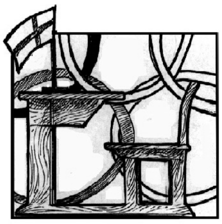


Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset 2021

Veera Nurmela, Tianyue Sun ja Anni Tapionlinna

Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset eli EGMO järjestettiin jo toista kertaa etäkilpailuina 9.–15.4.2021. Kilpailujen järjestäjämaana toimi Georgia. Suomi sijoittui parhaiten osallistuneista Pohjoismaista, ollen 45. yhteensä 55 joukkueen joukossa. Suomen joukkueeseen kuuluivat Aino Aulanko, Veera Nurmela, Tianyue Sun ja Anni Tapionlinna.

Tehtävät olivat molempina kilpailupäivinä haastavat, mikä näkyi matalina mitalirajoina. Tänä vuonna pronssimitalin saamiseen olisi riittänyt kahdeksan pistettä, kun jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on seitsemän pistettä.

Veera Nurmelan kokemuksia kilpailusta

Sain kunnian osallistua nyt neljättä kertaa Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaisiin. Kilpailu oli, kuten edellisinä vuosinakin, hieno kokemus. Kilpailusta jäi mieleen niin matematiikkaan liittyviä ajatuksia kuin muistoja mukavista tapahtumista.

Vaikka kilpailut järjestettiin etänä, sain tutustua joukkueeseemme ja muiden maiden kilpailijoihin internetin välityksellä sekä mielenkiintoisiin tehtäviin. Kilpailun perinteiset alku- ja loppuseremoniat olivat juhlallisia etätilaisuuksia. Muihin kilpailijoihin pääsin tutustumaan rennosti pelien ja muiden yhteisten aktiviteettien kautta.

Harjoittelin kilpailuihin ylioppilaskirjoitusten kiireiden loputtua edellisvuosien tehtävien ja valmennuksen materiaalin avulla. Odotin kilpailua hieman jännittyneenä, sillä luvassa oli taas haastavia matemaattisia ongelmia.

Oletetusti tänäkin vuonna tehtävät olivat vaikeita, mutta monilta osin lähestyttäviä. Neljän ja puolen tunnin kilpailuaika kului molempina päivinä hujauksessa. Ensimmäisenä päivänä ensimmäinen lukuteorian tehtävä oli kiinnostava. Sain nopeasti tähän tehtävään ideoita siitä, millaisella jaollisuuteen perustuvalla tavalla voitaisiin päätellä lukujen olevan ihkuja. Kuitenkin liian nopea ideointini tuotti ajatteluvirheen, jonka huomasin ensimmäisen kilpailupäivän jälkeen.

Toinen päivä sujui paremmin, tehtävissä oli omaa suosikkialuettani geometriaa ja kombinatorista geometriaa. Geometrian tehtävän kanssa pääsin hyvin vauhtiin ja löysin tehtävän ratkaisun kannalta olennaisia tuloksia. Kuitenkaan en ehtinyt näitä kaikkia osoittamaan ja viemään tehtävää loppuun. Tehtävät osoittautuivat vaikeiksi muillekin ja sijoitukseni olikin suhteellisesti parhaani.

Olin hyvin iloinen, että pääsin osallistumaan kilpailuun vielä viimeistä kertaa. Matematiikkavalmennuksen ja kilpailuiden myötä on ollut mukava seurata omaa kehittymistäni, kohdata kerta toisensa jälkeen haastavia ongelmia sekä tavata muita matematiikasta innostuneita henkilöitä. Vuosien aikana olen huomannut, että tehtäviin löytää entistä enemmän ja nopeammin uusia ideoita sekä tehtäviä tehdessä on kriittisempi oman ratkaisun paikkansapitävyyteen.

Tehtäviä

Tehtävä 1. Luku 2021 on *ihku*. Jos yksikään joukon $\{m, 2m+1, 3m\}$ alkio on ihku, kun m on positiivinen kokonaisluku, niin ne kaikki ovat ihkuja. Seuraako tästä, että luku 2021^{2021} on ihku?

