ENSIASKELEET HAMILTONIN KVATERNIOALGEBRAAN

(v1)

Teuvo Laurinolli

2020

teuvo.laurinolli@gmail.com

AD ASTRA PER ASPERA

SISÄLLYSLUETTELO

ALKULAUSE

Matemaattisen päättelyn keskeisenä kohteena on vuosituhansien ajan ollut sellaisen tuntemattoman arvon (kuten vuoren korkeuden, Maan ja Kuun välimatkan tai vetyatomin massan) määrittäminen, jota ei voida suoraan mitata. Ehkä merkittävin teoreettinen innovaatio luotettavan päättelymenetelmän kehittämisessä oli *yhtälö*. Tämä tapahtui viimeistään Italiassa keskiajan lopulla ja aiemminkin Kiinassa, Intiassa tai Arabiassa. Sanallisia laskentaohjeita ruvettiin korvaamaan lyhyillä symbolisilla *laskulausekkeilla*, joissa lukuarvojen ja laskutoimitusmerkkien lisäksi esiintyi kirjainmuuttujia tarkoittamassa tuntemattomia arvoja. Tästä olikin lyhyt matka yhtälöihin, joilla voitiin koodata tuntemattomien ja tunnettujen arvojen keskinäinen riippuvuus. Yhtälöistä tuntemattomat arvot voitiin *ratkaista* yksinkertaisilla mekaanisilla askeleilla, jotka perustuivat yksinkertaisiin periaatteisiin kuten: *kun yhtä suuriin lisätään sama arvo, niin saadaan yhtä suuret.* Yhtälöitä opittiin luokittelemaan niissä esiintyvien lausekkeiden muodon perusteella. Tämä oli hyödyllistä, koska samaan luokkaan kuuluvia yhtälöitä voitiin ratkaista samalla askelkuviolla eli *ratkaisukaavalla*.

Nykypäivän koululaisillekin tuttuja tyyppiä $3x + 7 = 22$ tai $2x^2 - 4x = 198$ olevia *ensimmäisen* tai *toisen asteen polynomiyhtälöitä* malliratkaisuineen esiintyi jo muinaisten babylonialaisten opettajien savitauluissa sanallisina esimerkkiprobleemoina. Kuitenkin vasta italialaiset matemaatikot 1500-luvun alussa ryhtyivät etsimään polynomiyhtälöiden *yleisiä* ratkaisukaavoja. Niissä yhtälön ratkaisut pyrittiin ilmaisemaan sen kertoimista muodostettuina lausekkeina, joissa tarvittaisiin peruslaskutoimitusten (yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku)[1] lisäksi vain juurenottoa. Lukiolaisellekin tuttu esimerkki on toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisukaava $x = \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)/(2a)$. Myös kolmannen ja neljännen asteen yhtälöille löydettiin jo 1500-luvulla vastaavat yleiset ratkaisukaavat[2], jotka ovat teoreettisesti kiinnostavia, mutta sovelluksissa epäkäytännöllisiä. Nykyään tällaiset yhtälöt ratkaistaankin yleensä tietokoneilla käyttämällä numeerisia likiarvomenetelmiä. Viidennen asteen yhtälön yleistä ratkaisukaavaa etsittiin tarmokkaasti liki kolme vuosisataa,

---

[1] Kokonaislukupotenssiin korottaminen on kertolaskua.
[2] Gerolamo Cardanon (1501–1576) ja Lodovico Ferrarin (1522–1565) julkaisemina.

kunnes norjalainen Niels Henrik Abel todisti vuonna 1824, ettei sellaista ratkaisukaavaa ole mahdollista löytää. Sama koskee myös korkeamman asteen polynomiyhtälöitä.

Polynomiyhtälöiden ratkaisukaavat olivat sinällään mielenkiintoisia, mutta vielä tärkeämpää oli, että niitä etsittäessä jouduttiin avartamaan lukukäsitettä. Ihmiskunnan aamuhämärissä luvut olivat vain lukumääriä tarkoittavia positiivisia kokonaislukuja 1, 2, 3, …, jotka nykyterminologiassa muodostavat *luonnollisten lukujen* joukon $\mathbb{N}$. Lukukäsitteen myöhemmät laajennukset (nolla, negatiiviset luvut, murtoluvut, irrationaaliluvut) palvelivat aluksi käytännöllisiä tarpeita, mutta jälkiviisaasti voidaan ajatella, että niitä tarvittiin yhtälöiden ratkaisuiksi. Luku 0 tarvittiin yhtälön $x + 1 = 1$ ratkaisuksi. Samoin tarvittiin negatiivinen kokonaisluku yhtälön $x + 3 = 1$, murtoluku (eli rationaaliluku) yhtälön $3x = 5$ ja irrationaaliluku yhtälön $x^2 = 2$ ratkaisuiksi. Näin matemaatikoiden käyttämien lukujen joukko laajeni asteittain ketjussa $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, joista viimeinen reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ täyttää koko lukusuoran. Reaaliluku, kuten 7,41 tai $-5/13$ tai $6{,}03 \cdot 10^{23}$ tai $3\sqrt{2}$, ilmaisee suoralla olevan pisteen paikan eli *suunnan* ja *etäisyyden* suhteessa valittuun nollapisteeseen (origo) ja pituusyksikköön.

On helppo kirjoittaa yhtälö, esimerkiksi $x^2 + 1 = 0$, jolle ei löydy ratkaisua reaaliluvuistakaan. Eihän minkään luvun (reaaliluvun) neliö ole -1 eikä negatiivisella luvulla ole neliöjuurta! Tuollainen yhtälö oli saattanut tulla menneiden aikojen matemaatikoille mieleen ehkä ajatusleikkinä, mutta se oli hyödyttömänä tai jopa mielettömänä heitetty syrjään. Mutta edellä mainitut 1500-luvun italialaiset matemaatikot törmäsivät niihin kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden ratkaisukaavoja kehitellessään. Kaavoihin tuli vääjäämättä lausekkeita, joissa negatiivisesta reaaliluvusta oli otettava neliöjuuri. Tätä hämmentävää seikkaa yritettiin kiertää kekseliäillä viritelmillä, mutta 1700-luvulle tultaessa selvisi, että tehokkain menettely oli laajentaa luvun käsitettä reaaliluvuista kompleksilukuihin. Siinä missä reaaliluvut syntyvät yhdestä perusyksiköstä eli 1:stä, kompleksiluvut tarvitsevat kaksi perusyksikköä 1 ja i. Jälkimmäinen on ns. *imaginaariyksikkö*, jonka neliö on -1. Siis $1^2 = 1$ ja $i^2 = -1$. Näistä aineksista syntyvät kompleksiluvut yhdistelminä $z = x \cdot 1 + y \cdot i = x + yi$, joilla voidaan laskea aivan samoilla säännöillä kuin reaaliluvuillakin muistaen vain, että $i^2 = -1$. Kertoimet x ja y ovat reaalilukuja, jotka osoittavat määriä, siis sitä minkä verran kumpaakin yksikköä on kompleksiluvussa z. Niinpä z voidaankin havainnollistaa xy-koordinaattitason pisteeksi.

Tästä kompleksilukujen joukosta löytyy ratkaisu myös yhtälölle $x^2 + 1 = 0$ ja kaksikin nimittäin $x = \pm i$. Vuonna 1800 saksalainen Carl Friedrich Gauss (1777–1855) todisti *algebran peruslauseen*, jonka mukaan jokaiselle polynomiyhtälölle löytyy ratkaisu kompleksilukujen joukossa $\mathbb{C}$. Kompleksilukujen joukko eli *kompleksitaso* $\mathbb{C}$ on siis matemaattisesti täydellisempi kuin sen osajoukkona oleva reaalisuora $\mathbb{R}$. Kompleksiluvuista ja -funktioista tulikin 1800-luvulla matematiikan keskeinen alue ja seuraavalla vuosisadalla myös fysiikan (erityisesti kvanttimekaniikan) välttämätön ja tehokas työkalu.

Algebran peruslauseen myötä kompleksilukujoukosta $\mathbb{C}$ tulikin perinteisen lukukäsitteen kehityksen huipentuma ketjussa $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Kompleksiluvuilla laskettaessa ovat voimassa kaikki tavanomaiset laskusäännöt, jotka opitaan jo peruskoulussa. Matemaatikot tiivistävät tämän tosiasian käsitteeseen *kunta* (field). Lukujoukot $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$ ovat kaikki kuntia, joissa yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku toimivat täsmälleen samojen sääntöjen mukaan. (Lukujoukot $\mathbb{N}$ ja $\mathbb{Z}$ noudattavat myös samoja yhteen- ja kertolaskun sääntöjä, mutta kumpikaan ei ole suljettu jakolaskun suhteen eikä $\mathbb{N}$ vähennyslaskunkaan.)

Lukujoukkojen $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$ geometrinen havainnollistaminen reaalisuorana (x-akselina) ja kompleksitasona (xy-tasona) innosti kuitenkin Gaussin seuraajia pohtimaan mahdollisuutta laajentaa luvun käsitettä kolmiulotteiseen xyz-avaruuteen. Irlantilainen matemaatikko William Rowan Hamilton (1805–1865) ponnisteli pitkään ongelman kimpussa, kunnes hän 16.10.1843 sai kävelyretkellään kuuluisan oivalluksensa, että laajennus onkin tehtävä neliulotteiseen $txyz$-avaruuteen. Näitä neliulotteisia ”lukujaan” hän merkitsi kompleksilukujen tapaan $q = t \cdot 1 + x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k = t + xi + yj + zk$, missä 1 on reaaliyksikkö ja i, j, k ovat imaginaariyksiköitä ja kertoimet t, x, y, z ovat reaalilukuja. Hamilton antoi uusille ”luvuilleen” nimen *kvaternio* (quaternion)[1]. Hän onnistui määrittelemään laskusäännöt siten, että kvaternioilla laskeminen noudattaa tuttuja lukujen laskusääntöjä yhtä poikkeusta lukuun ottamatta: *kertolasku ei ole aina vaihdannainen*. Jos siis q_1 ja q_2 ovat kvaternioita, niin voi olla $q_1 q_2 \neq q_2 q_1$. Tulemme näkemään, että kvaternioiden kertolaskun ei-kommutatiivisuus liittyy läheisesti siihen tosiasiaan, että avaruuskappaleiden kierrot eri akseleiden suhteen eivät ole kommutatiivisia (vaihdannaisia).

[1] Gaussin muistikirjoista on myöhemmin selvinnyt, että hän oli löytänyt kvaterniot jo 1819, mutta ei ollut julkaissut löytöään. Ranskalainen pankkiiri ja matematiikan harrastaja Olinde Rodrigues (1795–1851) oli julkaissutkin jo 1840, siis kolme vuotta ennen Hamiltonia, artikkelin, jossa hän määritteli olennaisesti kvaternion käsitteen.

Hamilton kehitteli laajasti uutta kvaternioalgebraansa ja sovelsi sitä monille geometrian ja fysiikan aloille. Kuuluisat Maxwellin sähkömagnetismia kuvaavat yhtälötkin muotoiltiin aluksi kvaternioiden avulla, mutta 1800-luvun loppupuolella ne muokattiin nykyäänkin tunnetuiksi vektoriyhtälöiksi. Samalla kvaterniot alkoivat jäädä sivuun matematiikan ja fysiikan peruskalustosta. Uusi mielenkiinto niitä kohtaan heräsi 1990-luvulla tietokonegrafiikan harrastajien parissa. Kävi ilmi, että kvaternioiden avulla voidaan ohjelmoida näytöllä liikkuvia ja pyöriviä avaruuskappaleita. Sittemmin kvaterniot ovat tulleet mm. grafiikkaohjelmoinnin, konenäön, robotiikan, molekyylidynamiikan, kiderakenneanalyysin sekä ilmailu- ja avaruusnavigaation perustyökaluiksi.

Kvaternioiden ymmärtämiseen johtava polku käy kompleksilukujen kautta ja siksi tutustummekin aluksi niiden ominaisuuksiin. Kompleksiluvut ovat tietysti itsessäänkin mielenkiintoinen ja tärkeä matematiikan alue, jota ei yleensä lukiossakaan käsitellä. Tämän kirjasen ensimmäinen pääluku keskittyykin kompleksilukuihin. Aloitamme kertaamalla lyhyesti reaalilukujen perusominaisuudet, jotka ovat lähtökohtana kompleksilukujen ja kvaternioiden konstruoinnissa. Reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ muodostaa yhteen- ja kertolaskun suhteen *kunnaksi* (field) kutsutun laskennallisen eli *algebrallisen* toimintaympäristön, joka pyritään laajentamaan ensin kompleksilukujen joukkoon $\mathbb{C}$ ja sitten myös kvaternioiden joukkoon $\mathbb{H}$. Toinen pääluku keskittyy kvaternioihin ja huipentuu niiden ehkä tärkeimpään sovellukseen: avaruuskappaleiden kierron laskennalliseen hallintaan.

Tämän kirjasen esitystapa ei noudata tyypillistä matemaattisen tekstin rakennetta (määritelmä, lause, todistus). Asioissa edetään kertomuksen tapaan, esimerkkeihin tukeutuen, ja käsitteiden taustoja valotetaan useammastakin suunnasta. Tulokset pyritään kuitenkin perustelemaan riittävästi, vaikka formaaleja todistuksia ei juurikaan esitetä. Lukijalla oletetaan olevan peruskoulun ja lukion ensimmäisen vuoden antamat matemaattiset valmiudet.

Tervetuloa vaellusretkelle Hamiltonin kvaternioiden taikametsään!

KIITOKSET

Tämä kirjanen sai alkunsa Oulun Lyseon lukion matematiikan kerhon (lempinimeltään Galois-kerho) teemasta ”Mitä ovat kvaterniot?”, jota pohdiskelimme kerholaisten kanssa lukuvuonna 2018-2019. Kiitokset aktiivisille kerholaisille monista hyvistä kysymyksistä.

Galois-kerhon seniorijäsenet Esko Fabreus, Juhani Fiskaali, Eero Kettunen, Matti Lehtinen ja Timo Sankilampi lukivat tämän kirjasen luonnosversioita ja tekivät monia korjaus- ja parannusehdotuksia. Lämmin kiitos heille! Vastuu tekstiin jääneistä virheistä, puutteista tai epätarkkuuksista kuuluu kuitenkin yksinomaan minulle.

Erityiset kiitokset nuorille matematiikan harrastajille suunnatun verkkolehti Solmun päätoimittajalle Anne-Maria Ernvall-Hytöselle, joka hyväksyi tämän kirjasen julkaistavaksi Solmun oppimateriaalikansiossa (www.matematiikkalehtisolmu.fi).

Parhaat kiitokset Suomen Tietokirjailijat ry:lle, joka myönsi tätä kirjasta varten kesällä 2020 Lasten ja nuorten tietokirja-apurahan.

Oulussa, koronasyksynä 2020

Teuvo Laurinolli

1. REAALILUVUT JA KOMPLEKSILUVUT

1.1. Reaaliluvut

Luvun käsite on epäilemättä syntynyt kielen myötä käytännöllisestä tarpeesta ilmaista lukumääriä, etäisyyksiä, painoja jne. Kokonaislukujen ($\mathbb{N}$ tai $\mathbb{Z}$) lisäksi kehiteltiin jo varhain murtoluvut eli rationaaliluvut ($\mathbb{Q}$) kuvaamaan määriä, joihin mittayksikkö (kyynärä, unssi, tynnyrinala jne.) ei mene tasan. Rationaaliluvut tai niiden desimaaliversiot riittävät nykypäivänäkin käytännöllisessä toiminnassa ja tieteellisessä tutkimuksessakin kaupan, talouden, tekniikan, tieteen ym. aloilla. Rationaaliluvuilla on mahdollista ilmaista määriä mielivaltaisen tarkasti eli niin monen desimaalin tarkkuudella, että vaadittu virhemarginaali alitetaan.

Kuitenkin jo antiikin geometrikot huomasivat, että rationaaliluvut eivät riitä ilmaisemaan tarkasti kaikkien janojen pituuksien suhteita. Neliön lävistäjän ja sivun suhde $\sqrt{2}$ ei ole rationaaliluku. Vaikka rationaalipisteitä on matemaattisella lukusuoralla[1] mielivaltaisen tiheässä[2], niin niiden väliin jää aukkoja eli irrationaalipisteitä, joiden desimaaliesitykset ovat päättymättömiä ja jaksottomia. Myöhemmin 1800-luvun loppupuolella selvisi, että näitä irrationaalipisteitä onkin lukusuoralla enemmän kuin rationaalipisteitä. Rationaali- ja irrationaaliluvut muodostavat yhdessä aukottomasti jatkuvan reaalilukusuoran $\mathbb{R}$. Laskutoimitusten kannalta rationaali- ja irrationaaliluvut ovat kuitenkin samanlaisia eli niillä on samat algebralliset ominaisuudet. Tässä esityksessä keskitymmekin nimenomaan lukujen *algebrallisiin* ominaisuuksiin eikä reaalilukujen jaottelulla rationaalisiin ja irrationaalisiin ole silloin merkitystä.

Mitä sitten ovat reaalilukujoukon $\mathbb{R}$ algebralliset ominaisuudet? Lyhyesti sanottuna ne kertovat, miten reaaliluvuilla (siis joukon $\mathbb{R}$ jäsenillä eli alkioilla) lasketaan. Mitä laskutoimituksia voidaan tehdä ja millaisia sääntöjä ne noudattavat? Peruslaskutoimituksia

[1] Matemaattinen piste ja lukusuora ovat teoreettisia käsitteitä. Paperille piirretty tai näytölle tulostettu piste tai suora ovat niiden karkeita havainnollistuksia.

[2] On helppo todistaa, että jokaisella lukusuoran välillä – miten lyhyellä tahansa– on äärettömän monta rationaalipistettä.

on tunnetusti neljä: yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku. Voimme kuitenkin rajoittua tarkastelemaan vain kahta: *yhteenlaskua* ja *kertolaskua*, koska vähennyslasku ja jakolasku ovat niiden käänteisiä muotoja ja niitä koskevat säännöt seuraavat loogisesti yhteenlaskun $(+)$ ja kertolaskun $(\cdot)$ säännöistä. Sama pätee myös muihin laskutoimituksiin kuten potensseihin tai neliöjuuriin.

REAALILUKUJEN KUNNAN $\mathbb{R}$ LASKULAIT

Kaikilla $a, b, c \in \mathbb{R}$ ovat yhteen- ja kertolaskulle voimassa:

Kommutatiivisuus: $a + b = b + a$ ja $ab = ba$,
Assosiatiivisuus: $a + (b + c) = (a + b) + c$ ja $(ab)c = a(bc)$,
Distributiivisuus: $a(b + c) = ab + ac$,
Neutraalialkiot 0 ja 1: $a + 0 = a$ ja $a \cdot 1 = a$,
Käänteisalkiot $-a$ ja a^{-1}: $a + (-a) = 0$ ja $a \cdot a^{-1} = 1$, kun $a \neq 0$.

Lukukunnassa $\mathbb{R}$ on täsmälleen yksi yhteenlaskun neutraalialkio (nolla 0) ja täsmälleen yksi kertolaskun neutraalialkio (yksikkö 1) ja $0 \neq 1$.

