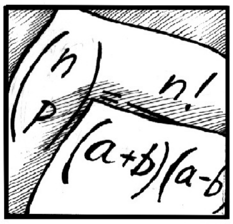


Solmun tehtävien ratkaisut

Solmun numerossa 3/2020 julkaistiin kaksi tehtäväsarjaa, tehtävät I lukiolaisten lisäksi myös edistyneille yläkoululaisille ja tehtävät II lukion pitkän matematiikan oppilaille. Julkaisemme nyt tehtävien ratkaisut.

Tehtävät I

I.1. Kumpulan Pallo teki jalkapalloturnauksen neljässä ottelussa yhteensä kolme maalia. Vastustajina olleet joukkueet tekivät Kumpulan Palloa vastaan pelatessaan yhteensä kaksi maalia. Voitosta saa kolme pistettä, tasapelistä saa yhden pisteen ja tappiosta ei saa yhtään pistettä. Kuinka monta pistettä Kumpulan Pallolla on mahdollista olla pelattujen neljän pelin jälkeen?

Ratkaisu. Kumpulan Pallon kolme maalia on ollut mahdollista tehdä yhdessä, kahdessa tai kolmessa ottelussa. Vastustajien kaksi maalia on voitu tehdä yhdessä tai kahdessa ottelussa. Näin ollen neljän ottelun tulokset voivat olla mitkä tahansa seuraavista 15 mahdollisuudesta (ei välttämättä esitetyssä järjestyksessä):

3–2, 0–0, 0–0, 0–0. Pisteet ovat $3+1+1+1=6$.

3–0, 0–2, 0–0, 0–0. Pisteet ovat $3+0+1+1=5$.

3–0, 0–1, 0–1, 0–0. Pisteet ovat $3+0+0+1=4$.

3–1, 0–1, 0–0, 0–0. Pisteet ovat $3+0+1+1=5$.

2–2, 1–0, 0–0, 0–0. Pisteet ovat $1+3+1+1=6$.

2–0, 1–2, 0–0, 0–0. Pisteet ovat $3+0+1+1=5$.

2–0, 1–0, 0–2, 0–0. Pisteet ovat $3+3+0+1=7$.

2–1, 1–1, 0–0, 0–0. Pisteet ovat $3+1+1+1=6$.

2–1, 1–0, 0–1, 0–0. Pisteet ovat $3+3+0+1=7$.

2–0, 1–1, 0–1, 0–0. Pisteet ovat $3+1+0+1=5$.

2–0, 1–0, 0–1, 0–1. Pisteet ovat $3+3+0+0=6$.

1–2, 1–0, 1–0, 0–0. Pisteet ovat $0+3+3+1=7$.

1–0, 1–0, 1–0, 0–2. Pisteet ovat $3+3+3+0=9$.

1–1, 1–1, 1–0, 0–0. Pisteet ovat $1+1+3+0=5$.

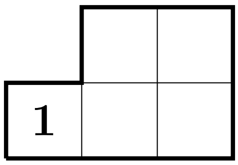
1–1, 1–0, 1–0, 0–1. Pisteet ovat $1+3+3+0=7$.

Kumpulan Pallolla voi siis olla 4, 5, 6, 7 tai 9 pistettä.

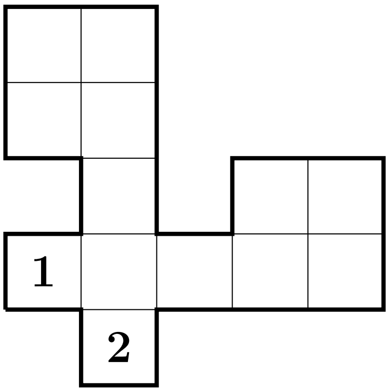
I.2. Roope-robotti on suljettu huoneeseen, joka on ruudutettu tilanteen hahmottamisen helpottamiseksi. Roope kulkee suoraan yhteen suuntaan, kunnes törmää seinään. Silloin hän kääntyy oikealle ja jatkaa suoraan kääntymäänsä suuntaan. Jos oikealla on seinä ja hän ei voi kääntyä oikealle, niin hän kääntyy vasemmalle ja jatkaa suoraan kääntymäänsä suuntaan. Jos hän ei voi kääntyä oikealle eikä vasemmalle, hän pysähtyy ja jää kyseiseen ruutuun.