Tehtävä 2. Määritä kaikki funktiot $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, joilla yhtälö
$$f(xf(x)+y) = f(y) + x^2$$
pätee kaikilla rationaaliluvuilla x ja y.

Tehtävä 3. Olkoon ABC kolmio, jossa on tylppä kulma A. Olkoot E ja F ne pisteet, joissa kulman A ulkokulman puolittaja leikkaa kolmion ABC kärkien B ja C kautta kulkevat korkeusjanat tai niiden jatkeet (tässä järjestyksessä). Olkoot M ja N sellaiset janojen EC ja FB pisteet (tässä järjestyksessä), että $\angle EMA = \angle BCA$ ja $\angle ANF = \angle ABC$. Osoita, että pisteet E, F, N, M ovat ympyrällä.

Tehtävä 4. Olkoon kolmion ABC sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste I ja olkoon D mielivaltainen piste sivulla BC. Pisteen D kautta kulkeva suoran BI kanssa kohtisuora suora leikkaa suoran CI pisteessä E. Pisteen D kautta kulkeva suoran CI kautta kohtisuora suora leikkaa suoran BI pisteessä F. Todista, että pisteen A peilaus suoran EF suhteen on suoralla BC.

Tehtävä 5. Tasossa on erityinen piste O, jota kutsutaan origoksi. Olkoon P tason 2021 pisteen joukko, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(i) mitkään joukon P kolme pistettä eivät ole samalla suoralla ja

(ii) mitkään kaksi joukon P pistettä eivät ole suoralla, joka kulkee origon kautta.

Kutsutaan kolmiota *pulleaksi*, jos sen kärjet ovat joukossa P ja piste O on aidosti kolmion sisäpuolella. Määritä pulleiden kolmioiden suurin mahdollinen lukumäärä.

Tehtävä 6. Onko olemassa epänegatiivista kokonaislukua a, jolle yhtälöllä
$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$
on yli miljoona eri ratkaisua (m, n), missä m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja?

Ratkaisut tehtäviin 1, 3 ja 4

Tehtävä 1

Vastaus: Kyllä, 2021^{2021} on ihku. Todistetaan tämä kahden lemman avulla.

Lemma 1. 1 ja 2 ovat ihkuja

Todistus lemmalle 1. Käyttämällä kaavoja m, $2m+1$ ja $3m$ takaperin saadaan:
$$2021 \to 673 \to 224 \to 74 \to 24 \to 8 \to 2 \to 5 \to 1.$$
Täten luvut 1 ja 2 ovat ihkuja.

Lemma 2. n on ihku $\Leftrightarrow$ $3n$, $3n+1$, $3n+2$ ovat ihkuja.

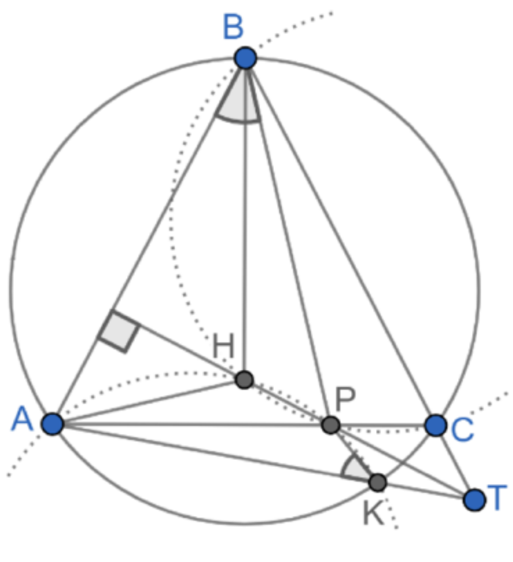
Todistus.
$$\begin{aligned} &n \to 3n \\ &n \to 2n+1 \to 6n+3 \to 3n+1 \\ &n \to 2n+1 \to 4n+3 \to 12n+9 \to 36n+27 \\ &\qquad\qquad \to 18n+13 \to 9n+6 \to 3n+2. \end{aligned}$$
Täten siis n on ihku vain jos $\left[\frac{n}{3}\right]$ on.