Suomenkieliset vastineet:
kommutatiivisuus = *vaihdantalaki*,
assosiatiivisuus = *liitäntälaki*,
distributiivisuus = *osittelulaki*

Tätä alakoulusta tuttua algebrallista systeemiä, jossa edellä luetellut laskulait ovat voimassa, kutsutaan *lukukunnaksi* tai lyhyemmin *kunnaksi* (engl. *field*). Reaalilukujoukon $\mathbb{R}$ ohella toinen tuttu kunta on rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$, joka onkin kaikkien lukukuntien ”äiti”. Laajemmassa katsannossa kunnat voivat olla ”ulkomuodoltaan” hyvinkin erinäköisiä ja voivat muodostua erilaisista matemaattisista objekteista kuten esimerkiksi funktioista. Ne eivät välttämättä näytä lainkaan luvuilta, mutta niillä voidaan ”laskea” ja samat kunnan laskulait antavat mahdollisuuden käyttää alakoulussa opittuja rutiineja näiden objektien käsittelyssä.

1.2 Kompleksiluvut

Reaalilukujoukkoa $\mathbb{R}$ havainnollistetaan geometrisesti tutulla lukusuoralla.

KUVIO 1.2.1. Reaalilukusuora ja sen peruspisteet 0 ja 1.

Jokaista reaalilukua $x \in \mathbb{R}$ vastaa lukusuoran piste, jonka paikka määräytyy peruspisteiden avulla. Positiiviset reaaliluvut sijoittuvat origosta oikealle ja negatiiviset vasemmalle. Reaaliluvun x itseisarvo $|x|$ ilmaisee pisteen etäisyyden origosta eli nollapisteestä. Reaalilukujen laskutoimitukset voidaan tulkita geometrisesti siirtyminä lukusuoralla. Niinpä esimerkiksi pisteeseen $x_1 + x_2$ päästään siirtymällä nollapisteestä ensin x_1 askelta ja sitten x_2 askelta etumerkin osoittamaan suuntaan. Samaan tapaan voitaisiin periaatteessa (joskin epäkäytännöllisesti) toteuttaa muutkin laskutoimitukset geometrisesti lukusuoralla.

Edellä kuvattu ekvivalenssi suoran pisteiden ja reaalilukujoukon $\mathbb{R}$ välillä sai matemaatikot pohtimaan jo 1600 – 1700 -luvuilla analogista ekvivalenssia kaksiulotteisen tason pisteiden ja ”tasolukujen” välillä. Vastaus olikin käden ulottuvilla René Descartesin (1596 –1650) kehittelemässä analyyttisessä geometriassa. Siinähän tason piste esitetään reaalilukuparina (x, y) eli joukon $\mathbb{R}^2$ alkiona, joka ilmaisee pisteen paikan koordinaattien avulla. Kun suoran pisteet vastaavat reaalilukuja $x \in \mathbb{R}$, niin tason pisteet vastaavat reaalilukupareja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Edellä näimme, että reaaliluvut eli suoran pisteet muodostavat algebrallisen kunnan, jossa pätevät tehokkaan laskennan mahdollistavat laskusäännöt. Herää kysymys, voidaanko reaalilukupareille (x, y) eli tason pisteille rakentaa samanlainen algebra, jossa olisivat voimassa edellä esitetyt kunnan laskulait? Miten määrittelisimme lukuparien (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) yhteenlaskun ja kertolaskun sekä neutraalialkiot ja käänteisalkiot? Määrittelyjen tulisi myös olla lukusuoran $\mathbb{R}$ (eli x-akselin) orgaaninen laajennus siten, että ne antaisivat x-akselin pisteisiin $(x_1, 0)$ ja $(x_2, 0)$ sovellettuina samat tulokset kuin laskutoimitukset reaaliluvuille x_1 ja x_2.

Ehdotus tason $\mathbb{R}^2$ pisteiden yhteenlaskuksi: *suora summa*

Tuntuu luontevalta määritellä tason pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) yhteenlasku yksinkertaisesti niin, että x-koordinaatit ja y-koordinaatit lasketaan erikseen yhteen:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

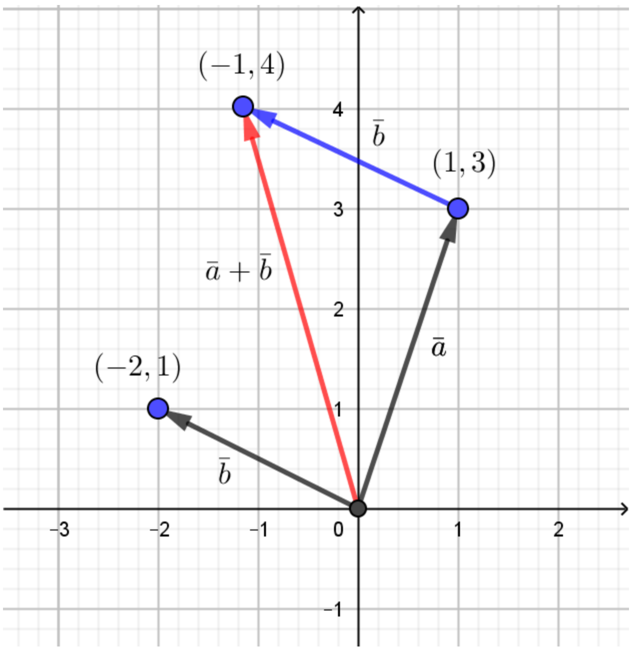
Tätä tason pisteiden yhteenlaskua voisi kutsua *suoraksi summaksi*. Se on selvästi kommutatiivinen. Lisäksi piste $(0,0)$ eli tason nollapiste täyttää yhteenlaskun neutraalialkion ehdon, sillä

$$(x, y) + (0,0) = (x + 0, y + 0) = (x, y).$$

Pisteen (x, y) käänteisalkio suoran summan suhteen[1] on selvästi piste $(-x, -y)$, koska

$$(x, y) + (-x, -y) = (x + (-x), y + (-y)) = (x - x, y - y) = (0,0).$$

Tällä tavoin määritelty tason pisteiden yhteenlasku on itse asiassa tuttua vektoreiden yhteenlaskua. Suora summa on siis sama kuin *vektorisumma*.



KUVIO 1.2.2. Tason pisteiden $(1,3)$ ja $(-2,1)$ suora summa vektorisummana $a + b$.

[1] Yhteenlaskun käänteisalkion tutumpi nimi on *vastaluku*.

Ensimmäinen ehdotus tason pisteiden kertolaskuksi: *suora tulo*

Taas tuntuu luontevalta määritellä tason pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kertolasku yksinkertaisesti niin, että x-koordinaatit ja y-koordinaatit kerrotaan erikseen eli:

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2).$$

Näin määritelty tason pisteiden *suora tulo* on selvästi kommutatiivinen ja lisäksi piste $(1,1)$ täyttäisi kertolaskun neutraalialkion ehdon, sillä

$$(x, y)(1,1) = (x, y).$$

Pisteen (x, y) käänteisalkioksi suoran tulon suhteen näyttäisi kelpaavan piste $(1/x\,, 1/y)$, koska

$$(x, y)(1/x\,, 1/y) = (1,1),$$

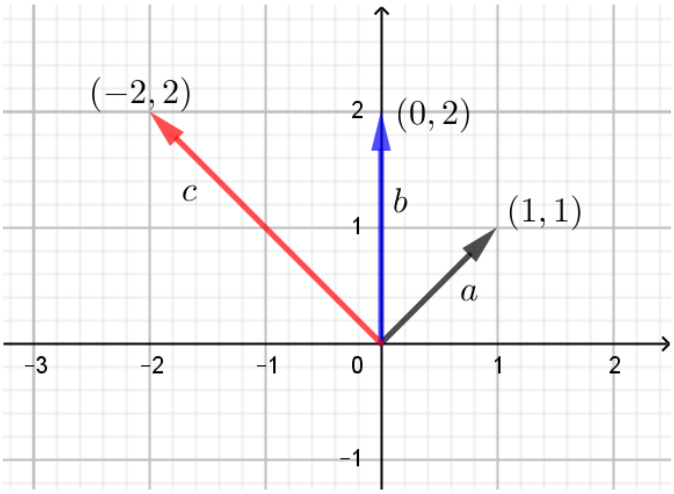
mutta silloin tason nollapisteen $(0,0)$ lisäksi olisi äärettömän monta tason pistettä $(0, y)$ tai $(x, 0)$, joilla ei olisi käänteisalkiota. Mutta kunnassa tulee olla *täsmälleen yksi nolla-alkio* (yhteenlaskun neutraalialkio), jolla ei ole kertolaskun käänteisalkiota eli käänteislukua. Jos siis määrittelemme kertolaskun suoraksi tuloksi, niin xy-tasosta $\mathbb{R}^2$ ei muodostu kuntaa. Tällaisen systeemin algebra menisi aika sekavaksi, koska jokainen tason piste (x, y) saataisiin kahden nolla-alkion $(x, 0)$ ja $(0, y)$ summana.

Parempi ehdotus tason pisteiden kertolaskuksi: *kiertotulo*

Asiaa pohtineet matemaatikot keksivät jo 1700-luvulla, että toimiva tason pisteiden kertolasku voidaan määritellä vektoreiden avulla samaan tapaan kuin yhteenlaskukin (KUVIO 1.2.6. alla) niin, että kaikki kunnan laskusäännöt täyttyvät. Esittelemme tämän paremman kertolaskun, *kiertotulon*, konkreettisen esimerkin avulla.

Esimerkki

Tarkastelemme xy-tason pisteitä $(1,1)$ ja $(0,2)$.



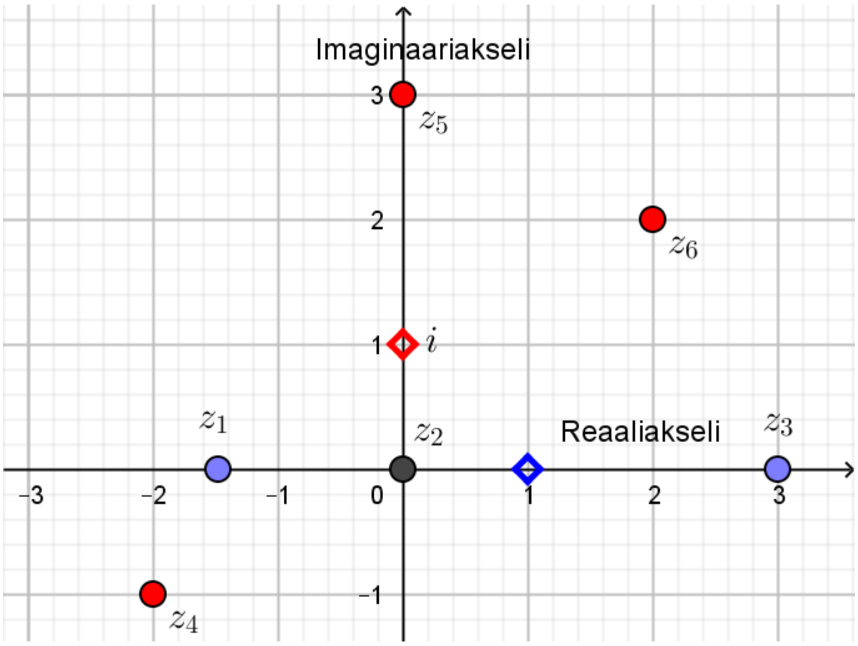
KUVIO 1.2.3. Tason pisteiden (1,1) ja (0,2) tulo on $(-2,2)$, Tulo on saatu pisteitä edustavien vektoreiden a ja b avulla seuraavasti. Ensiksi vektoreiden pituudet $|a| = \sqrt{2}$ ja $|b| = 2$ kerrotaan, jolloin saadaan $2\sqrt{2}$. Toiseksi niiden suuntakulmat[1] $\arg(a) = \pi/4$ ja $\arg(b) = \pi/2$ lasketaan yhteen, jolloin saadaan $3\pi/2$. Lopuksi piirretään vektori c, jonka pituus on $2\sqrt{2}$ ja suuntakulma on $3\pi/2$. Piste $(-2,2)$ on vektorin c osoittama piste, jota kutsumme pisteiden (1,1) ja (0,2) *kiertotuloksi*.

On kohtuullisen helppoa nähdä, että koordinaattitason pisteet (x, y) muodostavat kunnan edellä määriteltyjen laskutoimitusten (suora summa ja kiertotulo) suhteen. Molemmat laskutoimitukset ovat kommutatiivisia ja toteuttavat yhdessä distributiivisuusehdon. Yhteenlaskun (suora summa) neutraalialkio on nollapiste (0,0). Kertolaskun (kiertotulo) neutraalialkio on (1,0). Pisteen (x, y) käänteisalkio yhteenlaskun suhteen (eli vasta-alkio) on $(-x, -y)$. Pisteen (x, y) käänteisalkio kertolaskun suhteen saadaan vaihtamalla sitä edustavan vektorin pituus käänteisluvukseen ja suuntakulma vastaluvukseen. Tämä onnistuu kaikille pisteille lukuun ottamatta nollapistettä (0,0).

Voimme siis ajatella koordinaattitason pisteiden (x, y) joukkoa lukukuntana, jossa voimme operoida yhteen- ja kertolaskuja tuttujen laskusääntöjen mukaan. Erotukseksi reaaliluvuista x ja niiden muodostamasta reaalisuorasta $\mathbb{R}$ kutsumme tasopisteitä $z = (x, y)$ *kompleksiluvuiksi* ja niiden joukkoa *kompleksitasoksi* $\mathbb{C}$. Toteamme, että voimme samaistaa reaaliluvun x

[1] Merkintä $\arg(a)$ tarkoittaa vektorin a suuntakulmaa eli vektorin ja positiivisen x-akselin välistä kulmaa.

kompleksitason pisteen $(x, 0)$ kanssa, joten reaalilukujen muodostama lukusuora $\mathbb{R}$ on osa kompleksitasoa $\mathbb{C}$. Siis $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.



KUVIO 1.2.4. Kuusi kompleksilukua merkittynä kompleksitasoon: kolme *reaalilukua* (z_1, z_2, z_3) ja kolme *ei-reaalista* (z_4, z_5, z_6), joista yksi on *imaginaariluku* (z_5). Lisäksi on merkitty kompleksitason yksiköt: *reaaliyksikkö* 1 ja *imaginaariyksikkö* i.

Kompleksilukuja voidaan pukea moneen eri muotoon. Tarkastelemme nyt eri vaihtoehtoja.

Kompleksiluvun ***karteesinen muoto*** $z = (x, y)$

Kompleksiluvut ajatellaan xy-tason pisteinä, joten ne voidaan nimetä yksinkertaisesti koordinaattipareina[1] (x, y).
Kuviossa 1.2.5 reaalilukuja ovat kompleksiluvut $z_1 = (-1{,}5\ , 0)$, $z_2 = (0\ , 0)$, $z_3 = (3\ , 0)$. Ei-reaalisia ovat kompleksiluvut $z_4 = (-2\ , -1)$, $z_5 = (0\ , 3)$, $z_6 = (2\ , 2)$, joista yksi z_5 on imaginaariluku.
Kompleksiluvun z karteesinen muoto on siis sitä vastaavan tason pisteen koordinaattipari.
Kompleksitason yksiköiden karteesiset muodot ovat $1 = (1{,}0)$ ja $i = (0{,}1)$.

[1] Suorakulmaisia koordinaatteja x, y kutsutaan usein karteesisiksi (engl. *Cartesian*) ranskalaisen matemaatikon René Descartesin (1596–1650) mukaan.

Kompleksiluvun *algebrallinen muoto* $z = x + yi$

Algebrallisessa muodossa kompleksiluvut esitetään yksiköiden 1 ja i avulla. Jos kompleksiluvun z karteesinen muoto on $z = (x, y)$, niin sen *algebrallinen muoto* on

$$z = x + yi.$$

Perustelu:

Olkoon kompleksiluvun z karteesinen muoto $z = (x, y)$. Yhteenlaskun määritelmän mukaan on silloin $z = (x, 0) + (0, y)$. Mutta tässä $(x, 0)$ on reaaliakselilla oleva piste, siis reaaliluku, joten sievennämme sen tavanomaiseksi reaaliluvuksi x eli saamme

$$z = (x, 0) + (0, y) = x + (0, y).$$

Näemme myös, että kompleksilukujen kertolaskun määritelmän mukaan on

$$(0, y) = (y, 0)(0,1).$$

Miksi? Siksi, että ensimmäistä tekijää $(y, 0)$ osoittavan vektorin pituus on $|y|$ ja suuntakulma on 0 tai π riippuen y:n etumerkistä. Vastaavasti toista tekijää $(0,1)$ osoittavan vektorin pituus on 1 ja suuntakulma $\pi/2$. Silloin pituuksien tulo on $|y|$ ja suuntakulma on joko $\pi/2$ tai $3\pi/2$ riippuen y:n etumerkistä. Jos $y \geq 0$, niin kompleksituloa $(y, 0)(0,1)$ vastaa vektori, jonka pituus on $|y| = y$ ja suuntakulma $\pi/2$ eli vektori osoittaa pistettä $(0, y)$. Jos taas y on negatiivinen, niin tulovektorin pituus on $|y|$ ja suuntakulma $3\pi/2$ eli silloinkin kompleksituloa $(y, 0)(0,1)$ vastaava vektori osoittaa pistettä $(0, y)$.
Niinpä saamme

$$z = x + (y, 0)(0,1).$$

Mutta $(y, 0) = y$ ja $(0,1) = i$, joten

$$z = x + yi.$$

Huomautus. Kompleksiluvun algebrallinen muoto muistuttaa läheisesti tasokoordinaatiston origosta pisteeseen (x, y) piirretyn vektorin $\boldsymbol{a}$ esitysmuotoa $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$, missä $\boldsymbol{i}$ ja $\boldsymbol{j}$ ovat kantavektoreita $\boldsymbol{i} = (1,0)$ ja $\boldsymbol{j} = (0,1)$. Tästä voi syntyä sekaannustakin, koska kompleksitason imaginaariyksikkö i tarkoittaa juuri samaa pistettä, johon kantavektori $\boldsymbol{j}$ osoittaa[1]. Huomaa myös, että imaginaariyksikön symbolia i ei lihavoida vektoreiden tapaan. Tällä menettelyllä korostetaan, että i ajatellaan ensisijaisesti lukuna.

Kertolasku algebrallisen muodon avulla.

Kompleksilukujen laskutoimitukset sujuvat yleensä kätevimmin algebrallisen muodon avulla. Esimerkiksi kompleksilukujen $z_1 = (2,5)$ ja $z_2 = (3,1)$ tulon laskeminen olisi aika työlästä kuviossa 1.2.4 esitetyllä tavalla eli kertomalla pisteitä vastaavien vektoreiden pituudet ja laskemalla suuntakulmat yhteen. Mutta kirjoittamalla nämä kompleksiluvut algebralliseen muotoon $z_1 = 2 + 5i$ ja $z_2 = 3 + i$ voimme (koska kyseessä on kunta) kertoa ne tavalliseen tapaan termeittäin ja saamme

$$z_1 z_2 = (2 + 5i)(3 + i) = 6 + 2i + 15i + 5i^2 = 6 + 17i + 5i^2.$$

Mutta imaginaariyksikön neliö i^2 eli tulo $ii = (0,1)(0,1)$ on helppo päätellä geometrisesti kiertotulon määritelmästä. Kummankin tekijävektorin i pituus on 1 ja suuntakulma on $\pi/2$. Pituuksien tulo on siis 1 ja suuntakulmien summa on π. Neliötä i^2 vastaava piste on siis 1 yksikön päässä origosta suunnassa $\pi = 180°$ eli $i^2 = (-1,0)$ eli reaaliluku -1. Niinpä saamme tulon $z_1 z_2$ algebrallisessa muodossa

$$z_1 z_2 = 6 + 17i + 5i^2 = 6 + 17i - 5 = 1 + 17i.$$

Kompleksitason pisteiden (2,5) ja (3,1) kiertotulo on siis (1,17).