Kuvassa 1 on huone, jossa Roopen lähtiessä liikkeelle ruudusta 1 hän kiertää koko huoneen ja päätyy takaisin ruutuun 1, johon pysähtyy. Kuvassa 2 on huone, jossa Roopen lähtiessä liikkeelle ruudusta 1 tai ruudusta 2 hän päätyy takaisin lähtöruutuun ja pysähtyy siihen. Kuvassa 3 on huone, jossa Roopen lähtiessä ruudusta 1 hän päätyy ruutuun 2 ja pysähtyy siihen, ja lähtiessään ruudusta 2 hän päätyy ruutuun 1 ja pysähtyy siihen.

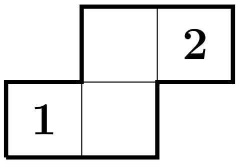
Piirrä huone, jossa on neljä aloitusruutua: Jos Roope lähtee liikkeelle ruudusta 1, hän päätyy ruutuun 2 ja pysähtyy siihen. Jos Roope lähtee liikkeelle ruudusta 2, hän päätyy ruutuun 3 ja pysähtyy siihen. Jos Roope lähtee liikkeelle ruudusta 3, hän päätyy ruutuun 1 ja pysähtyy siihen. Jos Roope lähtee liikkeelle ruudusta 4, hän päätyy takaisin ruutuun 4 ja pysähtyy siihen.



Kuva 1.

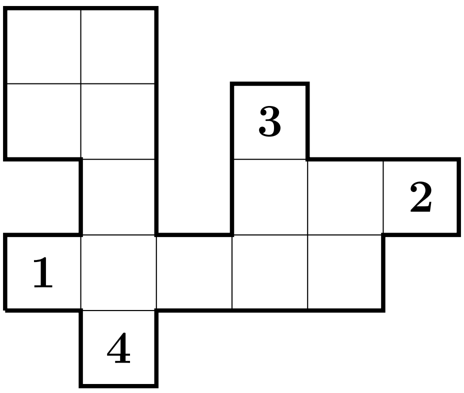


Kuva 2.



Kuva 3.

Ratkaisu. Huone ja aloitusruudut voivat olla esimerkiksi seuraavat:

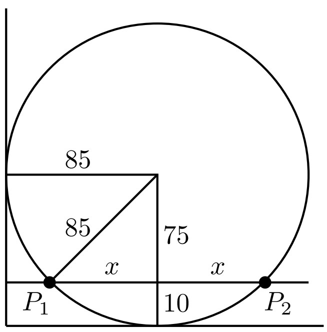


I.3. Pyöreä pöytä on huoneen kulmassa, katso kuva. Pöydän halkaisija on 170 cm. Pöydän reunassa oleva kohta on 10 cm etäisyydellä kuvassa vaakasuorassa olevasta seinästä. Laske kohdan etäisyys kuvassa pystysuorassa olevasta seinästä.

Ratkaisu. Seinästä 10 cm etäisyydellä oleva kohta voi olla kahdessa pisteessä pöydän reunassa. Merkitään näitä pisteitä P_1 ja P_2, katso kuva. Kuvan merkinnöin Pythagoraan lauseen perusteella

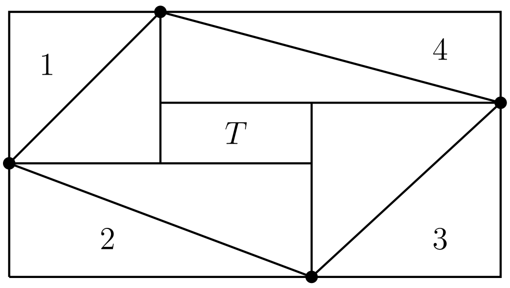
$$x^2 = 85^2 - 75^2 = 1600,$$

joten $x = 40$ cm. Näin ollen pisteen P_1 etäisyys pystysuorasta seinästä on $85 - 40 = 45$ cm ja pisteen P_2 etäisyys pystysuorasta seinästä on $85 + 40 = 125$ cm.

