englannin- ja saksankielisillä on nimittäin sama raja-arvon määritelmä kuin Suomessa käytetty (ja edellä esitetty), mutta Ranskassa on – ainakin aika yleisenä – tapana määritellä hieman toisin:

Funktion f raja-arvo pisteessä a on b, merkitään $\lim_{x\to a} f(x) = b$, jos jokaista positiivilukua ε kohden on olemassa positiiviluku δ siten, että $|f(x) - b| < \varepsilon$, kun $|x - a| < \delta$.

Erona on, että määrittelyehdon $|f(x) - b| < \varepsilon$ tulee päteä myös, jos $x = a$. Jos tulee olla $|f(a) - b| < \varepsilon$ millä tahansa positiiviluvulla ε, tulee välttämättä olla $f(a) = b$ (jos a kuuluu funktion f määrittelyjoukkoon). Funktion f pitää siten olla jatkuva pisteessä a. (Jos f ei ole määritelty pisteessä a, sen määrittely voidaan laajentaa pisteeseen a asettamalla $f(a) = b$, jolloin saadaan jatkuva funktio.)

Ranskassa raja-arvon olemassaololta vaaditaan siis hieman enemmän, jolloin ehdot täyttäviä tapauksia on vähemmän ja näille yhdistettyjä funktioita koskeva tulos pätee.

Eikö matematiikka sitten olekaan universaalia, kaikkialla samanlaista? Ei tässä mielessä. Määritelmissä voi olla eroja. Periaatteessa tämä ei ole sen kummallisempaa, kuin että toisinaan pienimpänä luonnollisena lukuna pidetään ykköstä, toisinaan nollaa (kuten matemaattisten merkintöjen standardi tekee). Uutta kirjaa luettaessa onkin syytä katsoa, millaisia määritelmiä siinä käytetään. Ainakin kriittisissä tapauksissa, mitä ne sitten ovatkin.

Wikipedia-artikkelit

suomenkielinen:
`https://fi.wikipedia.org/wiki/Funktion_raja-arvo`

englanninkielinen:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Limit_of_a_function`

saksankielinen:
`https://de.wikipedia.org/wiki/Grenzwert_(Funktion)`

ranskankieliset:
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Limite_(math%C3%A9matiques_%C3%A9l%C3%A9mentaires)`

`https://fr.wikipedia.org/wiki/Op%C3%A9rations_sur_les_limites`

`https://fr.wikiversity.org/wiki/Fonctions_d%27une_variable_r%C3%A9elle/Limites`