Tätä esimerkkiä mukaillen voit helposti todistaa algebrallisessa muodossa annettujen kompleksilukujen $z_1 = x_1 + y_1 i$ ja $z_2 = x_2 + y_2 i$ kertolaskukaavan

$$z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i.$$

[1] Muutamat oppikirjat merkitsevätkin sekaannuksen välttämiseksi kompleksitason imaginaariyksikköä symbolilla j.

Tätä ei kuitenkaan kannata opetella ulkoa, sillä kertominen sujuu helpommin tavanomaisilla (kunnan) laskusäännöillä edellä lasketun esimerkin tapaan muistaen vain, että $i^2 = -1$.

Kertolaskukaavan voi tietysti kirjoittaa karteesisessa muodossakin:

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2\,, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Kompleksiluvun korottaminen potenssiin algebrallisen muodon avulla

Kokonaislukupotenssit ovat toistettua kertolaskua, joten ne sujuvat edellä esitetyllä tavalla. Esimerkiksi kompleksiluvun $z = 2 - 3i$ kuutio on

$$\begin{aligned} z^3 &= (2-3i)(2-3i)(2-3i) \\ &= (4 - 12i + 9i^2)(2-3i) \\ &= (-5-12i)(2-3i) \\ &= -10 - 9i + 36i^2 \\ &= -46 - 9i. \end{aligned}$$

Samaan tulokseen päästään hieman nopeammin sijoittamalla binomikaavaan

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^3 + b^3$$

arvot $a = 2$ ja $b = -3i$ ja huomaamalla, että $i^3 = -i$. Binomikaava, kuten muutkin tutut algebran kaavat, ovat voimassa kompleksiluvuillekin, koska ne muodostavat kunnan.

Kompleksilukujen jakolasku algebrallisen muodon avulla

Jakolasku eli kertolaskun käänteistoimitus vaatii hieman sorminäppäryyttä. Esimerkkinä olkoon osamäärän $q = z_1/z_2$ laskeminen, kun jaettava on $z_1 = 1 - i$ ja jakaja on $z_2 = 3 + 4i$.

Aloitamme laventamalla osamäärän jakajan $3 + 4i$ *liittoluvulla* $3 - 4i$

$$q = \frac{z_1}{z_2} = \frac{1-i}{3+4i} = \frac{(1-i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}\,.$$

Jatkamme suorittamalla kertolaskut jakoviivan yläpuolella

$$(1-i)(3-4i) = 3-4i-3i+i(4i) = 3-7i-4 = -1-7i$$

ja alapuolella käyttämällä tuttua kaavaa $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$(3+4i)(3-4i) = 3^2 - (4i)^2 = 9 + 16 = 25.$$

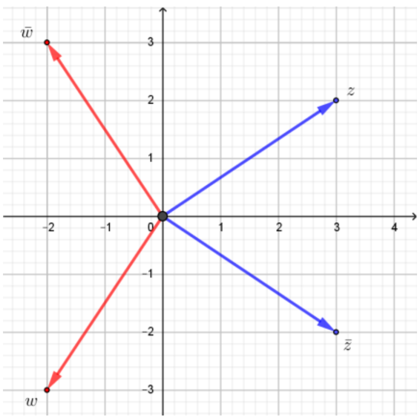
Näin saamme osamäärän q algebrallisessa muodossa olevana kompleksilukuna

$$q = \frac{z_1}{z_2} = \frac{-1-7i}{25} = -\frac{1}{25} - \frac{7}{25}i = -\frac{1}{25}(1+7i)$$

Tuloksen oikeellisuuden voi varmistaa kertomalla saadun osamäärän jakajalla $z_2 = 3 + 4i$

$$qz_2 = -\frac{1}{25}(1+7i)(3+4i) = -\frac{1}{25}(3+4i+21i-28) = -\frac{1}{25}(-25+25i) = 1 - i = z_1.$$

Jakolaskussa tarvittava niksi on siis laventaminen jakajan $x + yi$ liittoluvulla $x - yi$, jolloin jakajaksi tulee $(x+yi)(x-yi) = x^2 + y^2$ eli reaaliluku. Kompleksitasossa liittolukuja $z = x + yi$ ja $\bar{z} = x - yi$ vastaavat pisteet ovat aina toistensa peilikuvia reaaliakselin (x-akselin) suhteen. Liittolukujen reaaliosat ovat samat (x) ja imaginaariosat ovat vastalukuja (yi ja $-yi$). Liittolukujen summa $2x$ ja tulo $x^2 + y^2$ ovat aina reaalilukuja.



KUVIO 1.2.5. Kompleksiluvut z ja w sekä niiden liittoluvut $\bar{z}$ ja $\bar{w}$ vektoreina.

Huomautus. Kompleksilukujen jakolasku voidaan tulkita kertolaskun tapaan xy-koordinaattitason pisteiden (tai niitä osoittavien vektoreiden) välisenä operaationa, jossa vektoreiden pituudet *jaetaan* ja suuntakulmat *vähennetään*.

Äskeisen esimerkkijakolaskun [jaa piste $1 - i = (1, -1)$ pisteellä $3 + 4i = (3, 4)$] suorittaminen tällä tavoin olisi kuitenkin hankalaa. Algebrallista muotoa käyttämällä selvisi melko vaivattomasti, että osamäärää vastaava tason piste on $(-1/25, -7/25)$.

Kompleksilukujen käsittely laskimella. Monilla laskimilla ja laskentasovelluksilla on mahdollista suorittaa kompleksilukuoperaatioita ja niihin voi syöttää kompleksilukuja algebrallisessa muodossa.

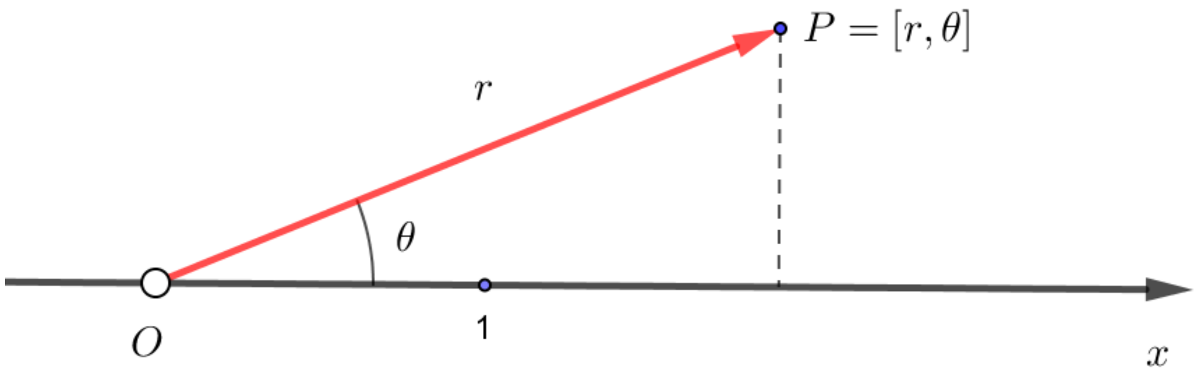
Kompleksiluvun itseisarvo. Kompleksiluvun z itseisarvo $|z|$ ilmaisee lukua vastaavan lukutason pisteen etäisyyden origosta. Algebrallisessa muodossa annetun kompleksiluvun $z = x + yi$ itseisarvo on siis Pythagoraan lauseen perusteella $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Jos kompleksiluku z sattuu reaaliakselille ($y = 0$), niin $|z| = |x + 0i| = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|$ eli vanha tuttu reaaliluvun itseisarvo. Reaaliluvulle x on tietysti aina voimassa $|x| \geq 0$ ja sama pätee kaikille kompleksiluvuille: $|z| \geq 0$.

Yksiköt. Kompleksilukua u, jonka itseisarvo $|u| = 1$ kutsutaan *yksiköksi*. Kaikki origokeskisen yksikköympyrän kehälle sijoittuvat kompleksiluvut ovat yksiköitä. Niitä on siis äärettömän monta. Niistä kaksi on reaalilukuja, 1 ja -1, ja kaksi imaginaarilukuja i ja $-i$.
Jos kompleksiluku z kerrotaan yksiköllä u, niin saadun tulon uz itseisarvo $|uz| = |z|$. Tulo uz on siis kompleksitasossa samalla etäisyydellä origosta kuin z, mutta mahdollisesti eri suunnassa. Jos yksikön u oma suuntakulma on φ, niin tällä yksiköllä kertominen kiertää kerrottavaa lukua origon ympäri kulman φ verran.

1.3. Kompleksiluvun trigonometrinen esitys

Edellisessä luvussa 1.2 määrittelimme yhteenlaskun ja kertolaskun *lukutason* (xy-koordinaattitason) pisteille siten, että tutut *lukusuoran* (x-akselin) pisteiden laskusäännöt säilyivät samoina. Näin saatoimme ryhtyä laskemaan tason pisteillä, jotka nimitimme *kompleksiluvuiksi* samoin kuin aiemmin lukusuoran pisteet on nimitetty *reaaliluvuiksi*. Molemmat lukujoukot $\mathbb{C}$ ja $\mathbb{R}$ muodostavat algebrallisen *kunnan* eli noudattavat samoja laskusääntöjä. Totesimme, että kompleksilukujen laskutoimitukset voidaan suorittaa tason pisteiden karteesisen koordinaattiesityksen (x, y) tai – huomattavasti helpommin – algebrallisen esityksen $x + yi$ avulla. Molemmat esitystavat tukeutuvat tason suorakulmaiseen koordinaatistoon.

Tässä luvussa tutustumme kolmanteen tapaan organisoida kompleksiluvuilla laskeminen. Tämä laskutapa perustuu *napakoordinaatistoon*, jonka avulla tason pisteet voidaan yksilöidä alla olevan kuvion mukaisesti.



KUVIO 1.3.1. Tason napakoordinaatisto: origo O (nollapiste) ja lukusuora (x-akseli). Tason pisteen $P = [r, \theta]$ napakoordinaatit ovat etäisyys origosta eli *napasäde* r ja *suuntakulma* θ (theta). Kuvion tilanteessa on $r = \sqrt{2} \approx 1{,}4$ ja $\theta = \pi/6 = 30°$. Huomaa, että suuntakulma ei ole yksikäsitteinen, sillä monet kulmat kuten $\theta = 13\pi/6 = 390° = 360° + 30°$ tai vaikkapa $\theta = -11\pi/6 = -330°$ kelpaisivat pisteen P suuntakulmaksi.

Osoitamme pisteen napakoordinaatit hakasulkeilla $P = [r, \theta]$ erotukseksi suorakulmaisista koordinaateista $P = (x, y)$.

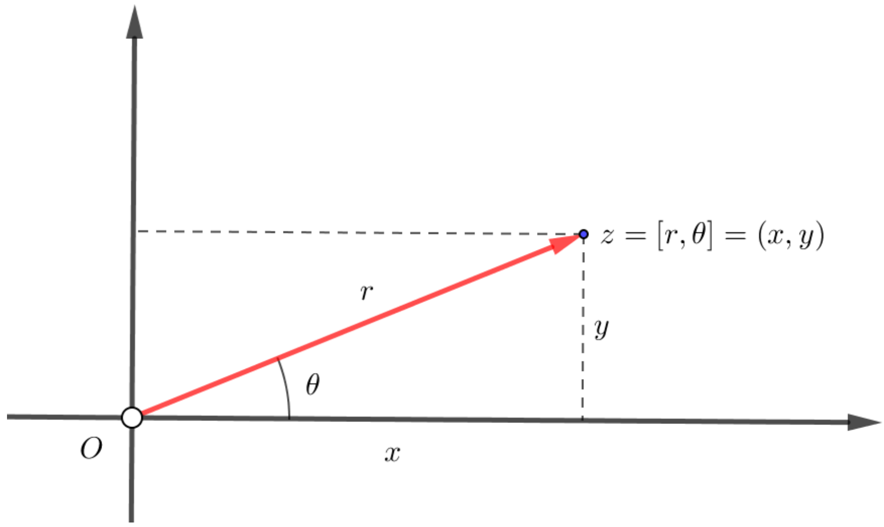
Itse asiassa me käytimmekin jo napakoordinaatteja, kun määrittelimme tason pisteille toimivan kompleksitulon (kiertotulon). Sehän saatiin kertomalla pisteiden napasäteet ja laskemalla suuntakulmat yhteen. Jos siis kompleksilukujen z_1 ja z_2 napakoordinaattiesitykset[1] ovat $z_1 = [r_1, \theta_1]$ ja $z_2 = [r_2, \theta_2]$, niin tulo $z_1 z_2 = [r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2]$. Toisaalta summan $z_1 + z_2$ laskeminen napakoordinaateilla on hankalaa, mutta suorakulmaisilla koordinaateilla helppoa:

[1] polaariset muodot (engl. *polar forms*)

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Kompleksiluvun trigonometrinen esitys.

Kompleksilukujen eri esitysmuodot voidaan kätevästi yhdistää sini- ja kosinifunktioiden avulla.



KUVIO 1.3.2. Kompleksiluvun z napakoordinaatit $[r, \theta]$ ja suorakulmaiset koordinaatit (x, y).

Kuviosta näemme, että $x = r\cos\theta$ ja $y = r\sin\theta$, joten kompleksiluvun z algebrallinen muoto voidaan ilmaista napakoordinaattien avulla

$$z = x + yi = r\cos\theta + r\sin\theta \cdot i = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Näin saamme kompleksiluvun *trigonometrisen* muodon

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

jossa yhdistyvät algebrallinen ja polaarinen esitysmuoto.

Esimerkki.

Kompleksilukua z vastaava tason piste on kahden yksikön etäisyydellä origosta suunnassa $2\pi/3$ (120°). Määritä z:n algebrallinen muoto.

Annettujen tietojen ($r = 2$ ja $\theta = 2\pi/3$) avulla voimme kirjoittaa z:n trigonometrisen muodon ja sieventää sen algebralliseksi muodoksi.

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$$

$$= 2(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= -1 + i\sqrt{3}.$$

Kysytty algebrallinen muoto on $z = -1 + i\sqrt{3}$.

Esimerkki.
Kirjoita kompleksiluku **(a)** $z = 1 - i$, **(b)** $z = 3 + 4i$ trigonometrisessa muodossa.

(**a**) Kompleksilukua $z = 1 - i$ vastaava tason piste on $(1, -1)$, jonka napasäde eli etäisyys origosta on $r = \sqrt{2}$ ja suuntakulma $\theta = -45° = -\pi/4$. Kysytty trigonometrinen muoto on

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

eli

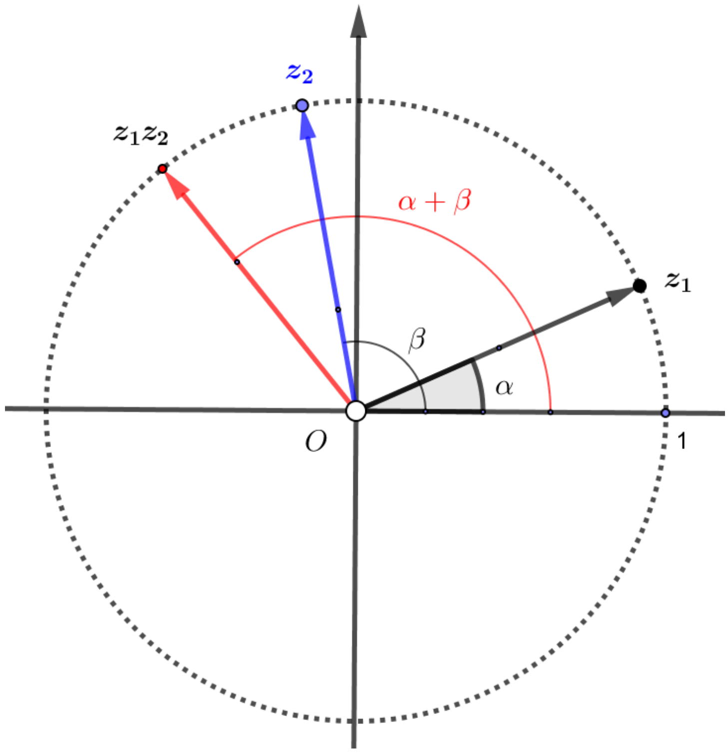
$$z = \sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})\right].$$

(**b**) Kompleksilukua $z = 3 + 4i$ vastaava tason piste on $(3, 4)$, jonka napasäde eli etäisyys origosta on $r = 5$.
Kuviosta 1.3.2 yllä näemme, että suuntakulman tangentti $\tan\theta = y/x = 4/3$, josta saamme $\theta = \arctan(4/3)$ ja laskimen avulla likiarvon $\theta \approx 59°$ (tai $\theta \approx 0{,}93$ rad).

Kysytty trigonometrinen muoto on likimäärin

$$z \approx 5(\cos 59° + i\sin 59°).$$

Huomautus. Kompleksiluvun trigonometrisen muodon $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avulla voi näppärästi johtaa perinteisiä trigonometrian kaavoja. Esimerkiksi summakulman $\alpha + \beta$ sini ja kosini saadaan tarkastelemalla origokeskisellä yksikköympyrällä suunnissa α ja β olevia pisteitä $z_1 = 1(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha$ ja $z_2 = 1(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos\beta + i\sin\beta$.



KUVIO 1.3.3. Yksikkökompleksilukuja $z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$ ja $z_2 = \cos\beta + i\sin\beta$ sekä niiden tuloa $z_1z_2 = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$ vastaavat pisteet ovat origokeskisen yksikköympyrän kehällä.

Yllä olevasta kuviosta näemme välittömästi, että

(1) $$z_1z_2 = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta),$$

mutta voimme laskea saman tulon myös algebrallisella kertolaskulla

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta + i^2\sin\alpha\sin\beta \\ &= \cos\alpha\cos\beta + i\,(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) - \sin\alpha\sin\beta, \\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i\,(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) \end{aligned}$$

joten saamme

(2) $$z_1z_2 = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i\,(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta).$$

Mutta (1) ja (2) ovat saman kompleksiluvun $z_1 z_2$ esityksiä. Niiden reaaliosat ja imaginaariosat ovat siis keskenään samat, joten

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

jotka ovat tutut taulukkokirjasta löytyvät summakulman sinin ja kosinin kaavat.

1.4. Eulerin kaava ja kompleksiluvun eksponenttimuoto

Eräs kaikkien aikojen monipuolisimmista matemaatikoista oli Baselissa syntynyt Leonhard Euler (1707–1783). Hän keksi merkittävän sukulaisuuden trigonometristen funktioiden[1] ($\cos x$, $\sin x$) ja eksponenttifunktion (e^x) kesken.