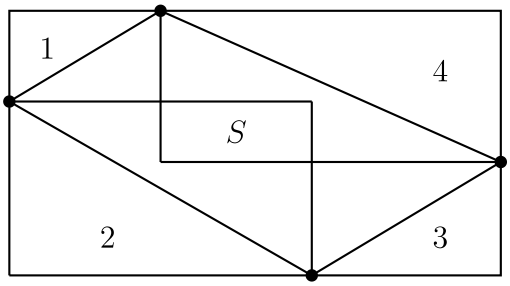


I.4. Suorakulmion jokaiselta sivulta valitaan yksi piste ja vierekkäisten sivujen pisteet yhdistetään toisiinsa janalla. Millä ehdolla muodostuneen nelikulmion pinta-ala on puolet suorakulmion pinta-alasta?

Ratkaisu.

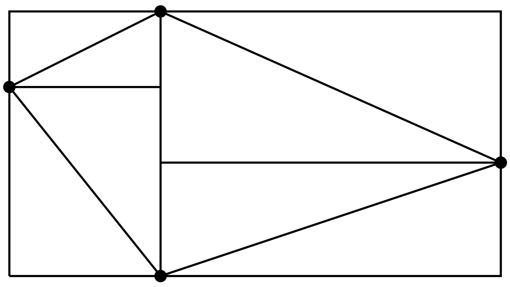


Tarkastellaan yllä olevan kuvan numeroituja kolmioita 1–4 ja niiden kolmiopareja, joilla on sama hypotenuusa. Pareina olevien kolmioiden pinta-alat ovat samat. Suorakulmiossa sisempänä olevat kolmiot eivät ole päällekkäin ja ison suorakulmion sisälle jää pieni suorakulmio T. Tällöin numeroitujen kolmioiden yhteispinta-ala on pienempi kuin puolet ison suorakulmion pinta-alasta. Suorakulmion sisälle muodostuneen nelikulmion pinta-ala on puolet ison suorakulmion pinta-alasta täsmälleen silloin, kun pieni suorakulmio T häviää. Näin tapahtuu silloin, kun ison suorakulmion vastakkaisilta vaakasivuilta valitut pisteet sijaitsevat samalla pystysuoralla tai vastakkaisilta pystysivuilta valitut pisteet sijaitsevat samalla vaakasuoralla.



Pisteiden valinnat ison suorakulmion sivuilta voivat johtaa myös yllä olevassa toisessa kuvassa esitettyyn tilanteeseen, jossa suorakulmiossa sisempänä olevat kolmiot ovat päällekkäin pienen suorakulmion S verran. Tällöin numeroitujen kolmioiden yhteispinta-ala on suurempi kuin puolet ison suorakulmion pinta-alasta. Suorakulmion sisälle muodostuneen nelikulmion pinta-ala on jälleen puolet ison suorakulmion pinta-alasta täsmälleen silloin, kun pieni suorakulmio S häviää. Näin tapahtuu myös nyt silloin, kun ison suorakulmion vastakkaisilta vaakasivuilta valitut pisteet sijaitsevat samalla pystysuoralla tai vastakkaisilta pystysivuilta valitut pisteet sijaitsevat samalla vaakasuoralla.

Ison suorakulmion sisälle muodostuneen nelikulmion pinta-ala on siis puolet suorakulmion pinta-alasta täsmälleen silloin, kun ison suorakulmion vastakkaisilta vaakasivuilta valitut pisteet sijaitsevat samalla pystysuoralla tai vastakkaisilta pystysivuilta valitut pisteet sijaitsevat samalla vaakasuoralla, esimerkkikuva alla.



I.5. Korvaa lausekkeessa

$$1 \circ 2 \circ 3 \circ 4 \circ 5 \circ 6 \circ 7 \circ 8 \circ 9 = 100$$

jokainen ympyrä $\circ$ jonkin peruslaskutoimituksen symbolilla niin, että yhtälö pätee. Sulkeita ei saa käyttää.