Täten lemmoista 1 ja 2, operaatioiden $n \to 3n$, $n \to 3n+1$, $n \to 3n+2$ avulla lähtien luvuista $n = 1$ ja $n = 2$, saadaan, että jokainen positiivinen kokonaisluku on ihku, joten 2021^{2021} on ihku.

Tehtävä 3

Tämän tehtävän ratkaisu perustuu lemmaan, jonka todistus esitetään ennen itse tehtävän ratkaisua.

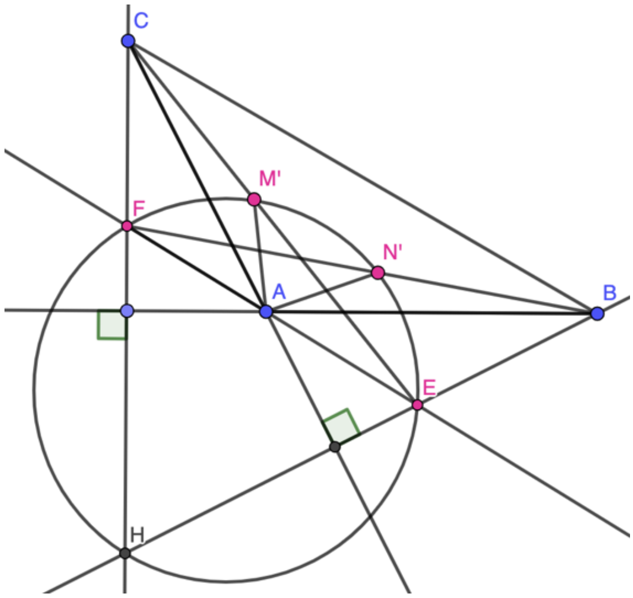
Lemma. Olkoon ABC tasakylkinen kolmio, jolla $AB = BC$ ja olkoon P jokin piste janalla AC. Pisteen P kautta kulkeva normaali janalle AB kohtaa janan BC jatkeen pisteessä T. Jos AT kohtaa kolmion ABC ympäripiirretyn ympyrän uudelleen pisteessä K, niin $\angle AKP = \angle ABP$.



Todistus. Olkoon H kolmion ABC ortokeskus. Tällöin $\angle BHP = 180° - \angle BAC = 180° - \angle BCP$, eli

$BHPC$ on jännenelikulmio. Tästä saamme $TK \cdot TA = TC \cdot TB = TP \cdot TH$, josta seuraa se, että AHPK on myös jännenelikulmio. Nyt $\angle AKP = 180° - \angle AHP = \angle ABP$ ja väite on todistettu.

Nyt voimme palata tehtävän ratkaisuun.



H on B:n ja C:n kautta kulkevien korkeusjanojen leikkauspiste. Piirretään kolmion HEF ympäri ympyrä ja merkitään M':lla ja N':lla sen leikkauspisteitä janojen EC ja BF kanssa. Haluamme nyt osoittaa, että $M = M'$ ja $N = N'$, sillä tästä seuraa, että E, F, M ja N ovat samalla ympyrällä.