Aluksi muutama sana yhden reaalilukumuuttujan funktioista $f(x)$. Tutuimpia niistä ovat *polynomifunktiot* kuten $f(x) = 2x + 5$ tai $f(x) = x^3 - 11x^2 + 1/3$, joiden arvoja voidaan laskea tavallisilla (kunnan) laskutoimituksilla. Sama koskee myös *murtofunktioita* eli polynomien osamääriä kuten

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{tai} \quad f(x) = \frac{7x^2+3}{3x-1},$$

vaikka laskutoimitukset ovat hieman työläämpiä kuin polynomeilla. Mutta miten voimme laskea vielä eksoottisempien funktioiden kuten

$$f(x) = \sqrt{x}\,,\ f(x) = \cos x\,,\ f(x) = \sin x\,,\ f(x) = e^x$$

arvoja muuttujan x eri arvoilla. Tietysti laskimella! Aivan, mutta miten laskin sen tekee, kun sekin viime kädessä osaa vain peruslaskutoimitukset?

Englantilainen matemaatikko Brook Taylor esitti vuonna 1715 menetelmän, jonka avulla lähes minkä tahansa funktion arvojen laskeminen voidaan palauttaa polynomin arvojen

[1] Suorakulmaisista kolmioista johdettuja trigonometrisia funktioita kutsutaan usein – ehkä osuvamminkin – ympyräfunktioiksi (engl. *circular functions*)

laskemiseksi. Tätä menetelmää – *Taylorin sarjaa* – Euler ja monet muut kehittivät edelleen ja sovelsivat funktioiden tutkimukseen.

Funktion $f(x)$ Taylorin sarja voidaan ajatella polynomiksi, jossa on äärettömän monta termiä.

Esimerkki.
Konstruoimme murtofunktion

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Taylorin sarjan muokkaamalla sen lauseketta ensin seuraavasti

$$f = \frac{1}{1-x} = \frac{(1-x)+x}{1-x} = 1 + x \cdot \frac{1}{1-x} = 1 + xf\ ,$$

missä $f(x)$ on lyhennetty muotoon f. Näin saimme *rekursiokaavan* $f = 1 + xf$, jossa funktio f on esitetty itsensä avulla. Käytämme nyt tätä kaavaa toistuvasti saadaksemme funktion muistuttamaan polynomia.

$$\begin{aligned} f &= 1 + xf = 1 + x(1 + xf) \\ &= 1 + x + x^2 f = 1 + x + x^2(1 + xf) \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 f = 1 + x + x^2 + x^3(1 + xf) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Tätä rekursiota voidaan jatkaa mielivaltaisen pitkälle, jolloin saamme funktiolle $f(x)$ sarjaesityksiä

(1) $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x},$$

jossa n on positiivinen kokonaisluku, kuinka suuri tahansa.

Mielenkiintoinen tilanne syntyy, jos rajoitamme muuttujan x arvot välille $-1 < x < 1$. Silloinhan potenssin x^{n+1} arvo lähenee nollaa, kun $n \to \infty$ ja yhtälön (1):n oikealle puolelle kehkeytyy päättymätön summa $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$ ja viimeinen termi häviää. Saamme tuloksen

(2) $$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k,$$

missä päättymätön summa on esitetty ns. sigmamerkinnällä.

Näin olemme saaneet murtofunktiolle $f(x)$ polynominkaltaisen esityksen potenssitermien x^k päättymättömänä summana eli *Taylorin sarjana*. Saadun sarjaesityksen pätevyysalue eli *suppenemisalue* on väli $-1 < x < 1$. Tuon välin ulkopuolella sarja ei toimi – se ei suppene – vaan *hajaantuu* (eli osasumma $S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ ei lähene mitään äärellistä arvoa, kun $x \to \infty$).

Huomautus 1. Funktion Taylorin sarjan muodostamiseen on kehitetty systemaattisia differentiaalilaskentaan perustuvia menetelmiä, jotka esitellään yliopisto-opintojen alkuvaiheessa. Niihin emme tässä puutu. Edellisen esimerkin rekursiomenetelmä ei ole helposti yleistettävissä. (Tarkkaavainen lukija ehkä huomasi, että esimerkin sarja olisi myös saatu lukiomatematiikassa kohdatun päättymättömän geometrisen sarjan summakaavan avulla.)

Huomautus 2. Edellisen esimerkin funktion $f(x) = 1/(1-x)$ potenssisarjaa voi testata numeerisilla laskuilla. Valitaanpa sarjan (2) pätevyysalueelta muuttujan arvo $x = 0{,}5$, jolle funktion tarkka arvo on $f(0{,}5) = 2$. Jos otamme sarjasta mukaan termit potenssiin x^5 saakka, niin tulos on 1,96875. Jos jatkamme potenssiin x^{10} saakka, niin tulos on 1,99902, jossa virhettä on vain 0,05 prosenttia.

Funktioiden potenssisarjat.

Funktioiden esittäminen muuttujan potenssien päättymättöminä sarjoina oli arkipäivää 1700-luvulla. Tiedossa oli, että eksponenttifunktio ja trigonometriset funktiot voitiin esittää seuraavina Taylorin sarjoina ja että nämä sarjat suppenevat *kaikilla* reaalilukuarvoilla x

$$\text{(E1)} \qquad e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k\,,$$

$$\text{(E2)} \qquad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^k\,,$$

$$\text{(E3)} \qquad \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^k\,.$$

Sarja (E1) on eksponenttifunktion $f(x) = e^x$ sarjakehitelmä. Kantaluku $e \approx 2{,}718$ on ns. Neperin luku. Funktiota e^x voi kutsua kaikkien eksponenttifunktioiden ”äidiksi”, koska sillä on monia hienoja ominaisuuksia kuten tämä siisti sarjakehitelmäkin.

Sarjat (E2) ja (E3) antavat sini- ja kosinifunktion arvot kulmalle x, kun kulmanyksikkönä on radiaani ($180° = \pi$ radiaania). Vaikka emme tässä perustele näitä sarjoja, niin voimme tehdä pieniä pistokokeita testataksemme niiden pätevyyttä. Otetaan esimerkiksi kosinisarja (E2) ja kulma $x = 60° = \pi/3$ radiaania. Tiedämme, että $\cos(\pi/3) = 1/2 = 0{,}5$. Jos otamme kosinisarjasta kolme ensimmäistä termiä, saamme likiarvon

$$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 = 1 - \frac{1}{2}(\pi/3)^2 + \frac{1}{24}(\pi/3)^4 \approx 0{,}50180,$$

joka on jo aika hyvä likiarvo $\cos(\pi/3)$:lle. Neljä ensimmäistä termiä antaa

$$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 \approx 0{,}49997,$$

jossa virhettä on 0,007 prosenttia.

Kosinisarja suppenee siis nopeasti kohti oikeata arvoa ja sama pätee myös sinisarjalle (E3) ja eksponenttifunktion sarjalle (E1). Laskimet itse asiassa käyttävätkin tällaisia sarjoja tämän tyyppisten funktioiden arvojen laskemiseen.

Eulerin oivallus.

Euler päätti kokeilla, mitä saadaan, jos sarjassa (E1) sijoitetaan reaalimuuttujan x paikalle kompleksimuuttuja z. Sarjan termien laskeminenhan vaatii vain neljää (kunnan) peruslaskutoimitusta ja nehän toimivat kompleksiluvuilla yhtä hyvin kuin reaaliluvuillakin.

Hän huomasi erityisesti, että sijoittamalla eksponenttifunktion sarjaan (E1) reaalimuuttujan x paikalle ix saadaan mielenkiintoinen tulos

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{1}{2}(ix)^2 + \frac{1}{6}(ix)^3 + \frac{1}{24}(ix)^4 + \frac{1}{120}(ix)^5 + \frac{1}{720}(ix)^6 + \frac{1}{5040}(ix)^7 + \cdots$$

$$= 1 + ix - \frac{1}{2}x^2 - i\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + i\frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{720}x^6 - i\frac{1}{5040}x^7 + \cdots,$$

missä alempi rivi on saatu laskemalla (ix):n potenssit

$$(ix)^2 = i^2x^2 = -1x^2 = -x^2,$$

$$(ix)^3 = i^3x^3 = i^2ix^3 = -ix^3,$$

$$(ix)^4 = i^4x^4 = i^2i^2x^4 = (-1)(-1)x^4 = x^4,$$

jne.

Saadussa sarjassa joka toinen termi on reaaliluku ja joka toinen imaginaariluku.

Jos reaaliset termit kerätään yhteen ja vastaavasti imaginaariset, niin saadaan

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + -\cdots\right) + i\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \cdots\right).$$

Näemme, että sulkeissa olevat sarjat ovat täsmälleen funktioiden $\cos x$ ja $\sin x$ sarjakehitelmät (E2) ja (E3). Saamme siis tuloksen

(**Eulerin kaava**) $$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

missä x on reaaliluku.

Kaavasta seuraa sijoittamalla $x = \pi$

(**Eulerin yht**älö) $$e^{i\pi} = -1,$$

jota joskus kutsutaan matematiikan kauneimmaksi yhtälöksi.

Huomautus. Edellä esitetty Eulerin kaavan johtaminen on kokeilevaa ideointia, joka ei täytä matemaattisen todistuksen vaatimuksia. Epäilystä herättää esimerkiksi se, että voidaanko päättymättömän sarjan termejä vapaasti ryhmitellä esitetyllä tavalla niin, että sarjan summa säilyy muuttumattomana. Kaavan sitovat perustelut on kuitenkin esitetty jo 1800-luvulla.

Kompleksiluvun eksponenttimuoto.

Kompleksiluvun trigonometrinen esitys $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ voidaan Eulerin kaavan avulla muokata muotoon, joka on laskennallisesti hyödyllinen. Jos vaihdamme reaalimuuttujan x suuntakulmaan viittaavalla symbolilla θ, niin Eulerin kaava saa muodon

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

ja kompleksiluvun z trigonometrinen esitys voidaan kirjoittaa muotoon

$$z = re^{i\theta},$$

jota kutsumme kompleksiluvun z *eksponenttimuodoksi*.

Kompleksilukulaskut voi suorittaa eksponenttimuotoa käyttäen lähes yhtä kätevästi kuin algebrallisella muodolla.

Huomautus 1. Eksponenttimuotoiset kompleksiluvut $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ ja $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ ovat samat täsmälleen silloin, kun niiden napasäteet ovat samat ($r_1 = r_2$) ja suuntakulmat osoittavat samaan suuntaan (erotus $|\theta_1 - \theta_2|$ on täyden kulman $2\pi = 360°$ kokonainen monikerta).

Siis esimerkiksi eksponenttimuodot $z_1 = 3e^{i\pi}$, $z_2 = 3e^{5i\pi}$ ja $z_3 = 3e^{-i\pi}$ tarkoittavat täsmälleen samaa kompleksitason pistettä $(-3, 0)$ eli reaalilukua -3.

Vastaavasti eksponenttimuodot $w_1 = 2e^{i\pi/2}$, $w_2 = 2e^{5i\pi/2}$ ja $w_3 = 2e^{-3i\pi/2}$ tarkoittavat täsmälleen samaa kompleksitason pistettä $(0, -2)$ eli imaginaarilukua $2i$.

Vielä eksponenttimuodot $u_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, $u_2 = \sqrt{2}e^{9i\pi/4}$ ja $u_3 = \sqrt{2}e^{-7i\pi/4}$ tarkoittavat täsmälleen samaa kompleksitason pistettä $(1, 1)$ eli kompleksilukua $1 + i$.

Huomautus 2. Muoto $-2e^{i\theta}$ ei ole eksponenttimuoto eikä se tarkoita mitään kompleksitason pistettä. Kompleksiluvun eksponenttimuodossa $z = re^{i\theta}$ esiintyvä napasäde r on aina positiivinen tai nolla (origolle).

Esimerkki.

Olkoon z tason pistettä $(-2, 2)$ vastaava kompleksiluku $z = -2 + 2i$.

Laske z:n **(a)** käänteisluku, **(b)** kuutio käyttäen algebrallista muotoa ja eksponenttimuotoa.

Algebrallista muotoa käyttäen:

(**a**) Koska $z = -2 + 2i$, niin saamme laventamalla liittoluvulla $\bar{z} = -2 - 2i$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{-2+2i} = \frac{-2-2i}{(-2+2i)(-2-2i)} = \frac{-2-2i}{4+4} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i\ .$$

(**b**) $z^3 = (-2+2i)^3 = 2^3(-1+i)^3 = 8[(-1)^3 + 3(-1)^2 i + 3(-1)i^2 + i^3] = 16 - 16i$

Eksponenttimuotoa käyttäen:

(**a**) Piirtämällä (tai kuvittelemalla) pisteen koordinaatistoon näemme, että z:n napasäde (itseisarvo) on $r = |z| = 2\sqrt{2}$ ja suuntakulma on $\theta = \arg(z) = 135° = 3\pi/4$.

Kompleksiluvun eksponenttimuoto on siis

$$z = re^{i\theta} = 2\sqrt{2}\, e^{i(3\pi/4)}$$

ja sen käänteisluku on

$$z^{-1} = (re^{i\theta})^{-1} = r^{-1}(e^{i\theta})^{-1} = r^{-1}e^{-i\theta} = \frac{1}{r}e^{i(-\theta)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{i(-3\pi/4)},$$

joka voidaan sieventää Eulerin kaavan avulla algebralliseen muotoon

$$z^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{i(-3\pi/4)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}[\cos(-3\pi/4) + i\sin(-3\pi/4)] = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i,$$

(**b**) $z^3 = (re^{i\theta})^3 = r^3(e^{i\theta})^3 = r^3e^{3i\theta} = \left(2\sqrt{2}\right)^3 e^{3i(-3\pi/4)} = \left(2\sqrt{2}\right)^3 e^{i(-9\pi/4)} =$

$$= 16\sqrt{2}[\cos(-9\pi/4) + i\sin(-9\pi/4)] = 16\sqrt{2}[\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)] =$$

$$= 16\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = 16 - 16i.$$

Molemmilla tavoilla saatiin siis samat tulokset, mutta tässä tapauksessa algebrallinen muoto oli laskujen kannalta edullisempi kuin eksponenttimuoto.

Esimerkki.
Määritä yhtälön $z^3 + 64 = 0$ kaikki kompleksilukuratkaisut z.

Algebrallista muotoa käyttäen:

Sijoittamalla $z = x + yi$, missä $x, y \in \mathbb{R}$, yhtälö saa muodon

$$z^3 = (x + yi)^3 = -64.$$

Kun kuutio $(x + yi)^3$ puretaan kertolaskulla tai binomikaavalla, saadaan

$$x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3 = -64,$$

$$x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i = -64,$$

$$(x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i = -64 + 0i,$$

missä molemmilla puolilla on kompleksiluku. Yhtälö toteutuu, kun reaaliosat ovat samat ja imaginaariosat ovat samat. Saamme siis reaalilukumuuttujille x ja y kolmannen asteen yhtälöparin

$$x^3 - 3xy^2 = -64 \quad \text{ja} \quad 3x^2y - y^3 = 0.$$

Sen ratkaiseminen näyttää hankalalta paitsi tapauksessa $y = 0$. Silloin jälkimmäinen yhtälö on tosi ja edellinen yhtälö sievenee muotoon $x^3 = -64$, josta $x = -4$.

Näin olemme löytäneet yhtälölle $z^3 + 64 = 0$ yhden ratkaisun $z = -4$. Tämän reaalisen ratkaisun lisäksi yhtälöllä saattaa olla myös ei-reaalisia kompleksilukuratkaisuja, joihin emme päässeet käsiksi teknisten vaikeuksien vuoksi.

Eksponenttimuotoa käyttäen:

Kokeillaanpa siis eksponenttimuotoa $z = re^{i\theta}$, missä $r, \theta \in \mathbb{R}$. Silloin yhtälön $z^3 = -64$ vasen puoli on

$$z^3 = (re^{i\theta})^3 = r^3 e^{3i\theta} = r^3 e^{i(3\theta)},$$

ja oikea puoli on

$$-64 = 64 \cdot (-1) = 4^3 \cdot e^{i\pi},$$

missä hyödynsimme Eulerin kaavaa $e^{i\pi} = -1$.

Yhtälö $z^3 = -64$ saa siis muodon

$$r^3 \cdot e^{i(3\theta)} = 4^3 \cdot e^{i\pi},$$

missä molemmat puolet ovat eksponenttimuotoisia kompleksilukuja. Vasemmalla puolella olevan kompleksiluvun napasäde on r^3 ja suuntakulma on 3θ. Oikealla puolella olevan kompleksiluvun napasäde on 4^3 ja suuntakulma on π (eli 180°).

Yhtälön toteutumisen ensimmäinen ehto on, että napasäteet ovat samat eli $r^3 = 4^3$, mistä seuraa, että $r = 4$.

Toinen ehto on, että suuntakulmat *osoittavat samaan suuntaan*. Tämä toteutuu, jos suuntakulmat ovat samat tai niiden ero on täyden kulman $2\pi = 360°$ kokonainen monikerta. Täytyy siis olla

$$3\theta - \pi = n \cdot 2\pi, \text{ missä } n \text{ on kokonaisluku } 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$$

joten $3\theta = \pi + n \cdot 2\pi$ ja edelleen

$$\theta = \theta_n = \pi/3 + n \cdot 2\pi/3.$$

Huomaamme, että monikerta n tuottaa kolme mahdollista z:n suuntaa, kun $n = 0, 1, 2$. Nämä suunnat (suuntakulmat) ovat

$$\theta_0 = \pi/3 + 0 \cdot 2\pi/3 = \pi/3 = 60°,$$

$$\theta_1 = \pi/3 + 1 \cdot 2\pi/3 = 3\pi/3 = \pi = 180°,$$

$$\theta_2 = \pi/3 + 2 \cdot 2\pi/3 = 5\pi/3 = 300°,$$

missä suunta θ_2 on palautettu ensimmäiselle kierrokselle (kulmat 420° ja 60° osoittavat samaan suuntaan). Muut kertaluvun n arvot tuottavat aina jonkin näistä kolmesta suunnasta.

Näin saamme yhtälöllemme $z^3 = -64$ kolme kompleksilukuratkaisua z_0, z_1, z_2, joilla kaikilla on sama napasäde $r = 4$ ja suunnat $\theta_0, \theta_1, \theta_2$. Ratkaisut ovat siis

$$z_0 = re^{i\theta_0} = 4e^{i(\pi/3)},$$

$$z_1 = re^{i\theta_1} = 4e^{i\pi},$$

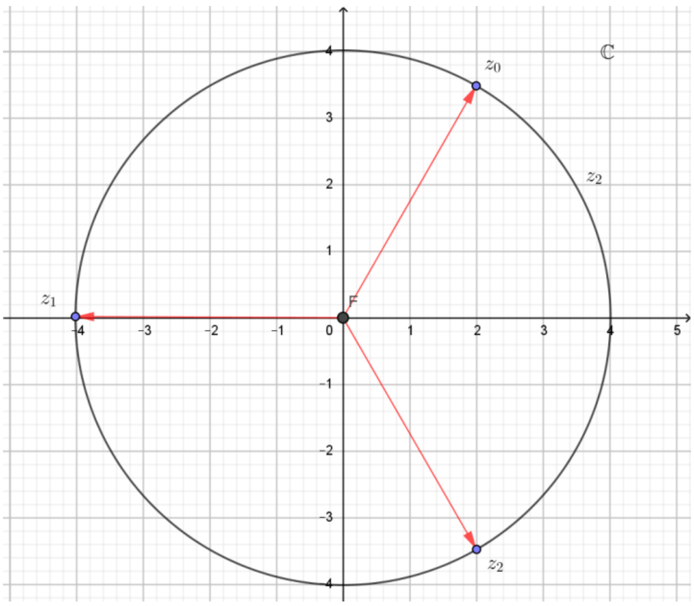
$$z_2 = re^{i\theta_2} = 4e^{i(5\pi/3)}.$$

Eulerin kaavan avulla saamme ratkaisut myös algebrallisessa muodossa

$$z_0 = 4e^{i(\pi/3)} = 4[\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)] = 2 + \sqrt{3}i\,,$$

$$z_1 = c = 4[\cos\pi + i\sin\pi] = -4\,,$$

$$z_2 = 4e^{i(5\pi/3)} = 4[\cos(5\pi/3) + i\sin 5(\pi/3)] = 2 - \sqrt{3}i\,,$$



KUVIO 1.4.1. Yhtälön $z^3 + 64 = 0$ ratkaisuja z_0, z_1, z_2 vastaavat kompleksitason pisteet ovat origokeskisen ympyrän ($r = 4$) kehällä 120° välein. Yksi ratkaisu z_1 on reaalinen. Kaksi muuta ratkaisua z_0 ja z_2 ovat toistensa liittolukuja.

