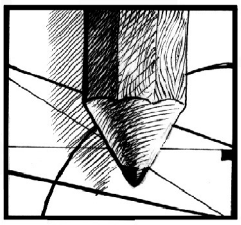


Ilmakehän massa

Markku Halmetoja

Viime vuosituhannen lopulla laskettiin Mäntän lukion matematiikan erikoiskurssilla ilmakehän massa. Alunperin oli tarkoitus ainoastaan määrittää ilman paine (p) ja tiheys (ρ) maan pinnasta lasketun korkeuden funktioina, mutta tilanne riistäytyi käsistä. Oppilaiden kontribuutio ei ollut vähäinen. Laadin aiheesta tuolloin nettisivunkin, mutta kun se on nyttemmin kadonnut (ilman myötävaikutustani), arvelen, että laskelma ansaitsisi tulla laajemminkin julki ja pysyvämmin arkistoiduksi.

Kerrataan aluksi hieman kemiaa ja fysiikkaa. Ilma on seos, joka koostuu pääosin typestä N_2 (noin 78 %) ja hapesta O_2 (noin 21 %). Niiden lisäksi on pieniä määriä muita kaasuja, kuten argonia Ar (alle 1 %), hiilidioksidia, vetyä, heliumia yms., sekä vaihteleva määrä vesihöyryä. Oletetaan hieman yksinkertaistaen, että typen ja hapen lisäksi loppuosa koostuu pelkästään argonista. Laskemalla molekyylien moolimassoista niiden prosenttiosuuksilla painotetun keskiarvon saamme ilman laskennalliseksi moolimassaksi $M = 29{,}0\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$.

Ilma noudattaa varsin hyvin ideaalikaasulakia

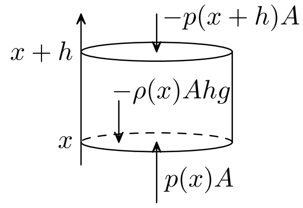
$$pV = nRT,$$

missä n on tarkasteltavan ilmaerän ainemäärä, V sen tilavuus, T sen absoluuttinen lämpötila ja R yleinen kaasuvakio. Sen arvo löytyy taulukkokirjasta. Koska ainemäärä on massa jaettuna moolimassalla ja tiheys puolestaan massa jaettuna tilavuudella, saadaan kaasulaista paineen ja tiheyden väliset yhtälöt:

$$\rho = \frac{M}{RT}p \quad \text{ja} \quad p = \frac{RT}{M}\rho.$$

Jos siis saamme määritetyksi ilman paineen korkeudella x, saamme samalla ilman tiheyden kyseisellä korkeudella.

Tarkastellaan kuvion mukaista (teoreettista) ilmasylinteriä, jonka pohjan pinta-ala on A, korkeus on h ja tilavuus täten Ah. Jos ilmanpaine korkeudella x on $p = p(x)$, niin se vaikuttaa sylinterin pohjaan voimalla $p(x)A$. Yläpuoliseen pohjaan vaikuttava voima on vastaavasti $-p(x+h)A$, mikä samalla kohdistuu välillisesti myös alapohjaan. Siihen vaikuttaa myös sylinterin sisällä olevaan ilmamäärään kohdistuva painovoima $\approx -\rho(x)Ahg$, missä g on putoamiskiihtyvyys.



Voimat kumoavat toisensa, eli

$$p(x)A - p(x+h)A - \rho(x)Ahg \approx 0.$$

Jos näin ei olisi, olisi ilmakehä ajan myötä litistynyt maan pintaan tai haihtunut avaruuteen. Saatu yhtälö on sitä tarkempi mitä pienempi sylinterin korkeus on. Kirjoittamalla se muotoon

$$\frac{p(x+h) - p(x)}{h} \approx -\rho(x)g$$

ja antamalla h:n lähestyä nollaa likimääräinen yhtälö tarkentuu differentiaaliyhtälöksi

$$p'(x) = -g\rho(x) = -\frac{M}{RT}gp(x).$$

Putoamiskiihtyvyyttä g voi pitää vakiona ainoastaan maan pinnan läheisyydessä tapahtuvia ilmiöitä tarkasteltaessa. Yleisemmin sen arvo korkeudella x (≥ 0) maan pinnasta on gravitaatiolain mukaan

$$g = g(x) = \gamma\frac{m_0}{(r+x)^2},$$

missä m_0 on maapallon massa, r sen säde ja γ on gravitaatiovakio. Kun tämä sijoitetaan edellä saatuun yhtälöön, saadaan Leibnizin tavalla merkittynä