Ratkaisu.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9 = 100$$

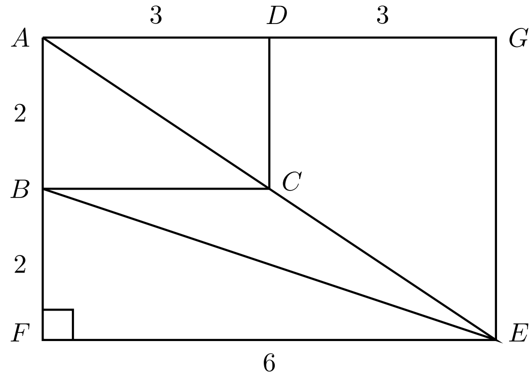
tai

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9 = 100.$$

I.6. Suorakulmion $ABCD$ sivun AB pituus on 2 ja sivun AD pituus on 3. Janat AC ja CE ovat yhtä pitkiä, katso kuva. Mikä on janan BE pituus?

Ratkaisu. Jatketaan kuvassa esitetyn mukaisesti janoja AB ja AD siten, että muodostuu iso suorakulmio $AFEG$. Tällöin suorakulmaisen kolmion BFE hypotenuusa on kysytty jana BE. Koska kateetin BF pituus on 2 ja kateetin FE pituus on 6, niin hypotenuusan BE pituus on Pythagoraan lauseen perusteella

$$|BE| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} \approx 6{,}3.$$



I.7. Ratkaise yhtälö

$$\frac{3x^3}{x^3 - 1} - \frac{x}{x - 1} = 2.$$

Ratkaisu. Oletetaan, että $x \neq 1$. Tällöin

$$\begin{aligned} \frac{3x^3}{x^3 - 1} - \frac{x}{x - 1} &= \frac{3x^3}{(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{x}{x-1} \\ &= \frac{3x^3 - x(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^3 - 1} = 2 \end{aligned}$$

täsmälleen silloin, kun

$$2x^3 - x^2 - x = 2x^3 - 2$$

eli

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

eli $x = -2$ tai $x = 1$. Näistä vain $x = -2$ kelpaa ratkaisuksi.

I.8. Yhtiön vuoden 2019 tulot kasvoivat 25 % ja menot kasvoivat 15 % edellisvuoteen verrattuna. Yhtiön voitto (= tulot − menot) kasvoi 40 %. Kuinka suuri osuus yhtiön tuloista kului yhtiön menoihin vuonna 2019?

Ratkaisu. Merkitään vuoden 2018 tuloja T_{2018}, vuoden 2019 tuloja T_{2019}, vuoden 2018 menoja M_{2018} ja vuoden 2019 menoja M_{2019}. Tiedetään, että

$$T_{2019} = 1{,}25T_{2018}, \quad M_{2019} = 1{,}15M_{2018} \quad \text{ja}$$
$$T_{2019} - M_{2019} = 1{,}4(T_{2018} - M_{2018}).$$

Kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$T_{2018} = \frac{8}{10} T_{2019} \quad \text{ja} \quad M_{2018} = \frac{20}{23} M_{2019},$$

jotka kolmanteen yhtälöön sijoittamalla saadaan

$$T_{2019} - M_{2019} = \frac{14}{10}\left(\frac{8}{10} T_{2019} - \frac{20}{23} M_{2019}\right).$$

Näin ollen

$$\frac{5}{23} M_{2019} = \frac{3}{25} T_{2019},$$

joten

$$\frac{M_{2019}}{T_{2019}} = \frac{3}{25} \cdot \frac{23}{5} = \frac{69}{125} = 0{,}552.$$

Näin ollen 55,2 % yhtiön tuloista kului yhtiön menoihin vuonna 2019.

I.9. Kuusi korttia numeroidaan yhdestä kuuteen ja sekoitetaan. Kolme korttia nostetaan peräkkäin ilman takaisinpanoa. Mikä on todennäköisyys, että tuloksena saatu kolmen luvun jono on kasvava?

Ratkaisu. Kuudesta kortista voidaan kolme korttia nostaa $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ eri tavalla. Kasvavia kolmen luvun jonoja ovat 123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156, 234, 235, 236, 245, 246, 256, 345, 346, 356 ja 456, joita on yhteensä 20. Näin ollen kysytty todennäköisyys on

$$\frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$$

Tehtävät II

II.1. Reaaliluvulle x pätee $x + \frac{1}{x} = 5$. Määritä lukujen $x^2 + \frac{1}{x^2}$ ja $x^3 + \frac{1}{x^3}$ tarkat arvot.