Tässä tapauksessa eksponenttimuoto avasi tien yhtälön ratkaisujen löytämiseen.

Kierto tasossa.

Eksponenttimuoto tarjoaa kätevän mahdollisuuden suorittaa tasokuvioiden *rotaatioita* eli kiertoja origon ympäri. Jos kompleksitason piste $z = re^{i\alpha}$ kerrotaan tekijällä $e^{i\theta}$, niin saadaan tulo $e^{i\theta}z = e^{i\theta}re^{i\alpha} = re^{i(\alpha+\theta)}$, jonka etäisyys origosta on sama kuin z:lla, mutta suuntakulma on $\alpha + \theta$. Näemme, että tekijä $e^{i\theta}$ kiertää kerrottavaa z kulman θ verran origon ympäri. Voimme kutsua kompleksilukua $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ *kiertotekijäksi*.

Esimerkki.

Tasokolmion kärkipisteet ovat $A_1 = (2,5)$, $B_1 = (-3,2)$, $C_1 = (1,-4)$. Kolmiota kierretään suoran kulman $\pi/2$ verran origon ympäri. Määritä uudet kärkipisteet A_2, B_2, C_2.

Uudet kärkipisteet saadaan kertomalla alkuperäiset kiertotekijällä

$$e^{i(\pi/2)} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = 0 + i = i.$$

Tällöin kerrottavat pisteet esitetään algebrallisessa muodossa:

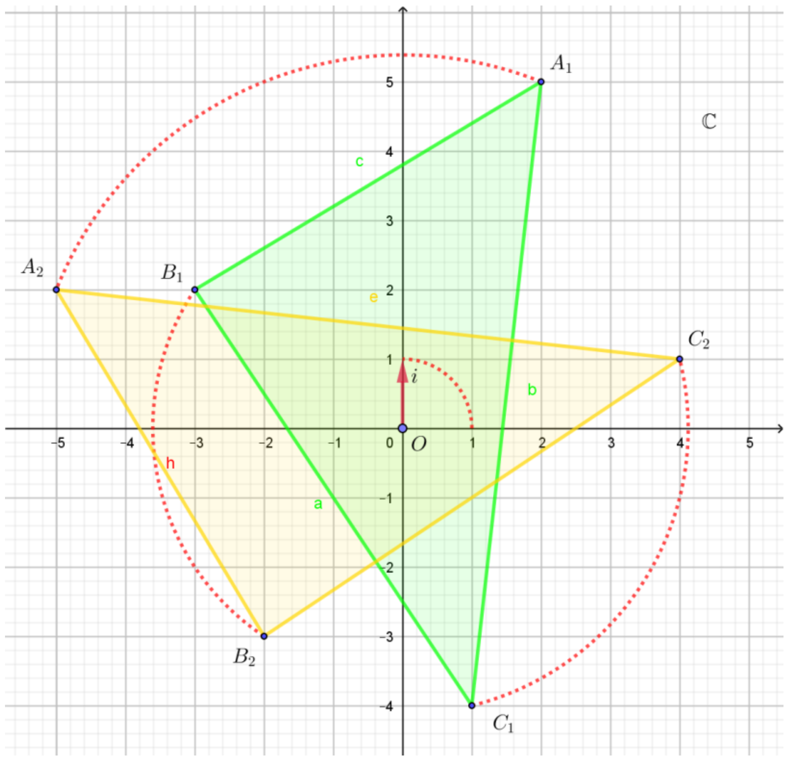
$$A_1 = 2 + 5i,\ B_1 = -3 + 2i,\ C_1 = 1 - 4i,$$

jolloin saadaan tulot

$$e^{i(\pi/2)}A_1 = i(2+5i) = -5 + 2i = (-5,2) = A_2\ ,$$

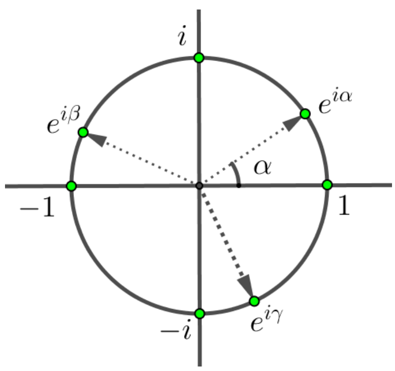
$$e^{i(\pi/2)}B_1 = i(-3+2i) = -2 - 3i = (-2,-3) = B_2\ ,$$

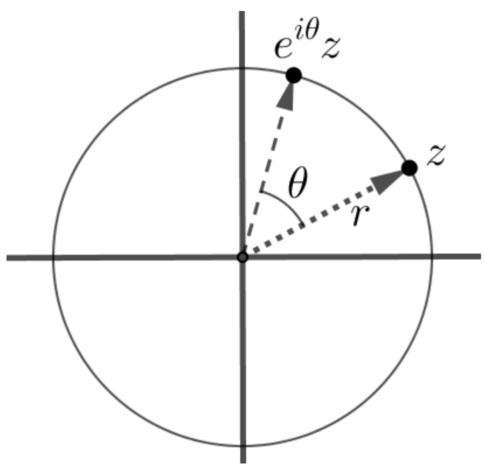
$$e^{i(\pi/2)}B_1 = i(1-4i) = 4 + i = (4,1) = C_2\ .$$



KUVIO 1.4.2. Vihreää kolmiota $A_1B_1C_1$ kierretään origon ympäri vastapäivään suoran kulman $\pi/2$ verran. Kierretyn keltaisen kolmion kärkipisteet A_2, B_2, C_2 saadaan kertomalla alkuperäiset (kompleksilukuina) kiertotekijällä $e^{i(\pi/2)} = i$.

Kompleksiyksiköt. Tässä tarkoitamme *yksiköllä* sellaista lukua, jonka itseisarvo eli etäisyys origosta on 1. Reaalilukujoukossa $\mathbb{R}$ on kaksi yksikköä 1 ja -1. Kompleksiyksiköitä ovat kaikki origokeskisen yksikköympyrän kehällä sijaitsevat pisteet z. Niillähän $|z| = 1$. Kompleksilukujen joukossa $\mathbb{C}$ on siis äärettömän monta yksikköä.





KUVIO 1.4.3. *Vasen kuvio*: Kaikki yksikköympyrän kehäpisteet $e^{i\theta}$ ovat kompleksiyksiköitä, sillä $\left|e^{i\theta}\right| = 1$. Onhan $\left|e^{i\theta}\right| = |\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$. Niiden joukossa ovat myös reaaliset yksiköt $1 = e^0 = e^{i(k\cdot 2\pi)}$ ja $-1 = e^{i\pi} = e^{i(2k+1)\cdot\pi}$, missä k on mikä tahansa kokonaisluku. *Oikea kuvio*: Kompleksiyksikkö $e^{i\theta}$ toimii kiertotekijänä. Piste $e^{i\theta}z$ on samalla origokeskisellä ympyrällä kuin z, mutta kiertyneenä kulman θ verran.

Yhteenveto kompleksiluvuista. Reaalilukujen x joukko $\mathbb{R}$ voidaan laajentaa kompleksilukujen z joukoksi $\mathbb{C}$. Laajennuksessa laskulait säilyvät samoina. Sekä $\mathbb{R}$ että $\mathbb{C}$ ovat algebrallisia kuntia. Geometrisesti kompleksiluvut ovat koordinaattitason eli *kompleksitason* pisteitä $z = (x, y)$. Kompleksitasossa vaaka-akselin eli *reaaliakselin* piste $(x, 0)$ vastaa reaalilukua x ja pystyakselin eli *imaginaariakselin* piste $(0, y)$ vastaa imaginaarilukua yi.

Kompleksiluku $z = (x, y)$ voidaan tulkita *paikkavektoriksi*, joka alkaa origosta $(0, 0)$ ja päättyy pisteeseen (x, y). Kompleksilukujen yhteenlasku määritelläänkin vektorisummana. Jos $z_1 = (x_1, y_1)$ ja $z_2 = (x_2, y_2)$ ovat kompleksilukuja, niin $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Tämän määritelmän mukaan reaalilukujen x_1 ja x_2 eli kompleksitason pisteiden $(x_1, 0)$ ja $(x_2, 0)$ summa on $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$, joka on reaalilukua $x_1 + x_2$ vastaava kompleksitason piste. Kompleksilukujen yhteenlasku on siis reaalilukujen yhteenlaskun aito laajennus. Samoin toimii myös imaginaarilukujen yhteenlasku $(0, y_1) + (0, y_2) = (0, y_1 + y_2)$, jonka voimme kirjoittaa myös $y_1 i + y_2 i = (y_1 + y_2)\, i$. Reaalilukujen summa on reaaliluku ja imaginaarilukujen summa on imaginaariluku. Jokainen kompleksiluku $z = (x, y)$ reaaliluvun ja imaginaariluvun summa: $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + yi$. Tämä on kompleksiluvun *algebrallinen muoto*.

Kompleksilukujen kertolaskukin määritellään geometrisen vektorimallin avulla. Lukujen $z_1 = (x_1, y_1) = [r_1, \theta_1]$ ja $z_2 = (x_2, y_2) = [r_2, \theta_2]$ kompleksitulo $z_1 z_2$ saadaan kertomalla vektorien pituudet (eli napasäteet r_1 ja r_2) ja laskemalla suuntakulmat yhteen. Siis $z_1 z_2 = [r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2]$. Tämäkin määritelmä säilyttää reaalilukujen kertolaskun. Esimerkiksi reaalilukujen $z_1 = 3$ ja $z_2 = -2$ napasäteet ovat $r_1 = 3$ ja $r_2 = 2$ ja suuntakulmat ovat $\theta_1 = 0$ ja $\theta_2 = \pi$. Silloin niiden kompleksitulo on $3 \cdot (-2) = z_1 z_2 = [r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2] = [2 \cdot 3, 0 + \pi] = [6, \pi]$, joka on reaaliluku -6. Näin kompleksitulo perustelee tutun kertolaskun merkkisäännön: ”plus kertaa miinus on miinus”.

Kompleksilukujen vektorimalliin perustuvat yhteen- ja kertolaskun määritelmät tuottavatkin *algebrallisen kunnan*, jossa pätevät kaikki tutut laskusäännöt. Kertolaskun määritelmästä seuraa myös, että imaginaariyksikön $i = (0,1)$ neliö on -1. Miksi? Siksi, että napamuodossa $i = [1, \pi/2]$, joten

$$i^2 = i \cdot i = [1 \cdot 1, \pi/2 + \pi/2] = [1, \pi] = -1.$$

Tämä havainto avaa mahdollisuuden laskea kompleksiluvuilla samaan tapaan kuin reaaliluvuilla. Kompleksiluvut esitetään *algebrallisessa* muodossa $z = x + yi$ ja laskut suoritetaan totuttuun tapaan muistaen vain, että $i^2 = -1$. Funktioiden sarjakehitelmiin perustuva Eulerin kaava $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ antaa lisäksi käyttöömme napakoordinaatteihin tukeutuvan kompleksiluvun *eksponenttimuodon* $z = re^{i\theta}$, joka on monissa laskuissa algebrallista muotoa luontevampi ja tehokkaampi.

Kompleksiluvut pähkinänkuoressa
Kompleksilukuja ovat kaikki binomit $x + yi$, missä x ja y ovat reaalilukuja ja i on ei-reaalinen vakio (imaginaariyksikkö), jonka neliö $i^2 = -1$. Reaalilukuja ovat ne kompleksiluvut, joilla $y = 0$. Kompleksiluvuilla lasketaan kunnan laskusääntöjen mukaan. Kompleksilukujen kunnan $\mathbb{C}$ nolla-alkio (yhteenlaskun neutraalialkio) on reaaliluku 0 ja yksikköalkio (kertolaskun neutraalialkio) on reaaliluku 1.

Kompleksinen kompakysymys. Mikä on potenssin i^i arvo? (Asiaa pohditaan Liitteessä 1.)

2. KVATERNIOT

2.1. Tasosta avaruuteen?

Eulerille ja muille 1700-luvun lopun matemaatikoille oli selvää, että lukukäsite voidaan laajentaa reaalilukusuoralta kompleksilukutasoon niin, että kaikki tutut *kunnan* laskusäännöt säilyvät voimassa. Reaalilukujen kunta $\mathbb{R}$ on siis osa laajempaa lukualuetta, kompleksilukujen kuntaa $\mathbb{C}$, jota geometrisesti vastaa taso. Eipä ihme, että tämän hämmästyttävän menestyksen jälkeen monen mielessä heräsi kysymys: Voidaanko lukualueen laajentamista jatkaa edelleen 2-ulotteisesta tasosta 3-ulotteiseen avaruuteen? Sinnikkäistä yrityksistä huolimatta tämä ei kuitenkaan näyttänyt onnistuvan.

Carl Friedrich Gauss todisti vuonna 1800 tuloksen, jota on sittemmin kutsuttu *algebran peruslauseeksi*. Sen mukaan jokaisella polynomilla

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

on nollakohta kompleksilukujen joukossa $\mathbb{C}$. Tämähän ei päde reaalilukujen kunnassa $\mathbb{R}$, sillä esimerkiksi yksinkertaisella polynomilla $x^2 + 1$ ei ole nollakohtaa $\mathbb{R}$:ssä, vaikka polynomin kertoimet ovat $\mathbb{R}$:ssä. Mutta Gaussin tulos pätee polynomille $P(x)$ olivatpa sen kertoimet a_k mitä tahansa reaalilukuja ja vieläkin yleisemmin olivatpa ne *mitä tahansa kompleksilukuja*. Gaussin tulos osoitti, että kompleksiluvut muodostavat *algebrallisesti täydellisen* lukukunnan, joka ei kaipaa laajennuksia.

Tästä huolimatta matemaatikot – myös Gauss – pohdiskelivat mahdollisuutta laajentaa lukualuetta kolmiulotteiseen avaruuteen $\mathbb{R}^3$. Tarmokkaimmin asiaan paneutui irlantilainen William Rowan Hamilton (1805–1865). Hän etsi vuosien ajan toimivaa kertolaskun määritelmää avaruuden $\mathbb{R}^3$ pisteille $u = (x, y, z)$. Näille ”avaruusluvuilleen” Hamilton antoi kompleksilukujen tapaan algebrallisen lukumuodon $u = x1 + yi + zj = x + yi + zj$, missä x, y, z ovat kyseisen avaruuden pisteen reaalilukukoordinaatit. Lisäksi symbolit $1, i$ ja j

kuvaavat koordinaattiakselien suuntaisia origosta alkavia yksikkövektoreita. Yhtä hyvin nämä symbolit voitaisiin tulkita $\mathbb{R}^3$:n pisteiksi $1 = (1,0,0), i = (0,1,0), j = (0,0,1)$. ”Avaruuslukujen” yhteenlasku olisi luontevasti vektoreiden yhteenlaskua aivan kuten tasossakin. Hamiltonin sitkeät yritykset laajentaa kertolasku tasosta $\mathbb{R}^2$ avaruuteen $\mathbb{R}^3$ ajautuivat kuitenkin umpikujaan, kunnes hän 16.10.1843 sai kävelyretkellään kuuluisan oivalluksensa Dublinin Brougham-sillalla. Lukualueen laajennus onkin tehtävä tasosta $\mathbb{R}^2$ neliulotteiseen avaruuteen $\mathbb{R}^4$ eli pisteille (t, x, y, z). Nämä neliulotteiset luvut hän nimesi kvaternioiksi (engl. *quaternions*).

Main article: History of quaternions

Quaternion plaque on Brougham (Broom) Bridge, Dublin, which says:

Here as he walked by
on the 16th of October 1843
Sir William Rowan Hamilton
in a flash of genius discovered
the fundamental formula for
quaternion multiplication
$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i\,j\,k} = -1$
& cut it on a stone of this bridge

KUVIO 2.1.1. Hamiltonin oivalluksen muistolaatta Dublinin Brougham-sillalla[1] (*Courtesy of Wikipedia*)

Myöhemmin on selvinnyt, että Gauss oli päiväkirjamerkinnöissään päätynyt samaan johtopäätökseen jo vuonna 1819, pari vuosikymmentä ennen Hamiltonia, mutta Gaussin päiväkirjat julkaistiin vasta vuonna 1900. Myös ranskalainen pankkiiri ja matemaatikko Olinde Rodrigues (1795-1851) oli esittänyt vuonna 1840 samantyyppisen neljään parametriin perustuvan tekniikan avaruuskappaleiden kiertomuunnoksille. Vielä

[1] Tämän tapahtuman muistoksi Dublinissa on vuodesta 1990 alkaen järjestetty vuotuinen Hamilton kävely (*Hamilton walk*) Brougham-sillalle lokakuun 16. päivänä.

aikaisemmin, vuonna 1748, oli Leonhard Euler keksinyt ns. neljän neliön identiteetin (*Euler four-square identity*), jonka perusidea on sukua Hamiltonin kvaternioille.

2.2. Hamiltonin kvaterniot

Kaksiulotteisen tason $\mathbb{R}^2$ pisteitä (x, y) vastaavat kompleksiluvut $z = x + yi = x1 + yi$. Tätä algebrallista muotoa jäljitellen Hamilton määritteli neliulotteisen avaruuden $\mathbb{R}^4$ pisteitä vastaavat kvaternioluvut eli lyhyesti *kvaterniot* lausekkeina

$$q = t + xi + yj + zk = t1 + xi + yj + zk\ ,$$

missä t, x, y, z ovat reaalilukuja ja $1, i, j, k$ ovat *yksiköitä*. Niistä ensimmäinen 1 on reaaliyksikkö ja i, j, k ovat imaginaariyksiköitä. Yksiköt vastaavat avaruuden $\mathbb{R}^4$ koordinaattiakselien t, x, y, z suuntaisia yksikkövektoreita. Yksikköjä vastaavat samalla avaruuden $\mathbb{R}^4$ pisteet:

$$1 = (1, 0, 0, 0)$$

$$i = (0, 1, 0, 0)$$

$$j = (0, 0, 1, 0)$$

$$k = (0, 0, 0, 1)$$

Kvaternio $q = t + xi + yj + zk$ voidaan siis tulkita avaruuden $\mathbb{R}^4$ pisteeksi (t, x, y, z). Konkreettisesti voimme myös ajatella, että q ilmaisee pistemäisen fysikaalisen[1] tapahtuman koordinaatit: t on tapahtuman aikakoordinaatti ja x, y, z ovat sen paikkakoordinaatit. Näin kvaternio hahmotetaan kaksiosaisena: *skalaari* t (aika) ja *vektori* $\boldsymbol{r} = xi + yj + zk$ (paikka) eli $q = t + \boldsymbol{r}$. Skalaariosa on yksiulotteinen, $t \in \mathbb{R}$, ja vektoriosa on kolmiulotteinen, $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3$. Tällöin kvaternio $q = t + xi + yj + zk$ on kätevä esittää ns. *skalaari-vektorimuodossa*

(2.2.1a) $$q = t + \boldsymbol{r},$$

[1] James Clerk Maxwellin (1831–1879) esittämät sähkömagnetismin teoreettiset perusteet, kuuluisat *Maxwellin yhtälöt*, muotoiltiin aluksi kvaternioiden avulla. Niissä skalaarikoordinaatti t tarkoitti aikaa. Myöhemmin on tullut tavaksi muotoilla nämä yhtälöt vektoreiden tai tensoreiden avulla.

missä $\boldsymbol{r} = xi + yj + zk$ on avaruuskoordinaatiston $\mathbb{R}^3$ pisteen (x, y, z) paikkavektori ja imaginaariyksiköt i, j, k toimivat $\mathbb{R}^3$:n ortonormaaleina kantavektoreina[1].

