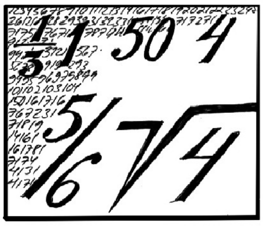


Kun skaalaat, skaalaa kunnolla!

Jukka Liukkonen
Mat. yo. evp.

Johdanto

Todellakin, kysymys on skaalaamisesta, ei skåålaamisesta!

Jos tehtävänä on piirtää tietokoneella kuvaaja tuntemattomalle funktiolle, heti aluksi on päätettävä, mille välille muuttujan arvot rajoitetaan. Ensimmäinen arvaus voi mennä pahasti pieleen, ja funktion oleelliset piirteet eivät tule esille. Tässä kirjoitelmassa perehdytään skaalauksen saloihin ja erityisesti siihen, mitä mielenkiintoista tapahtuu, kun skaalataan liikaa.

Suunnistaja liikkuu maastossa sitä kuvaavan kartan opastamana. Suunnistuksessa kartan mittakaavalla on oleellinen merkitys. Suunnistuskarttojen mittakaavat ovat normaalisti välillä 1:4 000 – 1:15 000. Suurimmassa mittakaavassa 1:4 000 yksi senttimetri kartalla vastaa 4 000 senttimetriä eli 40 metriä maastossa. Sellaisessa kartassa maaston pienetkin yksityiskohdat ovat tarkasti esillä. Pienimmän mittakaavan 1:15 000 kartassa yksi karttasenttimetri vastaa 150 maastometriä. Kartta kattaa suuren alueen, mutta maaston pienimmät piirteet ovat karsiutuneet pois.

Funktioiden kuvaajat ja muut tasokäyrät ovat esimerkkejä tavallisen euklidisen tason osajoukoista. Taso voidaan ajatella maastona ja tason osajoukot maaston piirteinä. Kun funktion kuvaaja piirretään tietokoneen kuvaruudulle, on kysymys suorakulmion muotoisen maastoalueen tarkastelemisesta toisessa mittakaavassa kartan avulla. Kuvaruudulle piirretty kuva on tuo kartta. Kartan mittakaavaa muuttamalla voidaan piirtää kuvia erikokoisista maastoalueista ilman, että kartan kokoa tarvitsee muuttaa. Jos kartalla yksikön mittainen matka vastaa maastossa λ yksikköä, mittakaava on 1:λ. Mitä suurempi λ, sitä pienempi mittakaava, ja sitä suuremman alueen kartta kattaa. Karttasuorakulmion ja maastosuorakulmion tulee olla yhdenmuotoiset, muuten mittakaava on erilainen eri suunnissa.

Aikaisemmin mainittiin liiallinen skaalaus. **Jos skaalaat liikaa, tee se kunnolla, kaikki kohtuuden rajat ylittäen, kaikki!** Tarkoituksena on tutkia tilannetta, jossa kartan mittakaava joko pienenee rajatta ($\lambda \to \infty$) tai suurenee rajatta ($\lambda \to 0$). Maailmankaikkeuttakin havainnoidaan toisaalta valtavilla teleskoopeilla ja toisaalta elektronimikroskoopeilla. Fyysikot ovat vuosikymmenien ajan sinnikkäästi yrittäneet yhdistää mikro- ja makrokosmoksen ilmiöt yhden yhtenäisen teorian alle, mutta toistaiseksi yritykset eivät ole tuottaneet yleisesti hyväksyttyä kaiken teoriaa. Miten on matematiikassa? Voidaanko mikro- ja makrokokoluokassa havaita samankaltaisuuksia?

Maastotason ja karttatason välinen muunnos

Maastokoordinaateista puhuttaessa tarkoitetaan euklidisen tason tavallisen suorakulmaisen xy-koordinaatiston koordinaatteja. Tarkasteltava alue maastossa, josta kartta piirretään, sovitaan origokeskiseksi neliöksi (saks. *das Quadrat*)[1]

$$Q_\lambda := \{(x,y) \mid -\lambda \le x \le \lambda,\ -\lambda \le y \le \lambda\}, \quad \lambda > 0.$$

Karttakoordinaatisto nimetään uv-koordinaatistoksi. Kartta (engl. *map*) on vakiokokoinen origokeskinen neliö

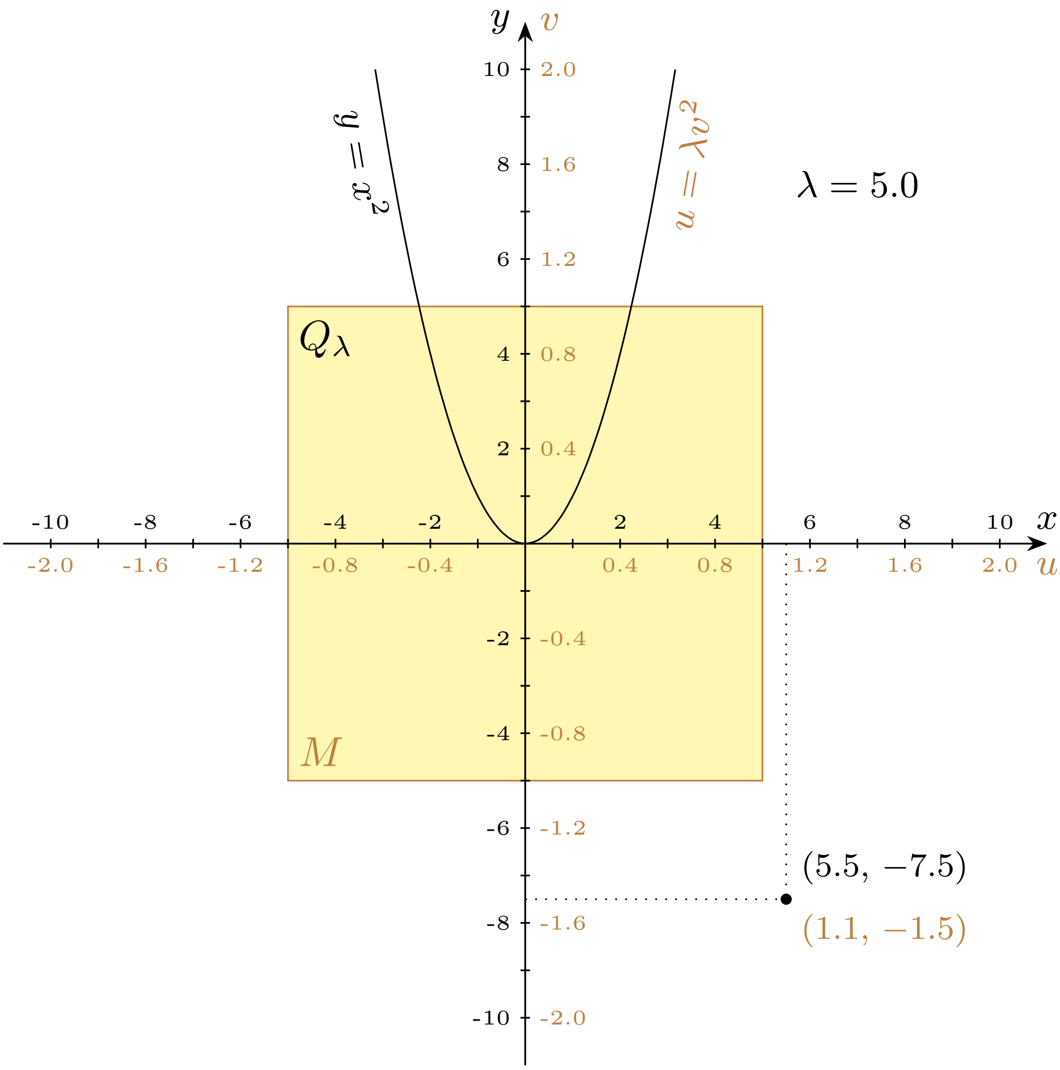
$$M := \{(u,v) \mid -1 \le u \le 1,\ -1 \le v \le 1\}.$$

Se vastaa tietokoneen näytöllä ikkunaa, johon kuvaajia on tarkoitus piirtää.