Ratkaisu. Koska

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2,$$

niin

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 5^2 - 2 = 23.$$

Koska

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 &= x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \\ &= x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} \\ &= x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right),\end{aligned}$$

niin

$$\begin{aligned}x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 5^3 - 3 \cdot 5 = 110.\end{aligned}$$

II.2. Ratkaise yhtälö

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x}.$$

Ratkaisu. Koska yhtälössä esiintyvien nimittäjien on oltava nollasta poikkeavia, niin on oltava $x \neq n \cdot \frac{\pi}{4}$, missä $n \in \mathbb{Z}$. Sinin kaavoja $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ja $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x = 4 \sin x \cos x \cos 2x$ käyttämällä saadaan yhtälö kirjoitettua muodossa

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{2 \sin x \cos x} = \frac{2}{4 \sin x \cos x \cos 2x},$$

josta samannimisiksi laventamalla

$$\frac{4 \cos x \cos 2x - 2 \cos 2x}{4 \sin x \cos x \cos 2x} = \frac{2}{4 \sin x \cos x \cos 2x}$$

ja edelleen

$$4 \cos x \cos 2x - 2 \cos 2x = 2.$$

Nyt kosinin kaavaa $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ käyttämällä saadaan

$$4 \cos x (2 \cos^2 x - 1) - 2(2 \cos^2 x - 1) = 2,$$

joten

$$\cos x (2 \cos^2 x - \cos x - 1) = 0.$$

Koska $x \neq n \cdot \frac{\pi}{4}$, niin $\cos x \neq 0$, ja näin ollen on oltava

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4},$$

joten $\cos x = -\frac{1}{2}$ tai $\cos x = 1$. Näistä vain ensimmäinen ratkaisu kelpaa, joten

$$x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad \text{tai} \quad \frac{4\pi}{3} + k2\pi, \quad \text{missä } k \in \mathbb{Z}.$$

II.3. Määritä peräkkäiset kokonaisluvut, joiden summa on 100.

Ratkaisu. Merkitään peräkkäisten kokonaislukujen lukumäärää n ja ensimmäistä lukua a. Koska lukujen keskiarvo kerrottuna lukujen määrällä on 100, toisin sanoen

$$\frac{a + a + (n - 1)}{2} \cdot n = \frac{n(2a + n - 1)}{2} = 100,$$

niin

$$n(2a + n - 1) = 200.$$

Koska n on positiivinen kokonaisluku, niin myös $2a + n - 1$ on positiivinen kokonaisluku. Havaitaan lisäksi, että luvuilla n ja $2a + n - 1$ on erilainen *pariteetti*, eli luvuista toinen on parillinen ja toinen on pariton. Tästä seuraa, että n on luvun 200 tekijä, joka on joko pariton tai luvulla 8 jaollinen. Jälkimmäinen havainto seuraa siitä, että jos n on parillinen, niin $2a+n-1$ on pariton, joten luvussa $200 = n(2a+n-1) = 2^3 \cdot 5^2$ on tekijän 2^3 oltava luvun n tekijä. Näin ollen n voi olla 1, 5, 8, 25, 40 tai 200, joita vastaavat luvut a saadaan yhtälöstä

$$a = \frac{200 - n^2 + n}{2n}.$$

Lukua $n = 1$ vastaa siis luku $a = 100$, lukua $n = 5$ vastaa luku $a = 18$, lukua $n = 8$ vastaa luku $a = 9$, lukua $n = 25$ vastaa luku $a = -8$, lukua $n = 40$ vastaa luku $a = -17$ ja lukua $n = 200$ vastaa luku $a = -99$. Peräkkäisten kokonaislukujen summa on näin ollen 100 seuraavissa kuudessa tapauksessa:

$$\begin{aligned}
&100;\\
&18, 19, 20, 21, 22;\\
&9, 10, 11, \dots, 15, 16;\\
&-8, -7, -6, \dots, 15, 16;\\
&-17, -16, -15, \dots, 21, 22;\\
&-99, -98, -97, \dots, 99, 100.
\end{aligned}$$

II.4. Osoita, että epäyhtälö

$$\frac{x^2+xy+y^2}{3} \le \frac{x+y}{2} \cdot \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

pätee kaikilla positiivisilla luvuilla x ja y.