Kvaternion q skalaari-vektorimuoto on usein hyödyllistä täsmentää muotoon

(2.2.1b) $\quad q = t + v\boldsymbol{u}$,

missä $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ on paikkavektorin pituus eli itseisarvo ja $\boldsymbol{u}$ on paikkavektorin $\boldsymbol{r}$ suuntainen yksikkövektori, ts. $|\boldsymbol{u}| = 1$.

Kvaternioalgebran perusteet

Kompleksilukujen z laskusäännöt määritellään algebrallisen muodon $z = x + yi$ avulla, asettamalla ehto $i^2 = -1$. Sama pätee kvaternioille $q = t + xi + yj + zk$, mutta ehtoja on enemmän. Ne voidaan tiivistää *Hamiltonin aksioomaan*:

(HA) $\quad i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$,

Tästä aksioomasta seuraavat myös imaginaariyksiköiden keskinäiset tulot. Johdetaan esimerkiksi tulon ij arvo. Aksiooman mukaan on $ijk = -1$. Kertomalla tämä yhtälö puolittain imaginaariyksiköllä k oikealta saamme yhtälön $ijkk = -1k$. Mutta aksiooman mukaan on $kk = k^2 = -1$, joten yhtälö sievenee muotoon $ij(-1) = -k$. Kertomalla tämä yhtälö puolittain -1:llä saamme $ij = k$.

Vastaavasti saamme tulon $jk = i$ kertomalla yhtälön $ijk = -1$ vasemmalta yksiköllä i. Jos taas kerromme saadun yhtälön $jk = i$ vasemmalta j:llä, saamme $jjk = ji$ eli $-k = ji$ eli $ji = -k$. Huomaamme, että *kvaterniotulo ei ole kommutatiivinen*, koska esim. $ij = -ji$. Tästä syystä kvaternioyhtälöitä kerrottaessa on oltava tarkkana, että kerrotaan yhtälön kumpikin puoli *samalta suunnalta*. Tämä oli hinta, jonka Hamilton joutui maksamaan saadakseen kompleksilukualgebran laajennetuksi neliulotteiseen avaruuteen. Kvaternioiden algebra ei siis täytä kaikkia *lukukunnan* ehtoja, mutta huolellisuutta noudattamalla kvaternioalgebra sujuu lähes yhtä vaivattomasti kuin kompleksiluvuillakin.

[1] Ortonormaalit kantavektorit merkitään yleensä lihavoituina $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, mutta tässä ne ovat ensisijaisesti kvaternioavaruuden imaginaariyksikkölukuja, joita ei perinteisesti lihavoida. Lihavoimme kuitenkin symbolit (kuten $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{u}$), joita ajattelemme ensisijaisesti vektoreina.

Imaginaariyksiköiden keskinäiset tulot. Hamiltonin aksioomasta voidaan johtaa edellä kuvattujen esimerkkien tapaan alla luetellut yksiköiden väliset tulot.

$$
\text{(2.2.2)} \qquad
\begin{array}{llll}
\text{(1a)} & ij = k & \text{(1b)} & ji = -k \\
\text{(2a)} & jk = i & \text{(2b)} & kj = -i \\
\text{(3a)} & ki = j & \text{(3b)} & ik = -j
\end{array}
$$

Kvaternioavaruus ja kompleksitaso(t). Hamiltonin aksiooma on sopusoinnussa kompleksialgebran kanssa. Jos nimittäin rajoitutaan laskemaan 2-ulotteisilla "minikvaternioilla" $q = t + xi$, niin imaginaariyksiköt j ja k jäävät pois ja Hamiltonin aksioomasta jää voimaan vain ehto $i^2 = -1$ eli kompleksialgebran perusaksiooma. "Minikvaternioilla" laskettaessa tuloksetkin ovat aina "minikvaternioita". Ne ovat siis itse asiassa kompleksilukuja, jotka muodostavat laskutoimitusten suhteen suljetun kvaternioiden osajoukon.

Samalla tavalla muotoa $q = t + yj$ tai $q = t + zk$ olevat "minikvaterniot" muodostavat laskutoimitusten suhteen suljetun alueen. Neliulotteinen kvaternioavaruus sisältää siis kolme aliavaruutta, jotka ovat kopioita kompleksitasosta: tx-taso, ty-taso ja tz-taso.

Herää kysymys, syntyisikö vastaava suljettu osa, jos rajoittuisimme 3-ulotteisiin "midikvaternioihin" $q = t + xi + yj$. Vastaus on kielteinen, koska näiden kertolaskussa törmättäisiin tuloon ij, jonka arvo ei olekaan "midikvaternio". Aliavaruudet txy, txz, tyz eivät muodosta laskutoimitusten suhteen suljettua osaa koko kvaternioavaruudesta. Juuri tämän ongelman Hamilton ratkaisi laajentamalla tarkastelunsa 4-ulotteiseen avaruuteen, joka on suljettu Hamiltonin aksiooman määrittämien laskutoimitusten suhteen.

Reaaliluvut, kompleksiluvut ja kvaterniot. Reaaliluvut ja kompleksiluvut ovat myös kvaternioita. Reaaliluvut ovat kvaternioita $q = t + 0i + 0j + 0k = t$. Kompleksiluvut ovat kvaternioita $q = t + xi + 0j + 0k = t + xi$.

Yksiulotteinen reaalisuora $\mathbb{R}$ on siis osa kaksiulotteista kompleksitasoa $\mathbb{C}$, joka puolestaan on osa neliulotteista kvaternioavaruutta $\mathbb{H}$. Toisin sanoen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$.

Kommentti merkintätavoista. Matemaattisten objektien, kuten lukujen, niminä käytettävät symbolit ovat tietysti vapaavalintaisia, mutta aikojen saatossa on syntynyt jossain määrin vakiintuneita käytäntöjä. Reaalilukuja merkitään yleensä latinalaisilla tai kreikkalaisilla kirjaimilla $a, b, c, x, y, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \ldots$. Niitä käytetään myös kompleksilukujen ja kvaternioiden niminä (esim. z, q, u, …).

Kompleksiluvun merkintä $z = x + yi$ viittaa mielikuvaan xy-koordinaattitason $\mathbb{R}^2$ pisteestä tai vektorista. Samalla tavalla kvaternio voitaisiin hahmottaa neliulotteisen avaruuden $\mathbb{R}^4$ pisteeksi tai vektoriksi, mutta merkintätapa $q = t + xi + yj + zk$ antaa mielikuvan yksiulotteisen $\mathbb{R}$-skalaarin t ja kolmiulotteisen $\mathbb{R}^3$-vektorin $xi + yj + zk$ muodostamasta parista. Tämä tulikin jo esille yhtälöissä (2.2.1a) $q = t + \boldsymbol{r}$ tai (2.2.1b) $q = t + r\boldsymbol{u}$ ja se onkin hyödyllinen tapa hahmottaa kvaternioita.

2.3. Kvaternioalgebra

Tarkastelemme nyt lähemmin kvaternioiden algebraa. Olkoot

$$q_1 = t_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k$$

ja

$$q_2 = t_2 + x_2 i + y_2 j + z_2 k$$

kaksi mielivaltaista kvaterniota, joiden kertoimet t_i, x_i, y_i, z_i ovat reaalilukuja.

Kvaternioiden q_1 ja q_2 laskutoimitukset määritellään kompleksilukujen tapaan seuraavasti.

Kvaternioiden summa

$$q_1 + q_2 = (t_1 + t_2) + (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)j + (z_1 + z_2)k$$

Esimerkiksi, jos $q_1 = 3 - 2i + j - 5k$ ja $q_2 = 9 + 7i - k$, niin

$$q_1 + q_2 = (3 + 9) + (-2 + 7)i + (1 + 0)j + (-5 - 1)k = 12 + 5i + j - 6k$$

Kvaternioiden tulo

Kvaterniot kerrotaan termeittäin. Saaduissa tulotermeissä skalaaritekijät kommutoivat (eli ne voidaan siirtää tulotermin) ja imaginaariyksiköiden tulot saadaan Hamiltonin aksiooman (HA) ja sen seurauksen (2.2.2) avulla.)

Esimerkiksi kvaterniot $q_1 = 2 - j + 4k$ ja $q_2 = 3i - 6j$ kerrotaan termeittäin seuraavasti

$$\begin{aligned} q_1q_2 &= (2 - j + 4k)(3i - 6j) \\ &= 2(3i - 6j) - j(3i - 6j) + 4k(3i - 6j) \\ &= (6i - 12j) - (j3i - j6j) + 4k(3i - 6j) \\ &= (6i - 12j) - (3ji - 6jj) + (12ki - 24kj) \\ &= (6i - 12j) - (-3k + 6) + (12j + 24i) \\ &= -6 + 30i + 3k. \end{aligned}$$

Vastaavalla termi-termiltä kertolaskulla saadaan minkä tahansa kahden kvaternion tulo

$$q_1q_2 = (t_1 + x_1i + y_1j + z_1k)(t_2 + x_2i + y_2j + z_2k),$$

mutta sen kirjoittaminen kaavamuotoon ei ole mielekästä.

Kvaternioiden tulo ei ole kommutatiivinen

Edellä laskimme kvaternioiden $q_1 = 2 - j + 4k$ ja $q_2 = 3i - 6j$ tulon

$$q_1q_2 = -6 + 30i + 3k.$$

Jos vaihdamme tekijöiden järjestyksen, niin saamme

$$\begin{aligned} q_2q_1 &= (3i - 6j)(2 - j + 4k) \\ &= 3i(2 - j + 4k) - 6j(2 - j + 4k) \\ &= 6i - 3ij + 12ik - 12j + 6jj - 24jk \\ &= 6i - 3k - 12j - 12j - 6 - 24i \\ &= -6 - 18i - 24j - 3k. \end{aligned}$$

Huomaamme, että $q_1 q_2 \neq q_2 q_1$. Näemme, että kvaterniotulo ei ole kommutatiivinen (vaihdannainen). Tämä johtuu tietysti yhtälöissä (2.2.2) todetusta Hamiltonin aksiooman (HA) seuraamuksesta, että imaginaariyksiköiden i, j, k keskinäiset tulot vaihtavat merkkiä, kun tekijöiden järjestys vaihdetaan, esimerkiksi $ij = -ji$.

Huomautus 1. Tietyissä kvaternioavaruuden $\mathbb{H}$ osissa eli aliavaruuksissa $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$ kertolasku on kuitenkin kommutatiivinen. Nämä ovat entuudestaan tuttuja algebrallisia kuntia.

Huomautus 2. Kvaternioiden kertolasku on myös aina kommutatiivinen reaalisen tekijän suhteen. Jos $t \in \mathbb{R}$ ja $q \in \mathbb{H}$, niin $tq = qt$.

Kvaternion liittoluku, normi ja käänteisluku

Kvaternion $q = t + xi + yj + zk$ liittokvaternio (liittoluku) $\bar{q}$ saadaan vaihtamalla q:n imaginaaritermien etumerkit. Siis

(2.3.1) $$\bar{q} = t - xi - yj - zk.$$

Vastavuoroisesti $\bar{q}$:n liittokvaternio on q. Huolellisella kertolaskulla Hamiltonin aksiooman avulla nähdään, että liittokvaternioiden tulo kommutoi eli $q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q$ ja on aina arvoltaan positiivinen skalaari (kun $q \neq 0$)

(2.3.2) $$q \cdot \bar{q} = t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = |q|^2 = |\bar{q}|^2,$$

jonka nimeämme kvaternion q (ja myös kvaternion $\bar{q}$) itseisarvon[1] neliöksi $|q|^2 = |\bar{q}|^2 = q \cdot \bar{q}$. Näin yleistämme kompleksiluvun $z = t + xi$ liittoluvun $\bar{z} = t - xi$ ja itseisarvon neliön $|z|^2 = |\bar{z}|^2 = z\bar{z} = t^2 + x^2$ käsitteet kvaternioille.

Tämä havainto avaa kätevän mahdollisuuden laskea kvaternion $q \neq 0$ käänteisluku $1/q = q^{-1}$. Määritelmän mukaan käänteisluku q^{-1} toteuttaa yhtälön

(2.3.3) $$q \cdot q^{-1} = q^{-1} \cdot q = 1.$$

Mutta yhtälön (2.3.2) mukaan on $q\bar{q} = |q|^2$, josta jakamalla puolittain skalaarilla $|q|^2 \neq 0$ saamme

[1] Itseisarvoa $|q|$ kutsutaan myös kvaternion q *normiksi*.

$$(2.3.4)\qquad q\cdot\frac{1}{|q|^2}\bar{q}=1.$$

Vertaamalla yhtälöitä (2.3.3) ja (2.3.4) näemme, että

$$(2.3.5)\qquad q^{-1}=\frac{1}{|q|^2}\bar{q}=\frac{1}{t^2+x^2+y^2+z^2}(t-xi-yj-zk).$$

Näemme, että jokaisella kvaterniolla $q\neq 0$ on käänteiskvaternio q^{-1}, joka saadaan kertomalla q:n liittokvaternio $\bar{q}$ positiivisella reaaliluvulla (q:n normin neliön käänteisluvulla).

Näin kvaternioiden p ja $q\neq 0$ jakolasku käy mahdolliseksi, kun määrittelemme, että

$$(2.3.6)\qquad \frac{p}{q}=pq^{-1}.$$

Esimerkki . Laske osamäärä $r=p/q$, kun $p=13-11i+9j-7k$ ja $q=5+2j-k$.

Kaavan (2.3.2) avulla laskemme ensin jakajan q normin neliön

$$|q|^2=t^2+x^2+y^2+z^2=5^2+2^2+1^2=30$$

ja jakajan q liittokvaternion $\bar{q}=5-2j+k$ sekä kaavan (2.3.5) avulla jakajan q käänteisluvun

$$q^{-1}=\frac{1}{|q|^2}\bar{q}=\frac{1}{30}(5-2j+k).$$

Lopuksi laskemme kaavan (2.3.6) avulla kysytyn osamäärän

$$r=\frac{p}{q}=pq^{-1}=(13-11i+9j-7k)\cdot\frac{1}{30}(5-2j+k)$$

$$=\frac{1}{30}(13-11i+9j-7k)(5-2j+k)=\frac{1}{30}T,$$

missä $T=(13-11i+9j-7k)(5-2j+k)$. Tämän tulon laskemme vaiheittain tarkaten huolellisesti imaginaariyksiköiden tuloja sääntöjen (2.2.2) mukaan

$$(13)(5-2j+k)=65-26j+13k,$$

$$(-11i)(5-2j+k)=-55i+22ij-11ik=-55i+11j+22k,$$

$$(9j)(5-2j+k) = 45j - 18jj + 9jk = 18 + 9i + 45j,$$

$$(-7k)(5-2j+k) = -35k + 14kj - 7kk = 7 - 14i - 35k,$$

joista koostamalla saamme $T = 90 - 60i + 30j$. Kysytty osamäärä on siis

$$r = \frac{p}{q} = pq^{-1} = \frac{1}{30}T = 3 - 2i + j.$$

Lopuksi tarkistamme tuloksen kertomalla jakajan $q = 5 + 2j - k$ saadulla osamäärällä r.

$$\begin{aligned} rq &= (3 - 2i + j)(5 + 2j - k) \\ &= 15 + 6j - 3k - 10i - 4ij + 2ik + 5j + 2jj - jk \\ &= 15 + 6j - 3k - 10i - 4k - 2j + 5j - 2 - i \\ &= 13 - 11i + 9j - 7k, \end{aligned}$$

joka onkin täsmälleen jaettava p.

Huomautus. Edellisessä esimerkissä laskimme kvaternioiden p ja q osamäärän $r = p/q$ määritelmän (2.3.6) $r = p/q = pq^{-1}$ mukaisesti. Tarkistimme tuloksen kertolaskulla osamäärä kertaa jakaja eli $r \cdot q$, joka antoi jaettavan p. Hyvä näin! Jos kuitenkin tarkkaavaisuutemme olisi hieman herpaantunut niin, että olisimme kertoneet jakajalla osamäärän, jolloin tulos

$$q \cdot r = (5 + 2j - k)(3 - 2i + j) = 13 - 9i + 13j - k \neq p$$

osoittaisi jakolaskun tuloksen virheelliseksi!
Sekaannuksen syynä on tietysti se, että kvaternioiden kertolasku on herkkä tekijöiden järjestykselle ja nytkin on $r \cdot q \neq q \cdot r$.

Tällaisten sekaannusten välttämiseksi meidän pitäisi oikeastaan määritellä kvaternioille kaksi eri jakolaskua: oikeanpuoleinen $p/q = pq^{-1}$ ja vasemmanpuoleinen $p/q = q^{-1}p$. Mutta silloin meidän pitäisi keksiä niille toisistaan erottuvat merkintätavat. Parempi vaihtoehto on luopua kokonaan jakolaskun käytöstä, koska nehän ovat kertolaskuja pq^{-1} ja $q^{-1}p$, jotka erottuvat toisistaan tekijöiden järjestyksen suhteen, eikä meidän tarvitse miettiä kumpaa tarkoitamme merkinnällä p/q.

Yhteenveto kvaternioiden algebrasta

Kompleksitaso $\mathbb{C} = \{t + xi \mid t, x \in \mathbb{R}\}$ on algebrallinen *kunta*, jossa kaikki tutut reaalilukujen laskusäännöt ovat voimassa. Kunta $\mathbb{C}$ ja sen kopiot $\{t + yj \mid t, y \in \mathbb{R}\}$ ja $\{t + zk \mid t, z \in \mathbb{R}\}$ ovat tietysti kvaternioavaruuden $\mathbb{H} = \{t + xi + yj + zk \mid t, x, y, z \in \mathbb{R}\}$ osia, mutta $\mathbb{H}$ kokonaisuutena ei ole kunta, koska kvaternioiden kertolasku ei ole aina kommutatiivinen. Lukuavaruutta $\mathbb{H}$ kutsutaan *jakorenkaaksi* (engl. division ring), joka on "melkein kunta" niin, että jakolaskukin toimii. Kun on huolellinen kertolaskussa, niin kvaternioilla laskeminen sujuu samaan tapaan kuin reaali- ja kompleksiluvuilla, toki käsityönä hieman vaivalloisemmin.