Maastoneliön Q_λ ja kartan M pisteet vastaavat toisiaan kääntäen yksikäsitteisesti. Vastaavuuden välittää skaalauskuvaus eli **homotetia**

$$h_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (u,v) \mapsto (x,y) = (\lambda u, \lambda v).$$

Vasemmalla puolella $\mathbb{R}^2$ on uv-karttataso, oikealla puolella $\mathbb{R}^2$ on xy-maastotaso. Oikeastaan on kysymys yhdestä ja samasta tasosta, johon on asetettu kaksi eri koordinaatistoa: kiinteä xy-maastokoordinaatisto ja parametrin λ arvosta riippuva uv-karttakoordinaatisto. Origo ja koordinaattiakselit osuvat kohdakkain kummassakin koordinaatistossa, ainoastaan asteikot eroavat toisistaan, kun $\lambda \neq 1$. Tästä johtuen pisteen uv-koordinaatit pitää kertoa luvulla λ, jotta saataisiin saman pisteen xy-koordinaatit. Esimerkki: jos parametrilla λ on arvo 5.0, karttakoordinaateissa lausuttu piste $(u,v) = (1.1, -1.5)$ on maastokoordinaateissa lausuttuna $(x,y) = (5.5, -7.5)$. Piste säilyy samana, ainoastaan pisteen paikan ilmoittamisen tapa muuttuu. Tilannetta on havainnollistettu oheisessa kuvassa. Koordinaatistosta toiseen siirtyminen tarkoittaa tässä tapauksessa mittayksikön vaihtoa. Vertailun vuoksi voidaan ajatella siirtymistä metrijärjestelmästä tuumajärjestelmään.



[1]Symbolien merkitykset tuppaavat lukiessa unohtumaan, ja ne joudutaan palauttamaan mieliin kahlaamalla tekstiä taaksepäin. Muistamisen helpottamiseksi ja hankalan kahlaamisen välttämiseksi tärkeimmät symbolit assosioidaan niiden kielelliseen alkuperään.

Jos xy-maastokoordinaatistossa olisi valmiina käyrä kuten kuvassa, se siirrettäisiin tietokoneen kuvaruudulle seuraavaan tapaan vaiheittain:

1) kiinnitetään mittakaava ja maastoalueen koko valitsemalla arvo parametrille λ;

2) kiinnitetään maastoon uv-karttakoordinaatisto, joka on muuten sama kuin xy-maastokoordinaatisto, mutta uv-uksikkö on λ kertaa niin suuri kuin xy-yksikkö;

3) siirretään 2×2 yksikön kokoinen uv-neliö M kuvaruudulle 2×2 kuvaruutuyksikön kokoiseksi kartaksi.

Todellisuudessa mitään valmista käyrää ei ole olemassa. Sen sijaan on olemassa käyrän piirto-ohje yhtälön muodossa, kuvan mukaisessa tilanteessa $y = x^2$. Se muunnetaan uv-koordinaatistoon homotetian h_λ avulla. Tuloksena on yhtälö $\lambda v = (\lambda u)^2$ eli yhtäpitävästi $v = \lambda u^2$. Yhtälö upotetaan tietokoneohjelmaan ja lasketaan käyrän pisteiden v koordinaatit riittävän tiheälle u-koordinaattien taulukolle. Kuvaruudulla uv-koordinaatiston yksikön pituus voidaan valita vapaasti. Esimerkiksi 9 cm saattaa olla sopiva mittayksikön koko kannettavan tietokoneen ruudulla. Tällöin M nähdään ruudulla $18{\times}18$ neliösenttimetrin kokoisena neliönä. Kuvaaja piirretään lasketun koordinaattitaulukon mukaisesti piirtokomennolla. Graafiseen käyttöliittymään voidaan lisätä parametrin λ arvoa muuttava liukusäädin. Näin kuvaa voidaan zoomailla helposti ja mielin määrin.

Kuten edellä jo esimerkillä näytettiin, käyrät useimmiten esitetään yhtälöinä, ja ne puolestaan voidaan xy-koordinaatistossa kirjoittaa muotoon

$$f(x, y) = 0,$$

missä f on sopiva kahden muuttujan funktio. Vastaava käyrän yhtälö uv-koordinaatistossa on

$$f(\lambda u, \lambda v) = 0.$$

Käyrän piirrettävä osa on xy-tason pistejoukko

$$\{(x, y) \in Q_\lambda \mid f(x, y) = 0\},$$

ja sitä vastaa kartalla joukko

$$\{(u, v) \in M \mid f(\lambda u, \lambda v) = 0\}.$$

Homotetialla h_λ on käänteiskuvaus

$$h_\lambda^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (u, v) = \left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right).$$

Jos taso ajatellaan vain tasona $\mathbb{R}^2$ ilman tulkintaa toisaalta karttatasoksi ja toisaalta maastotasoksi, voidaan kirjoittaa

$$h_\lambda^{-1} = h_{1/\lambda}.$$

Mikä tahansa tason osajoukko A_1 mittakaavaan $1{:}\lambda$ skaalattuna on

$$\begin{aligned} A_\lambda &:= \{(x/\lambda,\, y/\lambda) \mid (x, y) \in A_1\} \\ &= \{h_{1/\lambda}(x, y) \mid (x, y) \in A_1\} = h_{1/\lambda}(A_1). \end{aligned}$$

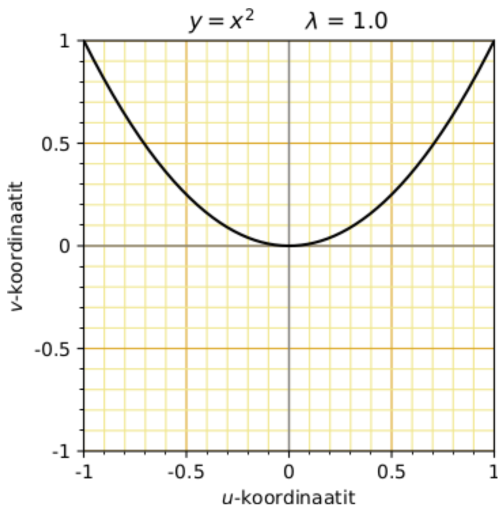
▾ Esimerkki

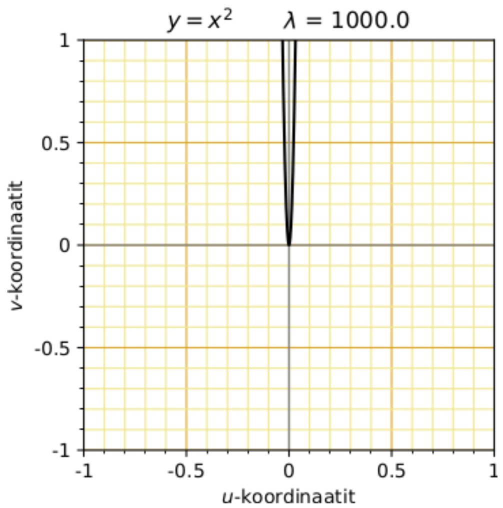
Perusparaabeli on niiden pisteiden (x, y) joukko, jotka toteuttavat yhtälön $y = x^2$. Jos funktio f määritellään asettamalla $f(x, y) = y - x^2$, paraabelin yhtälö saa muodon $f(x, y) = 0$. Paraabeli on siis kahden muuttujan funktion f nollakohtien joukko

$$\{(x, y) \mid f(x, y) = 0\}.$$

Karttakoordinaatistossa paraabelin yhtälö on

$$f(\lambda u, \lambda v) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda v - (\lambda u)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; v = \lambda u^2.$$





Ensimmäisessä kuvassa paraabeli on piirretty "luonnollisessa koossa" mittakaavassa 1:1. Seuraavassa kuvassa mittakaava on 1:1 000. Kun mittakaavaa pienennetään, paraabeli alkaa yhä enemmän muistuttaa origossa seisovaa tikkua, so. positiivista v-akselia ml. origo. Kuvaan on merkitty karttakoordinaattiasteikko. Maastossa eli xy-koordinaatistossa kartta kattaa 2000×2000 kokoisen alueen. ▲

▼ Esimerkki
Hyperbelin yhtälö $x^2 - y^2 = 1$ lausuttuna uv-koordinaatistossa on

$$(\lambda u)^2 - (\lambda v)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad u^2 - v^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