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\frac{M\gamma m_0}{RT}\frac{p}{(r+x)^2}$$

alkuehdolla $p(0) = p_0$ (normaali ilmanpaine). Erottamalla muuttujat saadaan

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{M\gamma m_0}{RT}\frac{\mathrm{d}x}{(r+x)^2},$$

ja edelleen integroimalla

$$\ln p = \frac{M\gamma m_0}{RT}\frac{1}{(r+x)} + c.$$

Alkuehdon perusteella

$$c = \ln p_0 - \frac{M\gamma m_0}{RT}\frac{1}{r}.$$

Täten

$$\begin{aligned}\ln p &= \frac{M\gamma m_0}{RT}\frac{1}{r+x} + \ln p_0 - \frac{M\gamma m_0}{RT}\frac{1}{r}\\ &= \ln p_0 + \frac{M\gamma m_0}{RT}\Big(\frac{1}{r+x} - \frac{1}{r}\Big)\\ &= \ln p_0 - \frac{M\gamma m_0}{RTr}\Big(\frac{x}{r+x}\Big),\end{aligned}$$

mistä seuraa

$$\ln\frac{p}{p_0} = -\frac{M\gamma m_0}{RTr}\Big(\frac{x}{r+x}\Big),$$

ja lopulta

$$p(x) = p_0\,\exp\Big(-\frac{M\gamma m_0}{RTr}\Big(\frac{x}{r+x}\Big)\Big).$$

Täten ilman tiheys korkeudella x

$$\rho(x) = \frac{Mp_0}{RT}\,\exp\Big(-\frac{M\gamma m_0}{RTr}\Big(\frac{x}{r+x}\Big)\Big).$$

Kun se nyt tunnetaan, voidaan laskea massa. Tarkastellaan $(r+x)$-säteistä pallon kuorta, jonka paksuus on $\mathrm{d}x$. Sen tilavuus

$$\mathrm{d}V = 4\pi(r+x)^2\mathrm{d}x$$

ja massa eli massa-alkio

$$\begin{aligned}\mathrm{d}m &= \rho(x)\mathrm{d}V = 4\pi(r+x)^2\rho(x)\mathrm{d}x\\ &= 4\pi\frac{Mp_0}{RT}(r+x)^2\exp\Big(-\frac{M\gamma m_0}{RTr}\Big(\frac{x}{r+x}\Big)\Big)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ilmakehän likimääräinen massa saadaan summaamalla se maan pinnalta parin sadan kilometrin korkeuteen. Satelliittien alimmat kiertoradat ovat niillä main eikä ohuenkaan ilman kitka häiritse niiden lentoa. Lämpötilassa on hyväksyttävä hieman mielivaltaisuutta. Wikilähteen [1] mukaan maapallon keskilämpötila maan pinnan tasolla on noin 15 °C eli 288 K, mutta ylemmissä ilmakerroksissa se on pakkasellakin. Toisaalta, ilmakehä on tiheimmillään maan pinnalla, joten oletamme keskimääräiseksi lämpötilaksi 0 °C eli 273 K. Maa on navoiltaan hieman litistynyt. Puserramme sen pyöreäksi valitsemalla säteeksi napa- ja ekvaattorisäteen keskiarvon. Taulukossa on tiivistetysti numeeriset vakiot.

$r = 6{,}367 \cdot 10^6$ m
$m_0 = 5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg
$\gamma = 6{,}67259 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2
$p_0 = 1{,}01325 \cdot 10^5$ N/m^2
$R = 8{,}3145$ Nm (mol $\cdot$ K)
$T = 273$ K
$M = 0{,}0290$ kg/mol

Solmu-formaattiin saattamista lukuunottamatta tämän kirjoituksen laatimisessa on tähän mennessä käytetty ainoastaan matematiikon kolmea perustyökalua, kynää, paperia ja roskapönttöä. Siksi tuntuu perin kummalliselta kuulla someväitteitä, joiden mukaan kynästä ja paperista on pelkkää haittaa matematiikan oppimisessa. Saattaa olla, että paperilla hahmottelu on turhaa, jos tehtävät laaditaan niin alkeellisiksi, ettei niiden ratkaisemisessa tarvita ajattelua. Mutta tähänhän ei kouluopetuksessa pyritä – vai pyritäänkö?

Nyt on kuitenkin perusteltua turvautua tietokoneeseen, sillä integrointi on suoritettava numeerisesti. WolframAlpha [2] antaa vastaukseksi $m \approx 5{,}28 \cdot 10^{18}$ kg. Wikisivuston [1] mukaan $m \approx 5{,}15 \cdot 10^{18}$ kg. Siellä käytetystä menetelmästä ei ole tietoa, mutta ilmeisesti todellisuuden piirteitä on otettu tarkemmin huomioon. Luontoa kuvaavilla eksponentiaalisilla malleilla on kokeellisiin tietoihin perustuvat pätevyysalueensa. Kahtasataa kilometriä korkeammalle ei kannata integroida, sillä kuten todettu, satelliitit lentävät siellä. Lisäksi integraali hajaantuu yli absoluuttisen nollapisteen olevissa lämpötiloissa, jos äärettömyyksiin asti lasketaan.

Viitteet

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Atmosphere_of_Earth`

[2] `https://www.wolframalpha.com/`