Varsinainen laskentatyö on tietysti siirretty (ohjelmoitu) koneille. Kompleksilukujenkin laskuoperaatiot löytyvät jo koululaisten laskimista. Kvaternioneja ei niissä ole, mutta ammattilaiskäyttöön kehitetyissä laskentaohjelmistoissa, kuten *Mathematica* ja *Maple*, kvaterniot ovat mukana. Verkosta löytyy myös harrastajien laatimia kvaterniolaskennan välineitä. Tietokonegrafiikan ohjelmistoihin on integroitu kvaternionilaskentaa hoitamaan esimerkiksi näytöllä näkyvän avaruuskappaleen pyörimistä. Tähän palaamme kohta tarkemmin.

Kvaternioyhtälöt saattavat yllättää. Esimerkiksi yhtälöllä $x^2 + 1 = 0$ ei ole yhtään ratkaisua reaalilukujoukossa $\mathbb{R}$, mutta kompleksilukujoukossa sillä on kaksi ratkaisua $x = \pm i$. Entäpä kvaterniolukujen joukossa? Vastaus selviää seuraavassa kappaleessa.

2.4. Vektorilaskentaa kvaternioiden avulla

Tarkastelemme nyt lähemmin *vektorikvaternioita*

$$v = xi + yj + zk,$$

joiden skalaariosa $t = 0$. Nehän muistuttavat ulkoasultaan tavallisia kolmiulotteisen avaruuden vektoreita $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, missä $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ ovat avaruuden $\mathbb{R}^3$ ortonormaaleja kantavektoreita. Selvää onkin, että kvaternioavaruuden imaginaariyksiköt i, j, k sekä kantavektorit $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ ovat itse asiassa samoja matemaattisia objekteja. Jatkossa samaistammekin vektorikvaternion $v = xi + yj + zk$ ja vektorin $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ eli identifioimme symbolit $i = \boldsymbol{i}, j = \boldsymbol{j}, k = \boldsymbol{k}$.

Kun laskemme vektorikvaternioiden $v_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k$ ja $v_2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k$ <u>kvaterniotulon</u> Hamiltonin aksiooman avulla, saamme tuloksen

(2.4.1) $v_1 v_2 = -(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) + [(y_1 z_2 - z_1 y_2)i + (z_1 x_2 - x_1 z_2)j + (x_1 y_2 - y_1 x_2)k]$,

joka ei olekaan vektorikvaternio. Siinähän on skalaariosa $-(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)$.

Vektorilaskentaa tunteva lukija huomaa, että tämä skalaariosa on merkkiä vaille sama kuin vektoreiden $\boldsymbol{v}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{v}_2 = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$ <u>pistetulo</u> eli <u>skalaaritulo</u> $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2$.

Hakasulkeissa oleva vektoriosa

$$(y_1 z_2 - z_1 y_2)\boldsymbol{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\boldsymbol{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\boldsymbol{k},$$

jossa imaginaariyksiköt on puettu kantavektoreiksi, näyttää myös tutulta ja tarkkasilmäinen huomaa, että sehän on vektorien $\boldsymbol{v}_1$ ja $\boldsymbol{v}_2$ <u>ristitulo</u> eli <u>vektoritulo</u> $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$.

Samaistamalla kolmiulotteiset vektorit ja vektorikvaterniot saamme tuloksen:

(2.4.2) Vektoreiden $\boldsymbol{v}_1$ ja $\boldsymbol{v}_2$ kvaterniotulo $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$.

Tämä tulos voidaan kirjoittaa myös muotoon $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2$ ja ilmaista sanoin: ”Vektoreiden kvaterniotulo on niiden ristitulon ja pistetulon erotus.”

Esimerkki. Laske vektoreiden $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$ pistetulo ja ristitulo kvaterniotulon avulla.

Kvaterniotulo $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ (tai $v_1 v_2$) saadaan termeittäin kertomalla

$$\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 = (i + 2j + 3k)(2i + 5j - 4k)$$

$$= (2ii + 5ij - 4ik) + (4ji + 10jj - 8jk) + (6ki + 15kj - 12kk)$$

$$= (-2 + 5k + 4j) + (-4k - 10 - 8i) + (6j - 15i + 12)$$

$$= 0 - 23i - 11j + k$$

$$= 0 + (-23i - 11j + k)$$

$$= -\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2,$$

mistä näemme, että $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = 0$ ja $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = -23\boldsymbol{i} - 11\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

Esimerkki. Etsi yhtälön $u^2 = -1$ vektorikvaternioratkaisut $u = (0, x, y, z) \in \mathbb{H}$.

Vektorikvaterniota $u = (0, x, y, z) = xi + yj + zk$ vastaava vektori on $\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

Tuloksen (2.4.2) perusteella yhtälömme $u^2 = -1$ saa muodon

$$u^2 = -\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = -1.$$

Vektorilaskennasta muistamme, että pistetulo $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = x^2 + y^2 + z^2$ ja ristitulo $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ (siis nollavektori ja myös nollakvaternio). Näin ollen yhtälömme toteutuu, jos

$$u^2 = -\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = -(x^2 + y^2 + z^2) = -1$$

eli jos

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Tässä vasen puoli on vektorin $\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ pituuden neliö $|\boldsymbol{u}|^2$. Vektorin $\boldsymbol{u}$ täytyy siis olla yksikkövektori. Koska yksikkövektori $\boldsymbol{u}$ alkaa origosta ja päättyy pisteeseen (x, y, z), niin tämän pisteen täytyy sijaita xyz-koordinaatiston (eli avaruuden $\mathbb{R}^3$) origokeskisen yksikköpallon pinnalla. Näitä pisteitä on äärettömän monta.

Huomautus.

Edellä etsimme kvaternioyhtälön $u^2 = -1$ ratkaisuja vektorikvaternioiden $u = xi + yj + zk$ joukosta. Selvisi, että kaikki kvaterniot $u = (0, x, y, z)$, joilla $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, toteuttavat yhtälön. Lukija voi melko helposti osoittaa, että mikään kvaternio $q = (t, x, y, z)$, missä skalaarikomponentti $t \neq 0$, ei voi toteuttaa yhtälöä $q^2 = -1$. Näin ollen yhtälön kvaternioratkaisujen joukko on täsmälleen $\mathbb{R}^3$:n origokeskisen yksikköpallon pinta. Kaikki tämän yksikköpallon pinnan pisteet (tai niihin osoittavat origosta alkavat vektorit) ovat tavallaan imaginaariyksiköitä. Tällä samalla pallonpinnalla sijaitsevat myös alkuperäiset ortonormaalit imaginaariyksikkömme i, j, k.

2.5. Yleinen Eulerin kaava kvaternioille

Kompleksitasoa $\mathbb{C}$ käsittelevässä kappaleessa 1.4. johdimme eksponenttifunktion e^x ja trigonometristen funktioiden $\cos x$ ja $\sin x$ sarjakehitelmien avulla Eulerin kaavan

$$(\mathrm{E} - i) \qquad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

missä e on luonnollisen eksponenttifunktion[1] kantaluku, i on kompleksitason imaginaariyksikkö ja θ on reaaliluku, jonka ajatellaan tarkoittavan kulmaa radiaaneissa eli ns. absoluuttisissa kulmanyksiköissä.

Eulerin kaava saatiin sijoittamalla funktion e^θ potenssisarjakehitelmään kantaluvun θ paikalle $i\theta$. Näin saadaan funktion $e^{i\theta}$ sarjakehitelmä, joka koostuu potenssitermeistä $(i\theta)^n$. Koska potenssi $i^n = \pm 1$ tai $i^n = \pm i$, niin em. sarjan potenssitermi $(i\theta)^n = i^n\theta^n$ sievenee joko muotoon $\pm\theta^n$ tai $\pm\, i\theta^n$. Tällöin funktion $e^{i\theta}$ sieventyneen sarjan potenssitermit jakautuvat kahteen ryhmään: reaaliset $\pm\theta^n$ ja imaginaariset $\pm i\theta^n$. Reaalinen ryhmä osoittautuu samaksi kuin funktion $\cos\theta$ sarjakehitelmä ja imaginaarinen ryhmä (jonka termeistä i otetaan yhteiseksi tekijäksi) osoittautuu funktion $i\sin\theta$ sarjakehitelmäksi, joten tuloksena on Eulerin kaava.

Edellä kuvattu Eulerin kaavan johtamisprosessi perustuu yksinomaan imaginaariyksikön i ominaisuuteen, että $i^2 = -1$. Mutta kvaternioyksiköillä j ja k on juuri tämä ominaisuus, joten saamme Eulerin kaavan toisinnot

$$(\mathrm{E} - j) \qquad e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta,$$

[1] Luku $e \approx 2{,}718$ on luonnollisen logaritmifunktion $\log_e x = \ln x$ kantaluku. Vastaavaa eksponenttifunktiota e^x kutsutaan tässä luonnolliseksi eksponenttifunktioksi.

$(\mathrm{E}-k) \qquad e^{k\theta} = \cos\theta + k\sin\theta$

Eulerin kaavan versiot (Ei), (Ej) ja (Ek) ovat saman asian toistoa kolmessa eri kompleksitasossa (tx-tasossa, ty-tasossa ja tz-tasossa), joissa vain imaginaariyksiköillä on eri nimet. Olemme jo aiemmin todenneet, että nämä kolme kompleksitasoa ovat kvaternioavaruuden $\mathbb{H}$ kaksiulotteisia aliavaruuksia.

Mutta ei tässä vielä kaikki. Edellä olevassa huomautuksessa selvisi, että on olemassa äärettömän monta vektorikvaterniota u, joilla $u^2 = -1$. Geometrisesti ajateltuna nämä u-kvaterniot ovat xyz-paikka-avaruuden yksikkövektoreita, jotka osoittavat origokeskisen yksikköpallon pinnan pisteisiin. Johtaessamme edellä Eulerin kaavan potensseille $e^{i\theta}, e^{j\theta}$ ja $e^{k\theta}$ tarvitsimme ainoastaan sen tiedon, että kvaternioiden i, j, k neliöt ovat $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Mutta meillä on nyt sama tieto kvaterniosta u, joten saamme yleisen Eulerin kaavan kvaternioille

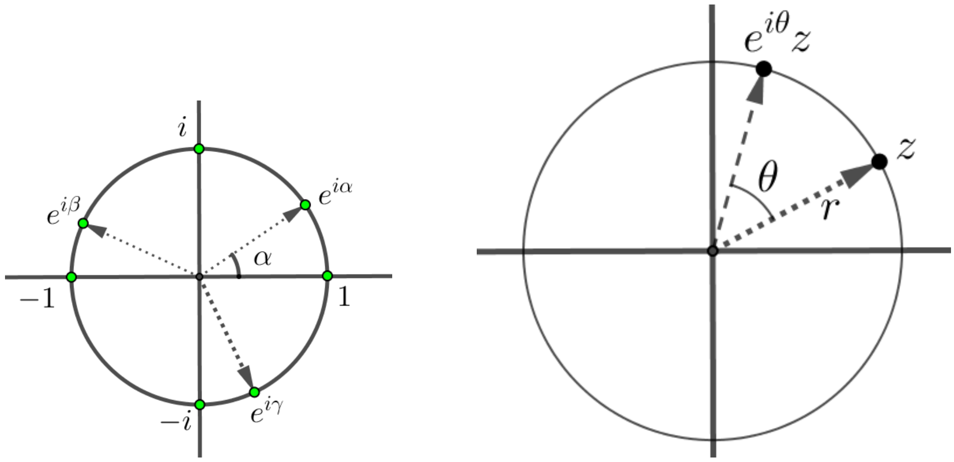
$(\mathrm{E}-u) \qquad e^{u\theta} = \cos\theta + u\sin\theta$, kun kvaternio u toteuttaa ehdon $u^2 = -1$.

Kaava pätee siis kaikille yksikkövektoreille $\boldsymbol{u}$, kun ne tulkitaan vektorikvaternioiksi u.

2.6. Sovellus: kierto avaruudessa

Kierto tasossa

Palautamme mieliin kompleksitasoon liittyvän kuvion.



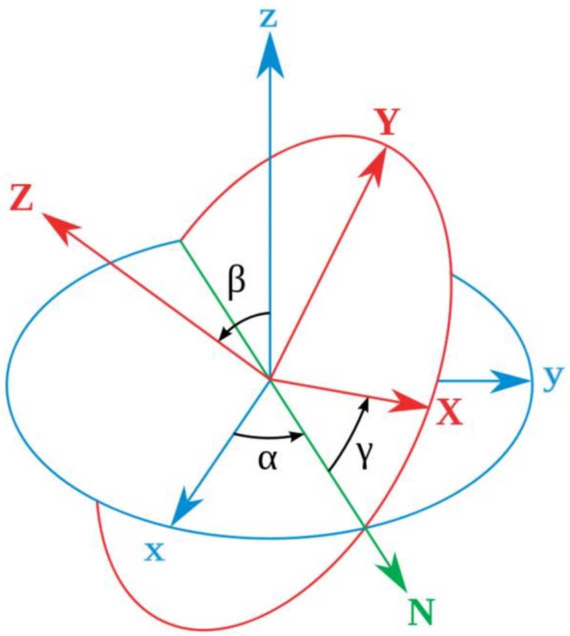
KUVIO 2.6.1.
Vasen kuvio: Kompleksilukuja $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ vastaavat pisteet ovat origokeskisen yksikköympyrän kehällä.
Oikea kuvio: Kun r-säteisellä ympyrällä oleva kompleksiluku z kerrotaan *kiertotekijällä* $e^{i\theta}$, niin tulo $e^{i\theta}z$ on saman ympyrän kehällä kiertyneenä kulman θ verran. Esimerkiksi kiertotekijä $e^{i\pi} = -1$ kiertää pisteen z pisteeseen $-z$.

Kompleksiluku $e^{i\theta}$ toimii xy-tasossa kiertotekijänä origon ympäri. Jos haluamme kiertää pisteen $z = (x, y) = x + yi$ origon ympäri kulman θ verran, niin tämä onnistuu kertolaskulla $e^{i\theta}z$. Voimme myös kiertää kokonaisia tasokuvioita samalla tavoin *laskemalla*. Valitsemme vain kuviosta riittävän määrän pisteitä, jotka kierretään uuteen paikkaan kertomalla kiertotekijällä $e^{i\theta}$. Tämä saattaa kuulostaa vaivalloiselta, mutta digitaalitekniikkahan on erikoistunut juuri nopeaan laskemiseen. Salamannopeasti suoritetut miljoonat laskutoimitukset saavat kuvion kiertymään pehmeästi tietokoneen näyttöruudulla.

Kierto avaruudessa

Eulerin menetelmä

Euler esitti jo 1700-luvulla menetelmän, jolla suorakulmaisen xyz-avaruuskoordinaatiston pisteen $P = (x, y, z)$ uudet koordinaatit (X, Y, Z) voidaan laskea sen jälkeen, kun koordinaatistoa on kierretty jäykkänä niin, että origo pysyy paikallaan ja koordinaattiakselien väliset (suorat) kulmat pysyvät muuttumattomina. Menetelmä perustuu ns. Eulerin kulmiin, jotka määrittävät kierron yksikäsitteisesti. Pisteen P uudet koordinaatit (X, Y, Z) voidaan laskea näiden kulmien avulla. Eulerin menetelmässä koordinaatiston kierto tehdään kolmessa vaiheessa kuten alla olevassa kuviossa esitetään.



KUVIO 2.6.2. Jäykän avaruuskoordinaatiston kierto. Alkuperäinen xyz-akselisto (sininen) on kierretty XYZ-akselistoksi (punainen). Kierto suoritetaan kolmessa vaiheessa (α), (β) ja (γ).

(α) Kierretään xy-tasoa z-akselin ympäri kulman α verran, jolloin x-akseli kääntyy vihreälle linjalle.

(β) Kierretään zy-tasoa x-akselin (vihreän linjan) ympäri kulman β verran, jolloin z-akseli kääntyy Z-akseliksi ja samalla xy-taso kääntyy diedrikulman β verran punaisen ympyrän tasoon.

(γ) Kierretään punaisen ympyrän tasossa olevaa xy-tasoa Z-akselin kulman γ verran, jolloin x-akseli ja y-akseli asettuvat X ja Y-akseleiksi.

(*Courtesy of Wikipedia*)

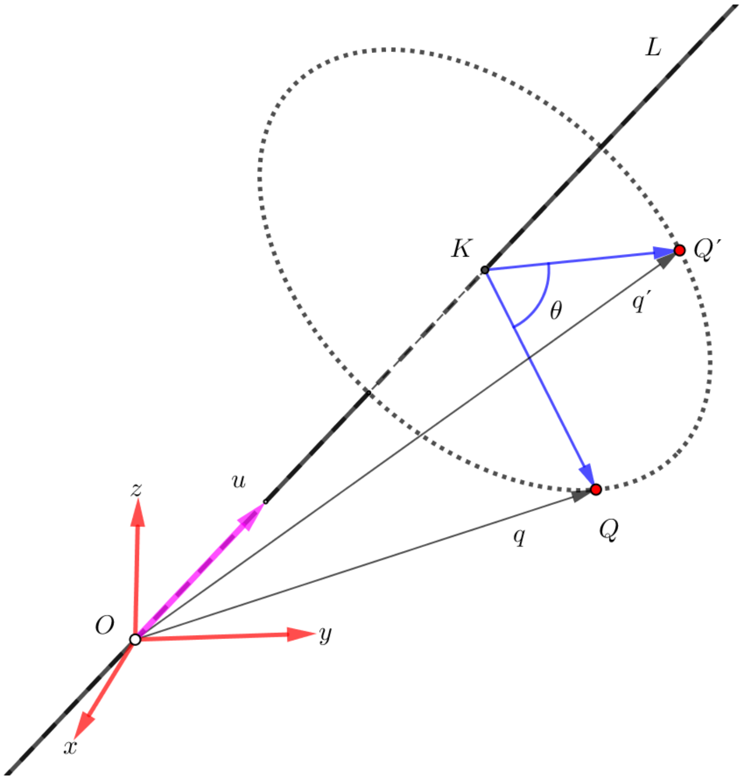
Euler osoitti, että jokainen jäykän avaruuskoordinaatiston kierto voidaan purkaa kolmeen vaiheeseen kuvion esittämällä tavalla. Trigonometrisen päättelyn avulla hän johti lausekkeet, joilla pisteen P uudet koordinaatit (X, Y, Z) kierretyssä koordinaatistossa voidaan laskea pisteen alkuperäisistä koordinaateista (x, y, z) ja kiertokulmista α, β ja γ.

Hamiltonin menetelmä

Edellä näimme, että xy-tasokoordinaatiston pisteen $P = (x, y)$ kierto kulman θ verran origon ympäri voidaan suorittaa yksinkertaisesti tulkitsemalla taso kompleksitasoksi ja kertomalla lähtöpiste $z = x + yi$ kiertotekijällä $e^{i\theta}$, joten pisteen uusi paikka on $P' = e^{i\theta}z$.

Hamilton pohti, että voitaisiinko vastaavasti pisteen kierto xyz-avaruuskoordinaatistossa hallita samaan tapaan kvaternioiden avulla. Voidaanhan avaruuden piste (x, y, z) tulkita vektorikvaternioksi $v = xi + yj + zk$ samaan tapaan kuin tason piste (x, y) voidaan tulkita kompleksiluvuksi $z = x + yi$. Voidaanko siis avaruuden kierto hallita kvaterniotulolla samaan tapaan kuin tason kierto kompleksitulolla?