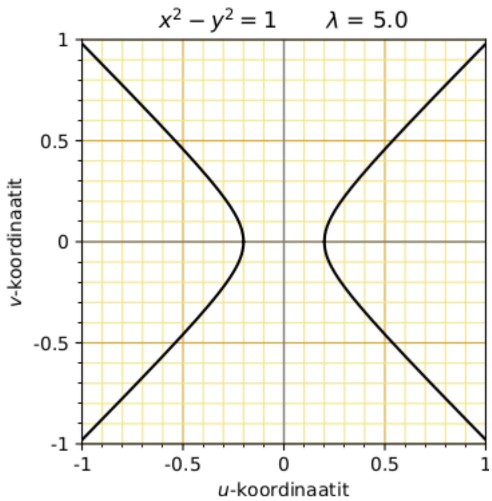
Tässä

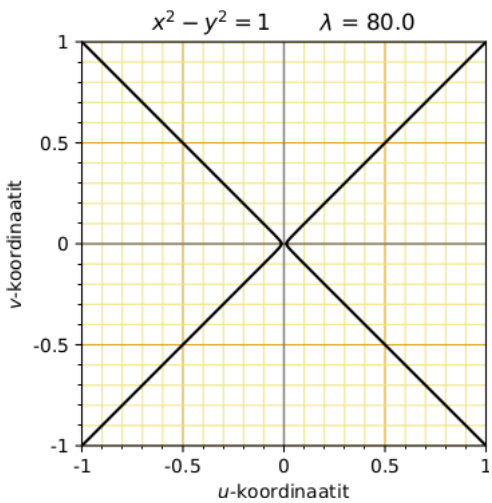
$$f(x,y) = x^2 - y^2 - 1,$$
$$f(\lambda u, \lambda v) = (\lambda u)^2 - (\lambda v)^2 - 1.$$

Kun λ kasvaa rajatta, yhtälö alkaa muistuttaa yhä enemmän yhtälöä

$$u^2 - v^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |u| = |v|,$$

joka esittää kahta toisiaan leikkaavaa origon kautta kulkevaa suoraa kulmakertoimina ± 1. Täten, jos xy-tasosta valitaan liian suuri alue piirrettäväksi, hyperbeli näyttää kuvaruudulla kahdelta ristikkäiseltä suoralta.





Kuviin on piirretty maastotason käyrä $x^2 - y^2 = 1$ kartalle kahdessa eri mittakaavassa, 1:5 ja 1:80. Asteikko on karttatason uv-kooordinaatiston mukainen. ▲

Tason topologiaa

Yleisten johtopäätösten tekeminen yksittäisiä kuvia katselemalla ei liene korrektia matematiikkalehteen tarkoitetussa artikkelissa. Matematiikan olemukseen kuuluu, että käsitteet määritellään täsmällisesti ja väitteet perustellaan sitovasti. Jos lukija kohta putoaa kartalta, ei ole syytä huoleen.[2] Kukin poimii ne hedelmät, jotka ovat kätten ulottuvilla. Määritelmien ja päättelyiden yksityiskohdat ovat vastaaviin ennalta totuttautuneita lukijoita varten. Jotta tasokäyrien skaalauksessa esiintyviä ilmiöitä voitaisiin tutkia, määritellään muutamia käsitteitä topologiaksi nimetyltä matematiikan osa-alueelta.

Sulkeuma ja suljetut joukot

Tason pisteiden $a = (a_1, a_2)$ ja $b = (b_1, b_2)$ **etäisyys** (engl. *distance*) on tunnetusti

$$d(a,b) := \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

Kaavan perusteluksi riittää kaikkien tuntema *Pythagoraan lause*. Etäisyyskäsitteen avulla määritellään r-säteinen **kiekkoympäristö** pisteelle a joukkona

$$B(a,r) := \{ b \in \mathbb{R}^2 \mid d(a,b) < r \}.$$

Merkintä tulee englannin kielen palloa tarkoittavasta sanasta *ball*. Joukko $B(a,r)$ on siis tason niiden pisteiden joukko, joiden etäisyys pisteestä a on pienempi kuin r, ts. tason a-keskisen r-säteisen ympyrän sisäpuoli ilman reunaviivaa. Jos pisteen a jokainen kiekkoympäristö $B(a,r)$, $r > 0$, leikkaa joukkoa A, piste a on joukon A **kosketuspiste**. Joukon A kaikkien kosketuspisteiden joukkoa merkitään $\overline{A}$, ja sitä sanotaan joukon A **sulkeumaksi**. Aina on voimassa

$$A \subset \overline{A}.$$

Jos lisäksi $\overline{A} \subset A$, jolloin $A = \overline{A}$, joukkoa A sanotaan **suljetuksi**. Esimerkiksi kiekkoympäristön sulkeuma saadaan liittämällä joukkoon reunaympyrä:

$$\overline{B(a,r)} = \{ b \in \mathbb{R}^2 \mid d(a,b) \le r \}.$$

Yleisestikin sulkeuman muodostamisessa on kysymys kaikkien mahdollisten reunapisteiden mukaan ottamisesta, mutta reunan olemus ei useiden joukkojen kohdalla vastaa havainnollista mielikuvaa. Ajatellaanpa

[2] Kirjoittajalla voi olla syytä huoleen, jos matematiikan teorianmuodostukseen perehtynyt lukija putoaa kartalta.

vaikka sellaista uv-tason osajoukkoa, johon kuuluvat ne ja vain ne pisteet, joiden kumpikin koordinaatti on rationaaliluku ja itseisarvoltaan korkeintaan yksi. Tämän joukon reuna ja samalla sulkeuma on koko tasoneliö M sisuksineen kaikkineen. Joukon A reunapisteiksi nimittäin luetaan kaikki sellaiset pisteet, joiden jokainen kiekkoympäristö leikkaa sekä joukkoa A että sen komplementtia $\mathbb{R}^2 \setminus A$.

Miten joukot lähestyvät toisiaan?

Mitä täsmällisesti ottaen tarkoittaa, että hyperbeli alkaa muistuttaa kahta ristikkäistä suoraa sitä enemmän, mitä kauemmas katsoja poistuu? Tarvitaan matemaattinen luonnehdinta sille, että tason osajoukot ovat toistensa kaltaisia, mitta kaltaisuuden määrälle ja lopulta kaltaisuuteen perustuva raja-arvon käsite joukoille.

▾ Määritelmä
Olkoon $r > 0$. Tason osajoukot A ja B ovat **r-läheiset**, jos kumpikin seuraavista ehdoista toteutuu:

1) $B(a,r) \cap B \neq \emptyset$ kaikilla $a \in A$;

2) $B(b,r) \cap A \neq \emptyset$ kaikilla $b \in B$. ▴

▾ Esimerkki
Olkoon $r = 1\,\mathrm{km}$. Jos jokaista suomalaista kohti on ainakin yksi ruotsalainen alle kilometrin säteellä, ja jokaista ruotsalaista kohti on ainakin yksi suomalainen alle kilometrin säteellä, suomalaiset ja ruotsalaiset ovat r-läheisiä. Näin saattaa ollakin joskus paikallisesti, esimerkiksi keväällä Tukholmassa. ▴

Seuraavassa tarkastellaan yleisiä tason osajoukkojen perheitä $(A_\lambda)_{\lambda>0}$. Perhe on jonon käsitteen yleistys tilanteeseen, jossa indeksinä voi olla jokin muukin kuin kokonaisluku. Jokaista positiivista reaalilukua λ kohti on siis annettu joukko $A_\lambda \subset \mathbb{R}^2$. Jos sekaannuksen vaaraa ei ole, puhutaan lyhyesti perheestä A_λ. Esityksen tässä vaiheessa joukoilla A_λ ei tarvitse olla mitään tekemistä homotetian h_λ tai minkään muunkaan homotetian kanssa.

▾ Määritelmä
Olkoon A joukko, jossa on vähintään yksi alkio. Joukkoperhe $(A_\lambda)_{\lambda>0}$ **suppenee kohti joukkoa A, kun λ kasvaa rajatta**, jos seuraava ehto on voimassa:

- jokaista $r > 0$ kohti on olemassa sellainen $\lambda_r > 0$, että A_λ ja A ovat r-läheiset aina, kun $\lambda > \lambda_r$.