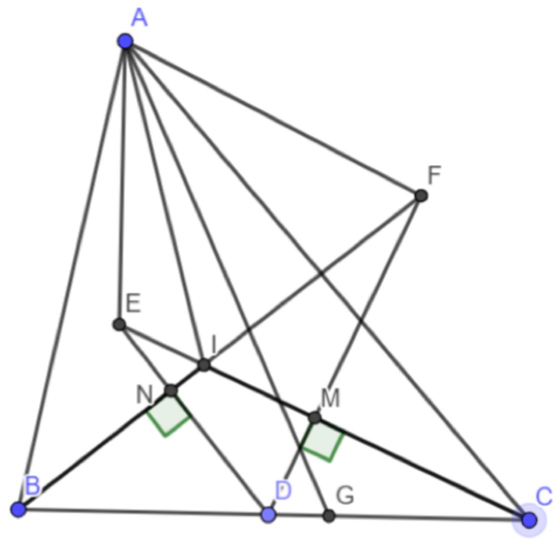
Selkeästi A on kolmion BHC ortokeskus. Tästä seuraa, että $\angle BHA = \angle BCA$, $\angle CHA = \angle CBA$ ja $\angle HBA = \angle HCA$.

Nyt $\angle HEF = \angle HBA + \angle EAB = \angle HCA + \angle FAC = \angle HFE$ eli kolmio HEF on tasakylkinen kolmio, jossa $HE = HF$.

Aikaisemmin todistetun lemman mukaan $\angle AM'E = \angle AHE = \angle ACB$ sekä $\angle AN'F = \angle AHF = \angle ABC$. Tästä seuraa, että $N' = N$ sekä $M' = M$ ja olemme valmiit.

Tehtävä 4

Pyritään ensin todistamaan, että $AFIE$ on jännenelikulmio.



I on kolmion ABC kulmanpuolittajien leikkauspiste. Täten $\angle IBA = \angle DBF$. Kolmiosta BAI saadaan, että $\angle AIB = 180° - \angle BAI - \angle IBA$. Huomataan, että $\angle ICB = \frac{1}{2}\angle ACB = 90° - (\angle BAI + \angle IBA)$. Saadaan

$$\begin{aligned}
&\angle FDB \\
&\quad = 180° - \angle CDF \\
&\quad = 180° - (180° - \angle DMC - \angle ICB) \\
&\quad = 180° - (180° - 90° - (90° - (\angle BAI + \angle IBA)))
\end{aligned}$$

ja $\angle FDB = 180° - \angle BAI - \angle IBA = \angle AIB$. Täten $\angle FBD = \angle AIB$ ja $\angle IBA = \angle DBF$, ja seuraa $\angle BAI = \angle BFD$. Siis kolmiot $\triangle FDB$ ja $\triangle AIB$ ovat yhdenmuotoisia. Yhdenmuotoisuudesta saadaan $\frac{AB}{AF} = \frac{BI}{BD}$. Tiedetään, että $\angle DBI = \angle IBD$. Täten kolmiot $\triangle IBD$ ja $\triangle ABF$ ovat yhdenmuotoiset, sks. Täten siis $\angle IDB = \angle AFB$. Vastaavasti voidaan osoittaa, että kolmiot $\triangle EDC$ ja $\triangle AIC$ sekä kolmiot $\triangle IDC$ ja $\triangle AEC$ ovat yhdenmuotoisia, saadaan $\angle CDI = \angle CEA$. Saadaan $180° = \angle CDI + \angle IDB = \angle IEA + \angle AFI$. Täten $AFIE$ on jännenelikulmio.

Olkoon G kolmioiden AEC ja AFB ympärysympyröiden leikkauspiste. Osoitetaan nyt, että G on sivulla BC.

Koska $AEGC$ on jännenelikulmio, $\angle CEA = \angle CGA$ ja vastaavasti jännenelikulmiosta $AFGB$ saadaan $\angle AFB = \angle AGB$. Täten $\angle CEA + \angle AFB = 180° = \angle CGA + \angle AGB$. Täten G on sivulla BC.

Koska $AEGC$ on jännenelikulmio ja EC on kulmanpuolittaja, on $AE = EG$. Myöskin, koska $AFGB$ on jännenelikulmio ja FB kulmanpuolittaja, on $AF = FG$. Täten kolmiot $\triangle AEF$ ja $\triangle EFG$ ovat yhtenevät, sss. Täten G on piste A peilattuna sivun EF suhteen.