Ensiksi on täsmennettävä, mitä tarkoitamme kierrolla eli *rotaatiolla* kolmiulotteisessa avaruudessa. Tasossa kuvion kierto määritellään antamalla staattinen piste (akseli), jonka ympäri kierto tapahtuu, ja kiertokulma θ. Akselipisteeksi voidaan valita xy-koordinaatiston origo. Kolmiulotteisessa xyz-avaruudessa kierto voidaan määritellä vastaavasti antamalla <u>akselisuora</u> ja <u>kiertokulma</u> θ. Alla oleva kuvio havainnollistaa asiaa.



KUVIO 2.6.3. Pistemäisen kohteen kierto avaruudessa yksikkövektorin u suuntaisen suoran L (kiertoakselin) ympäri pisteestä Q pisteeseen Q'. Kiertoympyrän taso on kohtisuorassa kiertoakselia vastaan ja sen keskipiste K on kiertoakselilla. Laskuja varten valitaan jokin akselisuoran piste origoksi O ja vedetään sen kautta kohtisuorat koordinaattiakselit. Kiertokulma θ on kiertoympyrän keskuskulma QKQ'. Kohteen kiertoa $Q \rightarrow Q'$ voidaan tarkastella myös sen paikkavektorin kiertona $OQ \rightarrow OQ'$.

Hamilton osoitti, että yllä kuvattu kierto avaruudessa voidaan todella laskea kvaterniotulona.

Hamiltonin kiertokaava (*Hamilton´s Sandwich Formula*)

Tarkastelemme kuviossa 2.6.3. kuvattua kiertoa kulman θ verran kiertoakselin L ympäri alkupisteestä $Q = (x, y, z)$ loppupisteeseen $Q' = (x', y', z')$.

Olkoon $u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ kiertoakselin L suuntainen yksikkövektorikvaternio ja olkoot edelleen $q = xi + yj + zk$ sekä $q' = x'i + y'j + z'k$ pisteiden Q ja Q'paikkavektoreita (vektorikvaternioita). Silloin on

$$q' = e^{u(\theta/2)} \cdot q \cdot e^{u(-\theta/2)} .$$

Nimitys “voileipäkaava” tulee Hamiltonin kiertokaavan ulkoasusta, jossa kierron alkupistettä vastaava vektorikvaternio q on puristettu kahden kvaternioleivän $e^{u(\theta/2)}$ ja $e^{u(-\theta/2)}$ väliin. Emme tässä todista Hamiltonin kaavaa, mutta testaamme sen pätevyyttä alla olevien esimerkkien avulla.

Esimerkki. Alkupistettä $q = (a, 0,0)$ kierretään kulman $\theta = 2\pi/3$ verran akselivektorin $i + j + k$ ympäri. Määritä kierron loppupiste q'.

Ratkaisu: Hamiltonin kaavaan on nyt sijoitettava alkupiste vektorikvaterniona $q = ai$. Kaavassa oleva suuntavektori u on yksikkövektori. Koska $|i + j + k| = \sqrt{3}$, niin voileipäkaavaan on sijoitettava $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$.

Kiertokulma $\theta = 2\pi/3$, joten kaavassa esiintyvä puolikaskulma $\theta/2 = \pi/3$.

Koska u on yksikkövektori, niin voileipäkaavassa esiintyvät eksponenttilausekkeet ovat kappaleen 2.5 lopussa johdetun Eulerin kaavan $(E - u)$ perusteella

$$e^{u(\theta/2)} = \cos(\pi/3) + u\sin(\pi/3) = \frac{1}{2} + u\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(1 + i + j + k)\,,$$

$$e^{u(-\theta/2)} = \cos(-\pi/3) + u\sin(-\pi/3) = \frac{1}{2} - u\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(1 - i - j - k)\,.$$

Sijoittamalla em. arvot voileipäkaavaan saamme

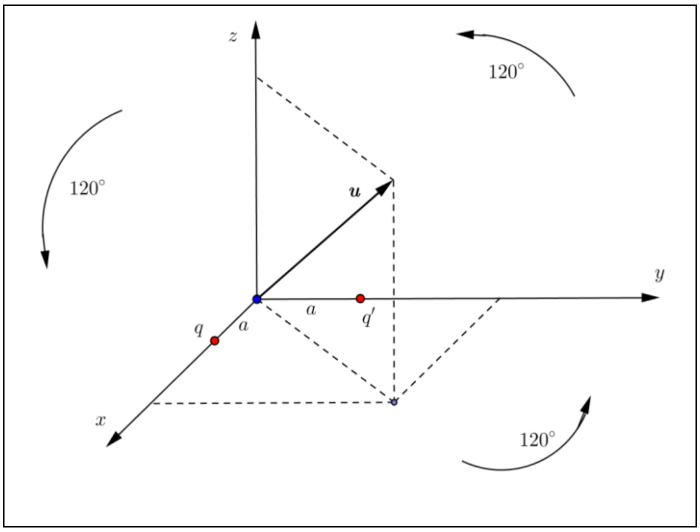
$$q' = e^{u(\theta/2)} \cdot q \cdot e^{u(-\theta/2)} = \frac{1}{2}(1 + i + j + k) \cdot (ai) \cdot \frac{1}{2}(1 - i - j - k).$$

Huolellinen kertolasku kvaternioiden tulosäännöillä antaa

$$\begin{aligned}
q' &= \frac{1}{4}a(i - 1 - k + j) \cdot (1 - i - j - k) \\
&= \frac{1}{4}a(-1 + i + j - k) \cdot (1 - i - j - k) \\
&= \frac{1}{4}a(-1 + i + j + k + i + 1 - k + j + j + k + 1 - i - k + j - i - 1) \\
&= \frac{1}{4}a(4j) \\
&= aj = (0, a, 0)
\end{aligned}$$

Tämän mukaan määritelty kierto siirtää alkupisteen $q = (a, 0, 0)$ pisteeseen $q' = (0, a, 0)$, siis esimerkiksi pisteen $q = (5,0,0)$ pisteeseen $q' = (0,5,0)$.

Kuvio 2.6.4. alla antaa geometrisen vahvistuksen edellä lasketulle tulokselle, että kyseinen $2\pi/3 = 120°$ kierto todella siirtää x-akselilla olevan pisteen $q = (a, 0, 0)$ y-akselille pisteeseen $(0, a, 0)$.



KUVIO 2.6.4. Kun xyz-koordinaatistoa kierretään 120° akselivektorin $u = i + j + k$ ympäri origon pysyessä paikallaan, niin x-akselilla oleva piste $q = ai = (a, 0, 0)$ kiertyy y-akselille pisteeseen $q' = aj = (0, a, 0)$ kuten voileipäkaava ennustaa.

Huomautus. Kuvion esittämää avaruuden kiertoa voi konkretisoida pahvikuution avulla. Jostakin kuution kärjestä (origo) lähtevät särmät merkitään kynällä koordinaattiakseleiksi kuvion mukaisesti (oikean käden peukalo = x, etusormi = y ja keskisormi = z). Pujotetaan akseliksi ohut jäykkä riuku (esim. sukkapuikko) origon ja vastakkaisen kärjen kautta. Akselin päät tuetaan niin, että kuutiota voidaan pyörittää akselin ympäri. Akseliin voi kiinnittää sitä vastaan kohtisuorassa tasossa ympyränmuotoisen levyn, jolla akselia voi pyörittää. Levyn kehälle voi laittaa kynällä merkit 120° asteen välein.

Esimerkki. Alkupistettä **(a)** $q = (0,0,a)$, **(b)** $q = (1,2,0)$, **(c)** $q = (1,1,1)$ kierretään kulman $\theta = \pi/2 = 90°$ verran z-akselin ympäri. Määritä kierron loppupiste q'.

Ratkaisu:

(a) Annetuilla arvoilla $u = k$ ja $\theta = \pi/2$ saamme ensin Eulerin kaavalla

$$e^{u(\theta/2)} = \cos(\theta/2) + u\sin(\theta/2) = \cos(\pi/4) + k\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+k),$$

$$e^{u(-\theta/2)} = \cos(-\theta/2) + u\sin(-\theta/2) = \cos(-\pi/4) + k\sin(-\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-k).$$

Sijoittamalla em. arvot sekä alkupiste $q = ak$ voileipäkaavaan saamme

$$q' = e^{u(\theta/2)} \cdot q \cdot e^{u(-\theta/2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+k) \cdot (ak) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1-k)$$

ja edelleen

$$\begin{aligned} q' &= \frac{1}{2}a(1+k) \cdot k \cdot (1-k) \\ &= \frac{1}{2}a(k-1) \cdot (1-k) \\ &= \frac{1}{2}a(k+1-1+k) \\ &= \frac{1}{2}a(2k) \\ &= ak = (0,0,a) \end{aligned}$$

Kierron jälkeen piste q on siis alkuperäisessä paikassa. Näinhän täytyy ollakin, koska kiertoakselilla olevat pisteet eivät siirry minnekään.

(b) Saman kierron alkupiste on $q = (1,2,0) = i + 2j$, joten

$$q' = e^{u(\theta/2)} \cdot q \cdot e^{u(-\theta/2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+k) \cdot (i+2j) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1-k)$$

ja edelleen

$$\begin{aligned} q' &= \frac{1}{2}(1+k) \cdot (i+2j) \cdot (1-k) \\ &= \frac{1}{2}(i+2j+j-2i) \cdot (1-k) \\ &= \frac{1}{2}(-i+3j) \cdot (1-k) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(-i - j + 3j - 3i) = \frac{1}{2}(-4i + 2j)$$
$$= -2i + j = (-2,1,0),$$

joka on geometrisen havainnonkin mukaan oikea tulos.

(c) Nyt saman kierron alkupiste on $q = (1,1,1) = i + j + k$, joten

$$q' = e^{u(\theta/2)} \cdot q \cdot e^{u(-\theta/2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + k) \cdot (i + j + k) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - k)$$

ja edelleen

$$q' = \frac{1}{2}(1 + k) \cdot (i + j + k) \cdot (1 - k)$$
$$= \frac{1}{2}(i + j + k + j - i - 1) \cdot (1 - k)$$
$$= \frac{1}{2}(2j + k - 1) \cdot (1 - k)$$
$$= \frac{1}{2}(2j - 2i + k + 1 - 1 + k) = \frac{1}{2}(-2i + 2j + 2k)$$
$$= -i + j + k = (-1,1,1),$$

joka on sopusoinnussa geometrisen havainnon kanssa.

Huomautus 1. Edellä esitetyt esimerkit vahvistavat luottamusta Hamiltonin kiertokaavan oikeellisuuteen, mutta eivät tietenkään todista sitä.

Huomautus 2. Hamiltonin 1840-luvulla todistama kiertokaava jäi unohduksiin, mutta löydettiin uudelleen vuosituhannen vaihteessa ja se on tänään laajalti käytössä digitaalitekniikkaan perustuvan visuaalisen grafiikkaohjelmoinnin, aeronautiikan ja avaruusnavigaation työkaluna.

Huomautus. Tarkkaavainen lukija ehkä huomasi edellä, että kuvioissa 2.6.2 ja 2.6.3 kuvatut avaruuskierrot poikkeavat toisistaan, vaikka ne ovatkin saman asian eri versioita.

Kuviossa 2.6.2 (*Eulerin kierto*) on kyseessä *koordinaatiston* kierto: ortogonaalinen xyz-akselisto kierrettiin jäykkänä uuteen asentoon XYZ- akselistoksi. Avaruuden pisteet ovat staattisia, mutta niiden koordinaatit muuttuvat. Koordinaatiston kierron määrittää *kolme* riippumatonta reaalilukuparametria α, β ja γ eli ns. Eulerin kulmat.

Kuviossa 2.6.3 (*Hamiltonin kierto*) taas koordinaatisto (xyz- akselisto) on staattinen, mutta avaruudessa olevaa pistemäistä *kohdetta kierretään* valitun akselisuoran ympäri. Kierron määrittävinä parametreina ovat akselin suuntayksikkövektori $u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ ja kiertokulma θ. Tässäkin on *kolme* riippumatonta reaalista parametria u_1, u_2 ja θ. Komponentti u_3 määräytyy komponenteista u_1 ja u_2, koska ${u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2 = 1$.

Geometrisella tarkastelulla voidaan osoittaa, että jokainen Eulerin akselistokierto ($xyz \rightarrow XYZ$) voidaan toteuttaa Hamiltonin kierrolla eli valitsemalla sopiva kiertoakseli u ja kiertokulma θ.

LIITE 1

Mikä on potenssin i^i arvo?

Eulerin kaavan mukaan kompleksiluku z, joka sijaitsee suunnassa θ ja etäisyydellä r origosta, voidaan esittää muodossa $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Kompleksiluku i sijaitsee suunnassa $\theta = \pi/2$ etäisyydellä $r = 1$ origosta, joten

$$i = e^{i(\pi/2)}.$$

Silloin

$$i^i = (i)^i = (e^{i(\pi/2)})^i,$$

mutta peräkkäisen potenssin säännön $(a^x)^y = a^{xy}$ perusteella saamme

$$(e^{i(\pi/2)})^i = e^{i(\pi/2)\cdot i} = e^{-(\pi/2)},$$

koska $i \cdot i = -1$.

Näin saamme tuloksen, jonka mukaan kysytty potenssi on

(1) $\quad i^i = e^{-\pi/2} \approx 0{,}20788$

eli reaaliluku!

Mutta yllätykset eivät pääty tähän.

Tulos (1) saatiin siitä tiedosta, että kompleksiluku i sijaitsee suunnassa $\theta = \pi/2$. Mutta yhtä hyvin se sijaitsee suunnassa $\theta = \pi/2 + 2\pi = 5\pi/2$, jonka perusteella saamme

(2) $\quad i^i = e^{-5\pi/2} \approx 0{,}000388,$

joten potenssilla i^i näyttää olevan kaksi reaalilukuarvoa[1].

---

[1] Tästä muistui mieleeni lukioaikojeni (1961-1964) neliöjuuren määritelmä, Silloin $\sqrt{2}$ oli luku, jonka neliö on 2. Neliöjuurella oli siis kaksi reaaliarvoa! Sittemmin määritelmää on oppikirjoissa tarkennettu niin, että $\sqrt{2}$ tarkoittaa ei-negatiivista lukua, jonka neliö on 2.

Eikä tämäkään riitä, koska kaikki kulmat $\theta = \pi/2 + n \cdot 2\pi = (4n+1)\pi/2$, missä n saa olla mikä tahansa kokonaisluku, kelpaavat imaginaariyksikön i suuntakulmaksi. Saamme siis

(3) $$i^i = e^{-(4n+1)\pi/2}.$$

Potenssilla i^i on siis äärettömän monta arvoa, jotka ovat kaikki positiivisia reaalilukuja. Ne voivat olla mielivaltaisen suuria, mutta myös mielivaltaisen lähellä nollaa.

Leikkiä voisi jatkaa kvaternioihin. Potensseille j^j ja k^k saadaan (Eulerin kaavan perusteella) samat arvot kuin potenssille i^i. Mutta sama Eulerin kaava $e^{u\theta} = \cos\theta + u\sin\theta$ pätee mille tahansa yksikkövektorikvaterniolle u, esimerkiksi $u = (i+j+k)/\sqrt{3}$, joten potenssin u^u mahdolliset arvot ovat samat kuin potensseilla i^i, j^j tai k^k.

Ja entäpä sekapotenssit $i^j, k^i, j^u, \ldots$?

KVATERNIOLÄHTEITÄ

1. ERÄITÄ WIKIPEDIAN ARTIKKELEITA (in English)

Quaternion

Monipuolinen katsaus kvaternioihin.

Quaternions and spatial rotation

Kvaterniot ja kolmiulotteisen avaruuden kierto

William Rowan Hamilton

Henkilöartikkeli kvaternioiden isästä.

Euler-Rodrigues formula

Selonteko mainittujen herrojen kiertomuunnoksesta ja sen yhteys kvaternioihin.

Euler´s four-square identity

Selonteko Eulerin tuloksesta, joka sisälsi kvaternion idean puoli vuosisataa ennen Hamiltonia.

Euler angles

Selonteko avaruuskoordinaatiston kierron hallinnasta Eulerin kulmamenetelmällä ja sen eri versioilla.

Classical Hamiltonian quaternions

Kuvaus Hamiltonin alkuperäisestä kvaternioversiosta.

Hamilton Walk

Artikkeli kertoo Dublinissa lokakuun 16. päivänä järjestettävästä vuotuisesta Hamilton kävelystä, jossa muistellaan Hamiltonin kvaternio-oivallusta Brougham-sillalla 16.10.1843,

Quaternion group

Matemaattiseen ryhmäteoriaan liittyvä artikkeli kertoo *kvaternioryhmästä* ja sen ominaisuuksista.

Quaternionic analysis

Selonteko kvaternioanalyysistä, esim. kvaterniomuuttujan funktion derivaatasta.

Plate trick

Hauska kuvaus lautastempusta (Balinese candle dance), jota voidaan esittää matemaattisesti kvaternioilla. Lautastemppu kuvaa myös eräiden alkeishiukkasten spin-ominaisuuksiin.

Biquaternion

Selonteko Hamiltonin itsensä 1844 esittämästä yleisemmästä *bikvaternion* käsitteestä, joissa komponentit t, x, y, z saavat olla kompleksilukuja. Bikvaternioita voidaan käyttää mm. suhteellisuusteorian Lorentz-muunnoksen esittämiseen.

2. MUITA VERKKOLÄHTEITÄ

http://www.chrobotics.com/library/understanding-quaternions

Tietoa kvaternioiden käytöstä robotiikassa.

3. LADATTAVIA PDF -ARTIKKELEITA

Girard P.R. (1984): "The quaternion group and modern physics", European Journal of Physics, Volume 5, Number 1, pp. 25-32. *Bibcode:1984EJPh....5...25G. doi:10.1088/0143-0807/5/1/007.*

Girard, Patrick R. (1999): "Einstein´s equations and Clifford algebra" (PDF). Advances in Applied Clifford Algebras. 9 (2): 225-230. *doi:10.1007/BF03042377. S2CID 122211720. Archived from the original (PDF) on 17 December 2010.*

Kvaternioiden uutta tulemista teoreettisessa fysiikassa. (Clifford-algebra on eräs Hamiltonin kvaternioalgebran laajennus.)

4. HAMILTONIN PERUSTEOS

Hamilton, Sir W.R. *(1866).* Hamilton, W.E. *(ed.).* Elements of Quaternions*. London, UK: Longmans, Green, & Co.* (842 pp.)

Hamiltonin (k. 1865) alkuperäisjärkäle, jota hän ei itse ehtinyt nähdä julkaistuna ja jonka hänen poikansa toimitti. Järkäle on ladattavissa verkosta (linkki yllä) kirjan sivujen valokuvina. Melko raskasta luettavaa!

5. KOMPLEKSINEN KOMPAKYSYMYS

Karttunen, Hannu (2006). *Matematiikka*. Ursan julkaisu 99 sarjassa Tiedettä kaikille.

Tähtitieteilijän laatima erinomainen yleiskatsaus matematiikasta. Sivulta 33 löysin tämän hauskan potenssin i^i.