Vastaavasti joukkoperhe $(A_\lambda)_{\lambda>0}$ **suppenee kohti joukkoa A, kun λ lähestyy nollaa rajatta**, jos seuraava ehto on voimassa:

- jokaista $r > 0$ kohti on olemassa sellainen $\lambda_r > 0$, että A_λ ja A ovat r-läheiset aina, kun $\lambda_r > \lambda > 0$. ▴

Suppenemiselle käytetään merkintöjä

$$A_\lambda \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} A, \qquad A_\lambda \xrightarrow[\lambda\to 0]{} A.$$

Jos A_λ suppenee kohti joukkoa A, silloin A_λ suppenee myös kohti sulkeumaa $\overline{A}$. Joukkoa $\overline{A}$ sanotaan perheen A_λ **raja-arvoksi**, kun λ kasvaa rajatta tai vastaavasti lähestyy nollaa rajatta. Raja-arvoja merkitään tuttuun tapaan

$$\overline{A} = \lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda, \qquad \overline{A} = \lim_{\lambda\to 0} A_\lambda.$$

Raja-arvo on siis sellainen suljettu joukko, jota kohti joukkoperhe suppenee. Tällä tavoin määriteltynä raja-arvo on yksikäsitteinen. Perhe voi supeta kohti useampaa joukkoa, mutta niillä on yhteinen sulkeuma, ja se on ainoa suljettu joukko, jota kohti kyseinen perhe suppenee. Lukijaa kehotetaan palaamaan miettimään tätä asiaa sen jälkeen, kun hän on perehtynyt lemmojen 1 ja 2 sekä lauseen 1 todistuksiin myöhemmässä kappaleessa. Jos perhe ei suppene kohti yhtäkään joukkoa, perheen sanotaan **hajaantuvan**.[3]

▾ Esimerkki
Määritelmien toimivuutta on syytä tarkastella esimerkin valossa. Miten todistetaan, että parametrista λ riippuva hyperbeli

$$H_\lambda := \big\{(u,v) \in M \,\big|\, u^2 - v^2 = \lambda^{-2}\big\}$$

suppenee kohti ristikkäisten suorien yhdistettä

$$K := \big\{(u,v) \in M \,\big|\, |u| = |v|\big\}?$$

Olkoon $r > 0$. Pitää etsiä $\lambda_r > 0$, jolle H_λ ja K ovat r-läheiset aina, kun $\lambda > \lambda_r$.

Sekä H_λ että K ovat peilisymmetrisiä kummankin koordinaattiakselin suhteen, joten riittää tutkia joukkojen niitä haaroja, jotka sijaitsevat tasoneljänneksessä

$$\{(u,v) \mid u \geq 0,\ v \geq 0\}.$$

Siellä joukkojen yleiset pisteet ovat muotoa

$$a := \left(\sqrt{v^2+\lambda^{-2}}, v\right) \in H_\lambda, \quad b := (v,v) \in K, \quad v \geq 0.$$

Pisteiden etäisyys vaakasuunnassa on

$$\begin{aligned} d(a,b) &= \sqrt{\left(\sqrt{v^2+\lambda^{-2}} - v\right)^2 + (v-v)^2} \\ &= \sqrt{v^2+\lambda^{-2}} - v \\ &= \frac{v^2+\lambda^{-2}-v^2}{\sqrt{v^2+\lambda^{-2}}+v} \leq \frac{\lambda^{-2}}{\lambda^{-1}} = \lambda^{-1}. \end{aligned}$$

Näin on näytetty, että kun kummasta tahansa joukoista H_λ ja K poimitaan mikä tahansa piste, toisessa joukossa on sille vastinpiste etäisyyden $1/\lambda$ päässä tai lähempänä. Jos valitaan $\lambda_r = 1/r$, kaikilla $\lambda > \lambda_r$ pätee

[3] Perheen A_λ raja-arvoksi voitaisiin määritellä myös tyhjä joukko siinä erikoistilanteessa, jossa jokaista $r > 0$ kohti on olemassa sellainen $\lambda_r > 0$, että $A_\lambda \cap B(0,r) = \emptyset$ aina, kun $\lambda > \lambda_r$ (tapaus $\lambda \to \infty$) tai vastaavasti $\lambda_r > \lambda > 0$ (tapaus $\lambda \to 0$).

$1/\lambda < r$, jolloin H_λ ja K ovat r-läheiset. Väite on täten todistettu.

Suoran ulkopuolella sijaitsevan pisteen ja suoran välillä on aina positiivinen etäisyys. Kun se otetaan säteeksi, pisteen ympärille saadaan kiekkoympäristö, joka ei leikkaa suoraa. Näin ollen suora sisältää kaikki kosketuspisteensä, joten suora on suljettu joukko. Tästä päätellään helposti, että kahden suoran yhdiste K on suljettu. Tällöin K on perheen H_λ yksikäsitteinen raja-arvo:

$$\lim_{\lambda\to\infty} H_\lambda = K. \blacktriangle$$

Suppeneminen saattaa riippua siitä, tarkastellaanko joukkoperhettä rajoitettuna tasoneliöön vai koko tasossa. Esimerkiksi

$$\{(u,v) \in M \mid v = \lambda u^2\} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \{(0,v) \in M \mid v \geq 0\},$$

mutta <u>ei ole niin</u>, että

$$\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid v = \lambda u^2\} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \{(0,v) \in \mathbb{R}^2 \mid v \geq 0\},$$

sillä paraabelin leveys esimerkiksi tasolla $v = t$ on $2\sqrt{t/\lambda}$, joka kasvaa rajatta, kun t kasvaa rajatta. Paraabeli ja positiivinen v-akseli eivät siis milloinkaan ole r-läheiset, vaikka r olisi kuinka suuri reaaliluku tahansa. Suppeneminen tasossa $\mathbb{R}^2$ voitaisiin määritellä niin, että sillä tarkoitetaan edellä määriteltyä suppenemista kaikissa rajoitetuissa neliöissä erikseen. Silloin paraabelien $v = \lambda u^2$ perhe suppenisi tässä uudessa mielessä koko tasossa $\mathbb{R}^2$. Kirjoitelman aiheen mukaisesti kiinnostuksen kohteena on kuitenkin suppeneminen neliössä M.

Esimerkkejä

▾ Esimerkki
Kun sinikäyrää $y = \sin x$ katsotaan hyvin kaukaa, se näyttää x-akselilta:

$$\lambda v = \sin \lambda u \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{1}{\lambda} \sin \lambda u,$$

joten

$$|v| = \frac{1}{\lambda} |\sin \lambda u| \leq \frac{1}{\lambda} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0.$$

Tästä päätellään, että

$$\lim_{\lambda\to\infty} \{(u,v) \mid \lambda v = \sin \lambda u\} = \{(u,v) \mid v = 0\}.$$

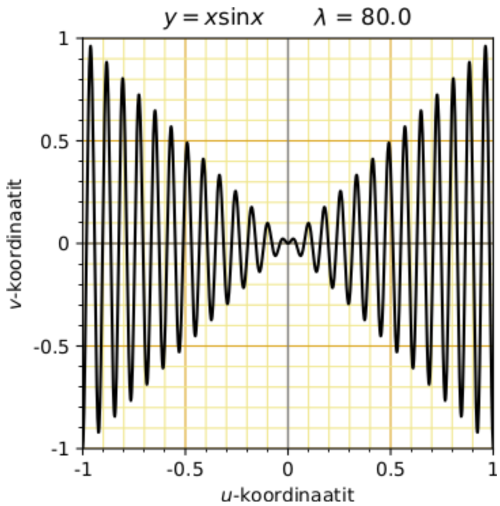
Samalla tavalla päätellään, että mille tahansa rajoitetulle funktiolle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pätee

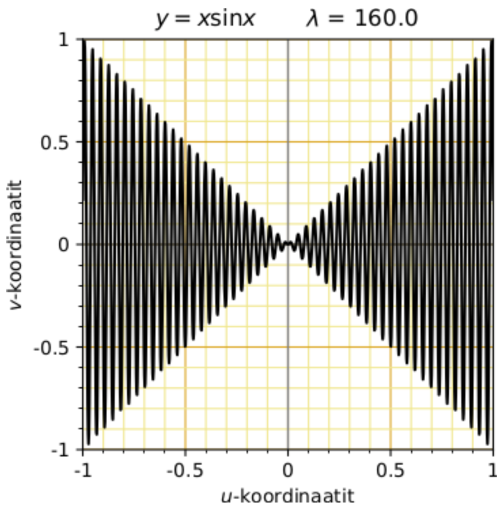
$$\lim_{\lambda\to\infty} \{(u,v) \mid \lambda v = f(\lambda u)\} = \{(u,v) \mid v = 0\}.$$

Funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, sanotaan rajoitetuksi, jos sen arvot pysyvät rajoitetulla välillä, ts. on olemassa sellainen vakio C, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$ on voimassa $|f(x)| \leq C$. ▲

▾ Esimerkki
Kun sinifunktioon lisätään x kertoimeksi, tilanne muuttuu ratkaisevasti edellisestä: $y = x \sin x$. Tällöin funktio ei enää ole rajoitettu. Skaalauksella saadaan

$$\lambda v = \lambda u \sin \lambda u \quad \Leftrightarrow \quad v = u \sin \lambda u.$$



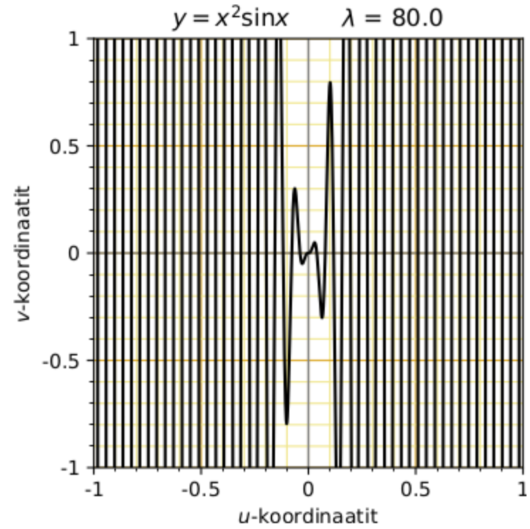


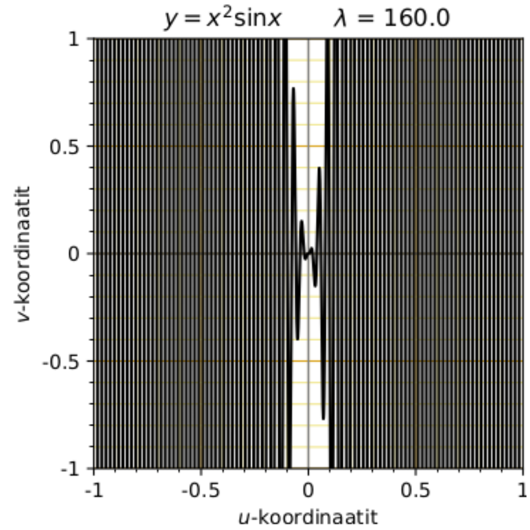
Rajajoukko ei ole enää ohut käyrä, vaan kaksi umpeen sutattua kolmiota, jotka yhdessä täyttävät puolet karttaikkunasta:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \{(u,v) \in M \mid v = u \sin \lambda u\} = \{(u,v) \mid |v| \leq |u|\}. \blacktriangle$$

▾ Esimerkki
Tilanne muuttuu edelleen, kun sinifunktioon laitetaan kertoimeksi x^2. Funktion $y = x^2 \sin x$ värähtelyn laajuus kasvaa toisessa potenssissa. Skaalaus tuottaa yhtälön

$$\lambda v = \lambda^2 u^2 \sin \lambda u \quad \Leftrightarrow \quad v = \lambda u^2 \sin \lambda u.$$



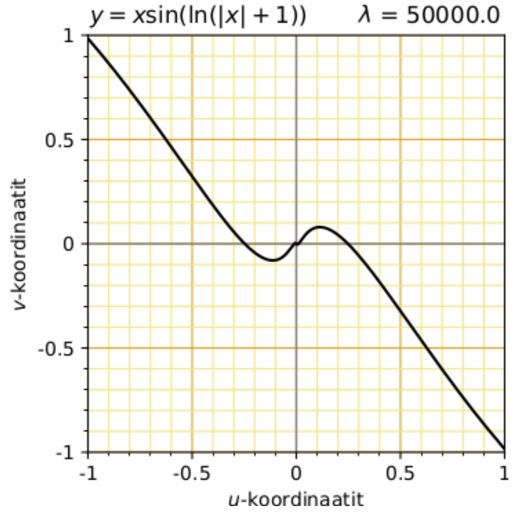


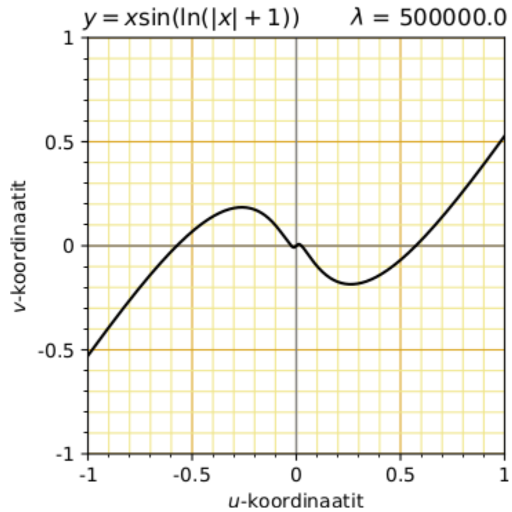
Kun λ kasvaa rajatta, lopulta koko karttaikkuna negatiivista ja positiivista v-akselia lukuun ottamatta suttaantuvat. Rajajoukko on määritelmän mukaan sulkeuma, jolloin yksikään karttapiste ei jää pois:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\{(u,v)\in M \mid v=\lambda u^2\sin\lambda u\}=M. \blacktriangle$$

▾ Esimerkki
Edellisissä esimerkeissä sinifunktion taajuus oli kaikkialla sama. Kun taajuutta pienennetään sopivasti kauas origosta poistuttaessa, saadaan esimerkki käyrästä, jolla ei ole raja-arvoa. Sellainen funktio voisi olla $y = x\sin(\ln(|x|+1))$. Skaalauksen jälkeen

$$\begin{aligned}\lambda v = \lambda u\sin(\ln(|\lambda u|+1)) \quad &\Leftrightarrow\\ v = u\sin(\ln(|\lambda u|+1)).&\end{aligned}$$





Lukijaa kehotetaan miettimään, miksi raja-arvoa

$$\lim_{\lambda\to\infty}\{(u,v)\in M \mid v=u\sin(\ln(|\lambda u|+1))\}$$

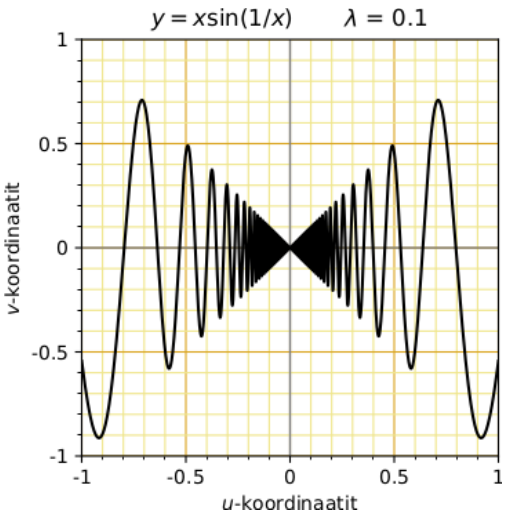
ei ole olemassa. ▲

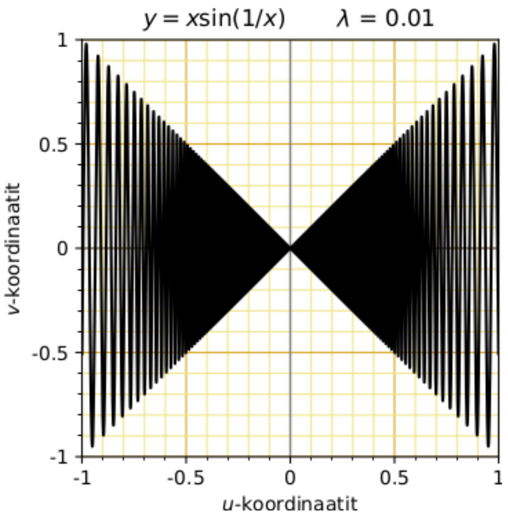
▾ Esimerkki
Tapausta $\lambda \to 0$ varten rakennetaan sinifunktiosta käyrä $y = x\sin(1/x)$. Ehto $\lambda \to 0$ tarkoittaa, että mittakaavaa suurennetaan rajatta, ts. origon ympäristöä tarkastellaan yhä enemmän ja enemmän suurentavalla mikroskoopilla. Skaalauksen jälkeen

$$\lambda v = \lambda u \sin\frac{1}{\lambda u} \quad\Leftrightarrow\quad v = u\sin\frac{1}{\lambda u}.$$

Raja-arvoksi saadaan tutunnäköinen joukko

$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda\to 0}\{(u,v)\in M \mid v=u\sin(1/(\lambda u))\} =\\ &\qquad \{(u,v) \mid |v|\le|u|\}.\end{aligned}$$





Mitähän tulisi raja-arvoksi siinä tapauksessa, jos kerroin x jätettäisiin pois? Olisiko raja-arvoa edes olemassa käyrälle $y = \sin(1/x)$? ▲

Tehtäviä

1) Olkoon $f(x) = x^2 + 2x$. Miten käy käyrille $y = f(x)$, $y = |f(x)|$ ja $y = \sqrt{|f(x)|}$ origon ympäristössä, kun mittakaavaa suurennetaan rajatta?