Ratkaisu. Korottamalla epäyhtälö puolittain toiseen potenssiin saadaan yhtäpitävä epäyhtälö

$$\frac{(x^2+xy+y^2)^2}{9} \le \frac{(x+y)^2(x^2+y^2)}{8},$$

joten

$$8(x^2+xy+y^2)^2 \le 9(x+y)^2(x^2+y^2)$$

ja edelleen

$$\begin{aligned}
0 &\le x^4 + y^4 + 2x^3y + 2xy^3 - 6x^2y^2\\
&= (x^2-y^2)^2 + 2xy(x-y)^2.
\end{aligned}$$

Viimeinen lauseke on ei-negatiivinen kaikilla positiivisilla luvuilla x ja y, joten väite on todistettu. □

II.5. Heitetään kolikkoa 10 kertaa peräkkäin. Jos saadaan kruuna, niin kirjoitetaan paperille numero 2. Jos saadaan klaava, niin kirjoitetaan paperille numero 3. Numerot kirjoitetaan peräkkäin arpomisjärjestyksessä. Mikä on todennäköisyys, että tuloksena saatu 10-numeroinen luku on jaollinen luvulla (a) 3, (b) 4?

Ratkaisu. Mahdollisia 10-numeroisia lukuja on $2^{10} = 1024$.

(a) Tuloksena oleva luku on jaollinen luvulla 3, jos sen numeroiden summa on jaollinen luvulla 3. Koska luku sisältää vain numeroita 2 ja 3, niin numeroiden summa on jaollinen luvulla 3 täsmälleen silloin, kun numeroiden 2 lukumäärä on jaollinen luvulla 3, eli niitä on 0, 3, 6 tai 9. Kun 10-numeroisessa luvussa on n numeroa 2 ja $10-n$ numeroa 3, niin luvulla 3 jaollisia lukuja on

$$\binom{10}{n} = \frac{10!}{n!(10-n)!} = \begin{cases} 1, & n = 0,\\ 120, & n = 3,\\ 210, & n = 6,\\ 10, & n = 9. \end{cases}$$

Näin ollen kysytty todennäköisyys on

$$\frac{1+120+210+10}{1024} = \frac{341}{1024} \approx 0{,}33.$$

(b) Tuloksena oleva luku on jaollinen luvulla 4, jos sen kahden viimeisen numeron muodostama luku on jaollinen luvulla 4. Mahdollisuudet 10-numeroisen luvun kahden viimeisen numeron muodostamiksi luvuiksi ovat 22, 23, 32 ja 33, joista vain luku 32 on jaollinen luvulla 4. Koska $2^8 = 256$ 10-numeroista lukua päättyy numeroihin 32, niin kysytty todennäköisyys on

$$\frac{256}{1024} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

II.6. Millä vakion c arvoilla yhtälöllä

$$x^2 - 2\left|x + \frac{1}{4}\right| + c = 0$$

on täsmälleen kolme ratkaisua?

Ratkaisu. Tapaus 1: $x < -\frac{1}{4}$. Tällöin tarkasteltava yhtälö on $x^2 + 2x + (c + \frac{1}{2}) = 0$. Sen ratkaisu on

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(c+\frac{1}{2})}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2-4c}}{2}$$

ja determinantti on $D_1 = 2 - 4c$.

Tapaus 2: $x \ge -\frac{1}{4}$. Tällöin tarkasteltava yhtälö on $x^2 - 2x + (c - \frac{1}{2}) = 0$. Sen ratkaisu on

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(c-\frac{1}{2})}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{6-4c}}{2}$$

ja determinantti on $D_2 = 6 - 4c$.

Jos $D_1 = 0$, niin $c = \frac{1}{2}$, ja yhtälön kolme ratkaisua ovat

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-2 \pm \sqrt{2 - 4 \cdot \frac{1}{2}}}{2} = -1,\\
x_2 &= \frac{2 - \sqrt{6 - 4 \cdot \frac{1}{2}}}{2} = 0,\\
x_3 &= \frac{2 + \sqrt{6 - 4 \cdot \frac{1}{2}}}{2} = 2.
\end{aligned}$$

Jos $D_2 = 0$, niin $c = \frac{3}{2}$. Tällöin $D_1 = 2-4\cdot\frac{3}{2} = -4 < 0$, joten yhtälöllä on vain yksi ratkaisu.