2) Funktiosta g oletetaan, että se on määritelty ja derivoituva eräällä välillä $]-h, h[$, missä $h > 0$, ja $g(0) = 0$. Kuinka funktion g kuvaaja käyttäytyy origon ympäristössä, kun mittakaavaa suurennetaan rajatta?

Raja-arvojoukkojen luonnehdinta

Tason osajoukkoa A sanotaan **säteittäiseksi**, jos se on yhdiste origosta alkavista puolisuorista ja itse origosta. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että kaikilla $a = (a_1, a_2) \in A$ ja kaikilla $t \geq 0$ pätee

$$ta = (ta_1, ta_2) \in A.$$

Rajatapauksessa pelkkä origo yksinään muodostaa säteittäisen joukon. Säteittäiset joukot ovat kiinnostavia mm. siitä syystä, että ne ovat tyhjän joukon lisäksi ainoat joukot, jotka ovat *invariantteja* kaikkien skaalausten suhteen: $h_\lambda(A) = A$ kaikille säteittäisille joukoille A ja kaikille $\lambda > 0$, ja jos A ei ole säteittäinen eikä tyhjä, on olemassa ainakin yksi $\lambda > 0$, jolle $h_\lambda(A) \neq A$. Säteittäinen joukko on täsmälleen saman näköinen kaikissa mittakaavoissa.

Seuraavat kaksi lemmaa pätevät yleisille joukkoperheille.

Lemma 1
Olkoon A joukkoperheen A_λ raja-arvo, kun $\lambda \to \infty$, ja olkoon b tason piste. Oletetaan lisäksi, että jokaisella $r > 0$ on olemassa sellainen λ_r, että $B(b, r) \cap A_\lambda \neq \emptyset$ aina, kun $\lambda > \lambda_r$. Tällöin $b \in A$.

Todistus
Riittää osoittaa, että $A \cup \{b\}$ on perheen A_λ raja-arvo. Olkoon $r > 0$. Pitää etsiä sellainen $\lambda_r > 0$, jolle $A \cup \{b\}$ ja A_λ ovat r-läheiset aina, kun $\lambda > \lambda_r$. Koska A on raja-arvo, on olemassa $\lambda_{r,A} > 0$, jolle A ja A_λ ovat r-läheiset aina, kun $\lambda > \lambda_{r,A}$. Oletuksen mukaan on olemassa sellainen $\lambda_{r,b}$, että $B(b, r) \cap A_\lambda \neq \emptyset$ aina, kun $\lambda > \lambda_{r,b}$. Tällöin $\lambda_r := \max(\lambda_{r,A}, \lambda_{r,b})$ täyttää vaaditun ehdon. ■

Lemma 2
Olkoon A joukkoperheen A_λ raja-arvo, kun $\lambda \to \infty$, ja olkoon $t > 0$. Tällöin A on joukkoperheen $A'_\lambda := A_{\lambda t}$ raja-arvo.

Todistus
Olkoon $r > 0$. Pitää etsiä sellainen $\lambda'_r > 0$, jolle A'_λ ja A ovat r-läheiset aina, kun $\lambda > \lambda'_r$. Koska A on raja-arvo, on olemassa $\lambda_r > 0$, jolle A ja A_λ ovat r-läheiset aina, kun $\lambda > \lambda_r$. Tällöin $A'_\lambda = A_{\lambda t}$ ja A ovat r-läheiset aina, kun $\lambda > \lambda_r/t =: \lambda'_r$. ■

Seuraavassa lauseessa palataan joukkojen skaalaukseen. Aikaisemmasta muistetaan, että joukko A_1 mittakaavaan 1:λ skaalattuna on $h_{1/\lambda}(A_1)$.

Lause 1
Olkoon A_1 tason osajoukko, jolle $A_\lambda := h_{1/\lambda}(A_1)$ suppenee kohti suljettua joukkoa A, kun $\lambda \to \infty$. Tällöin A on säteittäinen.

Todistus
Olkoon $a \in A$ ja $t \geq 0$. Pitää osoittaa, että $ta \in A$. Olkoon $r > 0$. Lemman 1 perusteella riittää löytää sellainen λ_r, että $B(ta, r) \cap A_\lambda \neq \emptyset$ aina, kun $\lambda > \lambda_r$.

Aluksi käsitellään erikoistapaus $t = 0$. Valitaan joukosta A_1 kiinteä alkio a_1. Silloin $h_{1/\lambda}(a_1) = a_1/\lambda \to 0$, kun $\lambda \to \infty$. Siis on olemassa λ_r, jolle $h_{1/\lambda}(a_1) \in B(0, r) = B(ta, r)$ aina, kun $\lambda > \lambda_r$. Väite seuraa siitä, että $h_{1/\lambda}(a_1) \in A_\lambda$, jolloin $h_{1/\lambda}(a_1) \in B(ta, r) \cap A_\lambda \neq \emptyset$.

Olkoon seuraavaksi $t > 0$. Koska $a \in A$, ja lemman 2 perusteella $A = \lim_\lambda A_{\lambda t}$, on olemassa sellainen $\lambda_r > 0$, että A ja $A_{\lambda t}$ ovat r/t-läheiset aina, kun $\lambda > \lambda_r$. Arvoilla $\lambda > \lambda_r$ on siis olemassa $a_\lambda \in B(a, r/t) \cap A_{\lambda t}$. Silloin $ta_\lambda \in B(ta, r) \cap A_\lambda \neq \emptyset$. ∎

Lemmat 1 ja 2 pätevät ilmeisin muutoksin myös silloin, kun $\lambda \to 0$. Tämä seuraa jo siitä, että

$$\lim_{\lambda \to 0} A_\lambda = \lim_{\lambda \to \infty} A_{1/\lambda}\,.$$

Myös lauseella 1 on vastine tilanteessa $\lambda \to 0$. Seuraavassa esitetään varmuuden vuoksi näiden uuteen tilanteeseen sovitettujen tulosten sanamuodot. Todistusten kirjoittaminen jää lukijalle helpoksi ja opettavaiseksi harjoitustehtäväksi. Helpoksi sikäli, että edellä esitettyjä todistuksia voidaan käyttää mallina.

Lemma 3
Olkoon A joukkoperheen A_λ raja-arvo, kun $\lambda \to 0$, ja olkoon b tason piste. Oletetaan lisäksi, että jokaisella $r > 0$ on olemassa sellainen λ_r, että $B(b, r) \cap A_\lambda \neq \emptyset$ aina, kun $\lambda_r > \lambda > 0$. Tällöin $b \in A$.

Lemma 4
Olkoon A joukkoperheen A_λ raja-arvo, kun $\lambda \to 0$, ja olkoon $t > 0$. Tällöin A on joukkoperheen $A'_\lambda := A_{\lambda t}$ raja-arvo.

Lause 2
Olkoon A_1 tason osajoukko, jolle $A_\lambda := h_{1/\lambda}(A_1)$ suppenee kohti suljettua joukkoa A, kun $\lambda \to 0$. Tällöin A on säteittäinen.

Mikromaailma vs. makromaailma

Edeltävien lauseiden 1 ja 2 näkökulmasta matematiikan maailmankaikkeus on samalla tavalla säteittäinen sekä äärimmäisen pienessä että äärimmäisen suuressa mittakaavassa. Mutta, mutta ... entäpäs ne "pimeät" joukot, joilla ei ole raja-arvoa äärimmäisessä skaalauksessa, esimerkkinä funktion $y = x\sin(\ln(|x|+1))$ kuvaaja! Joukoissa on sellaisia, jotka eivät suostu käyttäytymään normien edellyttämällä tavalla — kuten Joukoissakin — pimeitä yksilöitä.

Ympyräjoukot

Olkoon

$$\mathbf{c} := (c_k)_{k=1}^\infty = (c_1, c_2, c_3, \ldots),$$

$$0 < c_1 < c_2 < c_3 < \ldots$$

aidosti kasvava päättymätön jono positiivisia reaalilukuja. Tarkoituksena on tutkia c_k-säteisten origokeskisten ympyräviivojen

$$S_k := \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = c_k^2\}$$

yhdessä muodostamaa joukkoa

$$S(\mathbf{c}) := \bigcup_{k=1}^\infty S_k.$$

Merkinnät $\mathbf{c}$ ja S tulevat englannin kielen ympyrää ja vastaavasti palloa tarkoittavista sanoista *circle* ja *sphere*. Skaalaus mittakaavaan 1:λ tuottaa joukon

$$S_\lambda(\mathbf{c}) = \bigcup_{k=1}^\infty \lambda^{-1} S_k$$

missä

$$\begin{aligned}\lambda^{-1}S_k &= \{(x/\lambda, y/\lambda) \mid x^2 + y^2 = c_k^2\} \\ &= \{(u,v) \mid u^2 + v^2 = c_k^2/\lambda^2\}.\end{aligned}$$

Kartalla M on näkyvissä ympyräviivan $\lambda^{-1}S_k$ kehän pisteitä silloin ja vain silloin, kun $c_k/\lambda \leq \sqrt{2}$ eli $c_k \leq \sqrt{2}\,\lambda$. Kahden perättäisen ympyrän $\lambda^{-1}S_k$ ja $\lambda^{-1}S_{k-1}$ etäisyys arvolla $\lambda = c_k/\sqrt{2}$ on

$$\frac{c_k}{\lambda} - \frac{c_{k-1}}{\lambda} = \sqrt{2}\,\frac{c_k - c_{k-1}}{c_k},$$

ja tämä etäisyys pienenee parametrin λ arvon kasvaessa. Tästä voidaan päätellä seuraava tulos:

Lemma 5
Jos osamäärä

$$\rho_k(\mathbf{c}) := \frac{c_k - c_{k-1}}{c_k}$$

lähestyy nollaa, kun k kasvaa rajatta, on olemassa raja-arvo

$$\lim_{\lambda \to \infty} M \cap S_\lambda(\mathbf{c}) = M.$$

Muulloin perheellä $S_\lambda(\mathbf{c})$ ei ole raja-arvoa, kun $\lambda \to \infty$.

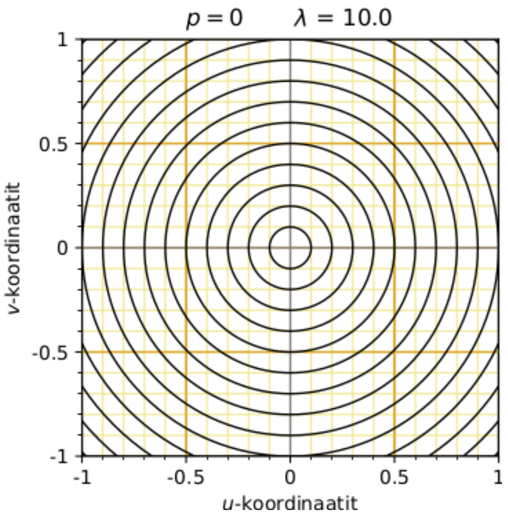
Kirjain ρ on kreikkalaisen kirjaimiston r, joka puolestaan on englannin kielen suhdetta merkitsevän sanan *ratio* alkukirjain. Lemman 5 viimeinen väite perustuu raja-arvon säteittäisyyteen: origokeskisten ympyröiden yhdiste on säteittäinen vain kun se täyttää koko tason.

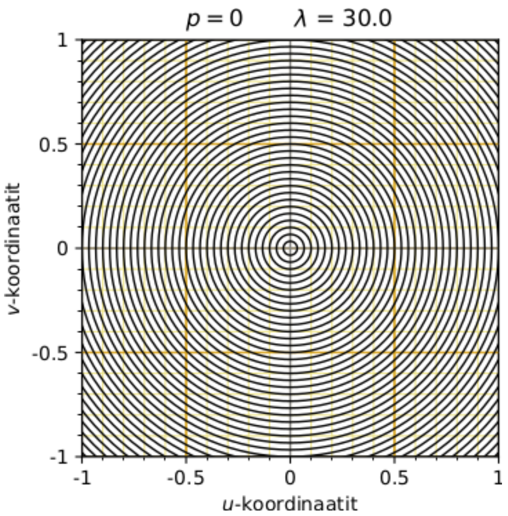
▾ **Esimerkki**
Jonon $\mathbf{c} = (1, 2, 3, \ldots)$ tapauksessa

$$\rho_k(\mathbf{c}) = \frac{1}{k} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0.$$

Lemman 5 perusteella

$$\lim_{\lambda \to \infty} M \cap S_\lambda(\mathbf{c}) = M.$$





Kuvassa $p = 0$ tarkoittaa, että kaikki positiiviset kokonaisluvut ovat mukana (so. ei Eratostheneen seulaa, ks. seur.). ▲

▼ Esimerkki
Jonosta $(1, 2, 3, \ldots)$ voidaan karsia pois yhdistettyjä lukuja *Eratostheneen seulalla.* Seulominen tarkoittaa, että ensin karsitaan pois ykkönen ja kakkosta isommat parilliset luvut, kolmosta isommat kolmella jaolliset luvut jne., kunnes kaikki lukua p isommat luvulla p jaolliset luvut on heitetty pois. Kun karsinta tehdään esimerkiksi arvolla $p = 3$, hylätään kaikki parilliset luvut ja kolmella jaolliset luvut lukuja 2 ja 3 lukuun ottamatta. Jonoon jäävät luvut

$$\begin{aligned}\mathbf{c} =& (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37,\\ & 41, 43, 47, 49, 53, 55, 59, \ldots).\end{aligned}$$

Perättäisten lukujen erotuksista muodostuu jono

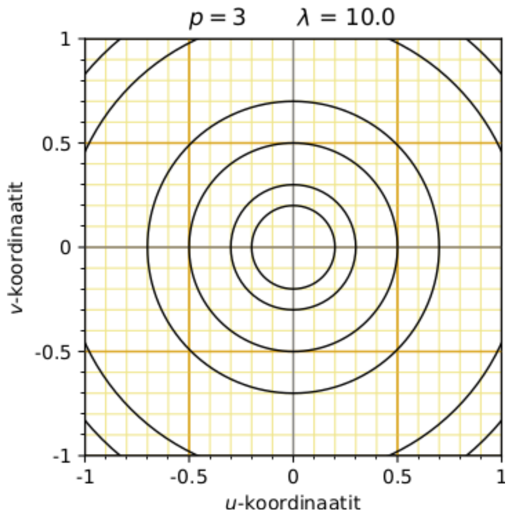
$$(1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, \ldots).$$

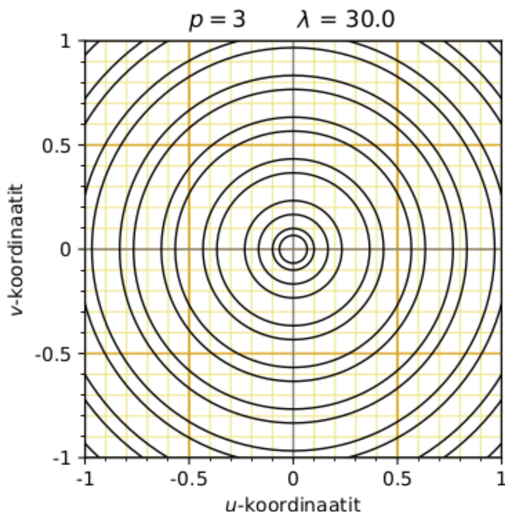
Se on jaksollinen kolmannesta alkiosta $2 = 7 - 5$ lähtien. Jaksona on kaksialkioinen jono $(2, 4)$. Itse asiassa Eratostheneen seula tuottaa aina sellaisen jonon, jonka erotusjono on jaksollinen tietystä kohdasta eteenpäin. Perustele! Jos seulotun jonon alkiot otetaan ympyrän säteiksi, kahden perättäisen säteen erotuksella $c_k - c_{k-1}$ on jaksollisuuden takia äärellinen yläraja C, so. arvo, jota suuremmaksi erotus ei voi tulla. Tällöin

$$\rho_k(\mathbf{c}) = \frac{c_k - c_{k-1}}{c_k} \le \frac{C}{c_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