Jos molemmat determinantit D_1 ja D_2 ovat positiivisia, niin yhtälön neljästä juuresta kahden on oltava samoja, jotta yhtälöllä olisi vaaditut kolme ratkaisua. Merkitään yhtälön neljää juurta

$$x_1 = -1 + \sqrt{\frac{1}{2} - c}, \quad x_2 = -1 - \sqrt{\frac{1}{2} - c},$$
$$x_3 = 1 + \sqrt{\frac{3}{2} - c}, \quad x_4 = 1 - \sqrt{\frac{3}{2} - c}.$$

Ratkaisut x_1 ja x_2 eivät voi olla samoja, eivätkä ratkaisut x_3 ja x_4. Selvästi x_3 on suurempi kuin x_1 ja x_2.

Jos $x_1 = x_4$, niin

$$-1 + \sqrt{\frac{1}{2} - c} = 1 - \sqrt{\frac{3}{2} - c}$$

eli

$$\sqrt{\frac{1}{2} - c} + \sqrt{\frac{3}{2} - c} = 2.$$

Korottamalla yhtälö puolittain toiseen saadaan

$$2 - 2c + 2\sqrt{\frac{3}{4} + c^2 - 2c},$$

eli

$$2 + 2c = 2\sqrt{\frac{3}{4} + c^2 - 2c}$$

ja edelleen

$$1 + c = \sqrt{\frac{3}{4} + c^2 - 2c}.$$

Korottamalla yhtälö jälleen puolittain toiseen saadaan

$$c^2 + 2c + 1 = \frac{3}{4} + c^2 - 2c,$$

joten

$$4c = -\frac{1}{4} \quad \text{eli} \quad c = -\frac{1}{16}.$$

Yhtälön kolme ratkaisua ovat siis

$$x_1 = -1 + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{16}} = x_4 = 1 - \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{16}} = -\frac{1}{4},$$
$$x_2 = -1 - \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{16}} = -1\frac{3}{4},$$
$$x_3 = 1 + \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{16}} = 2\frac{1}{4}.$$

Jos $x_2 = x_4$, niin vastaavasti kuin edellä saadaan $c = -\frac{1}{16}$. Tämä ei kuitenkaan ole yhtälön ratkaisu, sillä

$$-1 - \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{16}} \neq 1 - \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{16}}.$$

Väärään ratkaisuun johtaa ensimmäinen yhtälön puolittain toiseen korottaminen, koska yhtälössä toinen puoli on negatiivinen ja toinen positiivinen. Ei siis ole mahdollista, että yhtälöllä olisi täsmälleen kolme ratkaisua siten, että $x_2 = x_4$.

Yhteenvetona, tarkasteltavalla yhtälöllä on täsmälleen kolme ratkaisua, jos $c = \frac{1}{2}$ tai $c = -\frac{1}{16}$.

II.7. Mikä on luvun

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{n}$$

desimaalilukuesityksessä desimaaliosan ensimmäinen numero (siis ensimmäinen numero pilkun jälkeen)?

Ratkaisu. Ensimmäisten n positiivisen kokonaisluvun ja niiden neliöiden summakaavojen perusteella

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{n} &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\right)\\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right)\\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n+1}{2}\\ &= \frac{(n+1)(2n+4)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)}{3}.\end{aligned}$$

Jos jaettaessa luku n luvulla 3 jakojäännökseksi tulee 1 tai 2, niin osoittajassa oleva luku $(n+1)(n+2)$ on jaollinen luvulla 3. Tällöin luvun desimaalilukuesityksessä desimaaliosan ensimmäinen numero on 0. Jos luku n on jaollinen luvulla 3, niin jaettaessa osoittajassa oleva luku $(n+1)(n+2) = n^2+3n+2$ luvulla 3 saadaan jakojäännökseksi 2. Tällöin luvun desimaalilukuesityksessä desimaaliosan ensimmäinen numero saadaan murtoluvun $\frac{2}{3}$ ensimmäisestä desimaalista, joka on 6.

Lähde: KöMaL

Käännös ja sovitus suomeksi: Mika Koskenoja