Lemman 5 perusteella

$$\lim_{\lambda\to\infty} M \cap S_\lambda(\mathbf{c}) = M.$$





Kuvassa $p = 3$ tarkoittaa, että kahdella ja kolmella jaolliset yhdistetyt luvut on karsittu pois. ▲

▼ Esimerkki
Sädejonoille $c_k := k^s$ ja $c'_k := a^k$, missä $s > 0$ ja $a > 1$, pätee

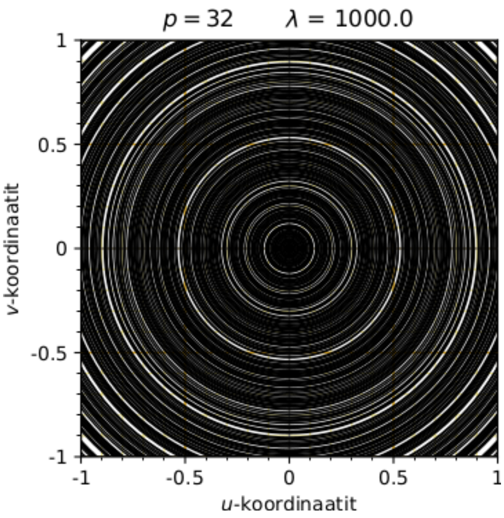
$$\begin{aligned}\frac{c_k - c_{k-1}}{c_k} &= \frac{k^s - (k-1)^s}{k^s}\\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^s \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$

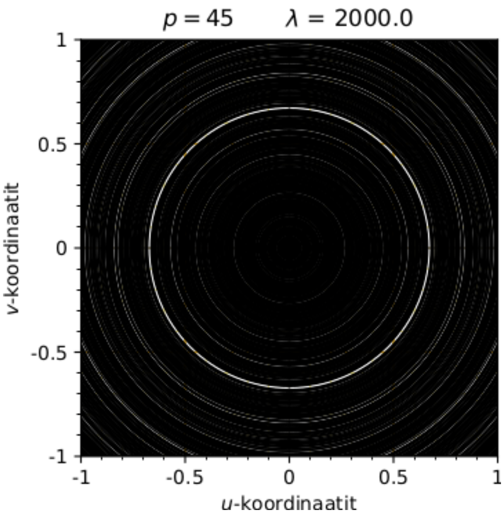
$$\frac{c'_k - c'_{k-1}}{c'_k} = \frac{a^k - a^{k-1}}{a^k} = 1 - \frac{1}{a} > 0.$$

Mitä voidaan päätellä vastaavien joukkoperheiden $S_\lambda(\mathbf{c})$ ja $S_\lambda(\mathbf{c}')$ suppenemisesta, kun $\lambda \to \infty$? ▲

Alkulukuympyrät

Kun Eratostheneen seulalla karsitaan pois kaikki lukujen $2, \ldots, p$ monikerrat, kokonaislukujen 2 ja p^2 välille jäävät vain kyseisen välin alkuluvut. Miksi? Oheisiin kuviin on piirretty ne ja vain ne ympyrät, joiden säteet ovat alkulukuja. Yhdistetyt luvut on poistettu Eratostheneen seulaa käyttäen. Pisin yhtenäinen aukko on alkulukujen 1327 ja 1361 välillä. Siinä on 33 yhdistettyä lukua. Aukko nähdään jälkimmäisessä kuvassa muita paksumpana valkoisena ympyrärenkaana.





Välille $[0, x]$ osuvien alkulukujen lukumäärää merkitään yleiseen tapaan

$$\pi(x) := \#\{p \mid p \text{ on alkuluku ja } p \leq x\}.$$

Merkintä $\#J$ tarkoittaa joukon J alkioiden lukumäärää. Luku $\pi(x)$ sellaisenaan ei kerro paljoakaan siitä, kuinka etäällä toisistaan kaksi välin $[0, x]$ perättäistä alkulukua enimmillään voivat olla. Vuonna 1896 todistetun *alkulukulauseen* mukaan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1.$$

Alkulukulauseelle on keksitty useita todistuksia, joista toiset ovat "elementaareja", ja toiset perustuvat järeämpään matemaattiseen koneistoon. Elementaareiksi kutsutut todistuksetkin ovat huomattavasti monimutkaisempia kuin mihin lukiossa tai yliopisto-opintojen alussa on totuttu. Ymmärrettävistä syistä alkulukulauseen todistusta ei esitetä tässä. Huomaa, että $\ln x$ on verrannollinen välin $[0, x]$ suurimman kokonaisluvun desimaaliesityksen numeroiden määrään.

Alkulukujen (engl. *prime*) jonoa merkitään

$$\begin{aligned} \mathbf{p} :=& (p_1, p_2, p_3, \ldots) \\ =& (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \\ & 41, 43, 47, 53, \ldots). \end{aligned}$$

Esimerkiksi oppikirjassa [1] (teoreema 4.5, s. 80) alkulukulause osoitetaan yhtäpitäväksi sen kanssa, että

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{k \ln k} = 1.$$

Tällöin

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{\frac{p_k}{k \ln k}}{\frac{p_{k-1}}{(k-1)\ln(k-1)}} \cdot \frac{k \ln k}{(k-1)\ln(k-1)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1.$$

Raja-arvoyhtälön

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k \ln k}{(k-1)\ln(k-1)} = 1$$

todeksi osoittaminen jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi. Lopulta siis

$$\rho_k(\mathbf{p}) = \frac{p_k - p_{k-1}}{p_k} = 1 - \frac{1}{\frac{p_k}{p_{k-1}}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Tästä ja lemmasta 5 päätellään, että on olemassa raja-arvo

$$\lim_{\lambda\to\infty} M \cap S_\lambda(\mathbf{p}) = M.$$

Toisin sanoen: kun mittakaavaa pienennetään rajatta, kartalle piirretyt origokeskiset alkulukuympyrät peittävät kartan lopulta kokonaan. Vaikka Eratostheneen seulalla seulotaan kaikki yhdistetyt luvut pois, jäljelle jää lukuja riittävästi mustaamaan koko kartan.

Lukija voi Wikipediaa ja muita verkkodokumentteja apuna käyttäen miettiä, miten käy, kun alkukujen jonosta otetaan mukaan vain ne, joiden indeksi on alkuluku. Tarkastelun kohteena on silloin paljon harvempi jono

$$\begin{aligned} (p_{p_k})_{k=1}^{\infty} &= (p_2, p_3, p_5, p_7, p_{11}, \ldots) \\ &= (3, 5, 11, 17, 31, \ldots). \end{aligned}$$

Tämän jonon alkioita sanotaan *superalkuluvuiksi* (engl. *super prime*). Superkarsinta voidaan toistaa, jolloin saadaan supersuperalkuluvut jne. Muutaman iterointikierroksen jälkeen syntyy, jos ei muuta, niin hauskoja kuvia ainakin. Indeksit voidaan valita mistä tahansa muustakin positiivisten kokonaislukujen jonosta, kuten esimerkiksi *Fibonaccin jonosta*

$$\mathbf{f} := (f_k)_{k=1}^{\infty} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots),$$

jossa alkio on aina kahden edellisen summa:

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_k = f_{k-2} + f_{k-1},\ k \geq 3.$$

Liite: Python-koodi kuvaajan piirtämiseen

Koodista on helppoa muokata vastaava koodi esimerkiksi Octavelle.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

n = 10000
L = 5.0

# Piirretään y=x*sin(x) mittakaavassa 1:L
u = np.linspace(-L,L,n)
v = u*np.sin(L*u)

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(1, 1, 1)
ax.set_aspect('equal')
plt.grid(True)
plt.xlim([-L,L])
plt.ylim([-L,L])
plt.plot(u, v, 'k')

plt.show()
```

Viitteet

[1] Apostol, T. M.: *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer, New York, 1976.