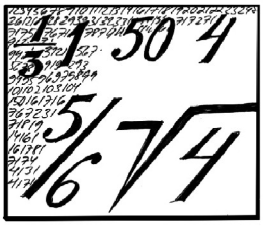

Ykkösestä alkeisfunktioihin

Seppo Heikkilä
Oulun yliopisto, Matemaattisten tieteiden laitos
heikki.sep@gmail.com

Johdanto

Aluksi johdetaan eksponenttifunktion sarjakehitelmä ykkösestä lähtien integroimalla. Saadusta tuloksesta johdetaan sitten hyperbolisten ja trigonometristen kosini- ja sinifunktioiden sarjakehitelmät. Kehitelmien avulla johdetaan myös ko. funktioiden ominaisuuksia. Tulosten johtamisessa tarvitaan potenssifunktioiden sekä niistä muodostettujen summien ja sarjojen integrointia, derivointia, yhteenlaskua ja vähennyslaskua. Induktioperiaate on ratkaisevassa roolissa, sillä se tarjoaa keinon jatkaa ykkösestä integroimalla saadut summat sarjaksi.

Eksponenttifunktio

Seuraavissa integroinneissa valitaan aina integroimisvakioksi 1. Vakiofunktion $f_0(t) \equiv 1$ integraalifunktio on siten $f_1(t) = 1 + t$. Sen integraalifunktio on taas $f_2(t) = 1 + t + t^2/2$. Integroimalla funktio f_0 n kertaa saadaan funktio

$$(1) \qquad f_n(t) = 1 + t + \tfrac{t^2}{2} + \cdots + \tfrac{t^n}{n!}, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

f_1 on määritelty, ja jos f_n on määritelty, niin sen integraali on f_n lisättynä termillä $\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$, joten f_{n+1} on määritelty. Induktioperiaatteen nojalla on f_n siten määritelty jokaisella $n = 1, 2, \ldots$, joten (1) voidaan jatkaa sarjaksi

$$(2) \qquad f(t) = 1 + t + \tfrac{t^2}{2} + \cdots + \tfrac{t^n}{n!} + \tfrac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots .$$

Saatu sarja on eksponenttifunktion sarjakehitelmä, ts. $f(t) = e^t$, joten $f(1) = e$, ns. Neperin luku. Niiden sarjaesitykset ovat siten

$$(3) \qquad e^t = 1 + t + \tfrac{t^2}{2} + \cdots + \tfrac{t^n}{n!} + \tfrac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots ,$$

$$(4) \qquad e = 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{n!} + \cdots .$$

Funktion f derivaatta saadaan derivoimalla (2):n sarja termeittäin. Tulokseksi saadaan

$$(5) \qquad f'(t) = 1 + t + \cdots + \tfrac{t^n}{n!} + \cdots .$$

(2):n ja (5):n oikean puolen sarjat ovat samat, joten $f' = f$. Siten eksponenttifunktio on sama kuin sen derivaatta.

Hyperbolisia funktioita

Sijoittamalla t:n paikalle $-t$ kaavassa (3) saadaan

$$(6) \qquad e^{-t} = 1 - t + \tfrac{t^2}{2} + \cdots + \tfrac{(-1)^n t^n}{n!} + \cdots .$$

Laskemalla (3) ja (6) puolittain yhteen, jakamalla puolittain 2:lla, ja soveltamalla funktion cosh määritelmää saadaan

$$(7) \qquad \cosh(t) := \tfrac{e^t + e^{-t}}{2} = 1 + \tfrac{t^2}{2} + \cdots + \tfrac{t^{2n}}{(2n)!} + \cdots .$$

Vähentämällä (6) puolittain (3):sta ja jakamalla puolittain 2:lla saadaan vastaavasti

(8) $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = t + \frac{t^3}{6} + \cdots + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots .$

Erityisesti

(9) $e^t = \cosh(t) + \sinh(t).$

(7):n ja (8):n yhtälöistä seuraa, että $\cosh(-t) = \cosh(t)$ ja $\sinh(-t) = -\sinh(t)$. Kertomalla puolittain (9) ja yhtälö $e^{-t} = \cosh(-t) + \sinh(-t)$ saadaan siten kaava

(10) $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1.$

Yhtälöistä (7) ja (8) seuraa derivoimalla, että

(11) $\cosh'(t) = \sinh(t), \quad \sinh'(t) = \cosh(t).$

Trigonometrisia funktioita

Oletetaan, että yhtälössä (3) voidaan t:n paikalle sijoittaa it, missä i on ns. imaginaariyksikkö. Soveltamalla saadun sarjan termeihin kaavaa $i^2 = -1$, ja erottamalla eri sarjoiksi ne termit, joihin joko jää tai ei jää i:tä, saadaan $f(it) = C(t) + iS(t)$, missä

(12) $C(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + \cdots ,$

ja

(13) $S(t) = t - \frac{t^3}{6} + \cdots + \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots .$

Saadut sarjat ovat kosini- ja sinifunktioiden sarjakehitelmät. Derivoimalla (12) ja (13) puolittain nähdään, että $C' = -S$ ja $S' = -C$. Siten

(14) $C(t) = \cos(t), \quad S(t) = \sin(t),$

ja

(15) $\cos'(t) = -\sin(t), \quad \sin'(t) = \cos(t).$

Lisäksi saadaan ns. Eulerin kaava:

(16) $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t).$

Yhtälöistä (12)-(14) seuraa, että $\cos(-t) = \cos(t)$ ja $\sin(-t) = -\sin(t)$. Kertomalla yhtälö (16) ja yhtälö $e^{-it} = \cos(-t) + i\sin(-t)$ puolittain saadaan siten kaava

(17) $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1.$

Koska $\cos(\pi) = -1$ ja $\sin(\pi) = 0$, niin sijoittamalla $t = \pi$ Eulerin kaavaan saadaan

(18) $1 = -e^{i\pi},$

eli ollaan takaisin ykkösessä.

Muita alkeisfunktioita

Muut hyperboliset ja trigonometriset funktiot saadaan normaaleilla määritelmillä. Juurifunktiot, logaritmifunktio, arkusfunktiot ja areafunktiot saadaan potenssifunktioiden, eksponenttifunktion, trigonometristen funktioiden ja hyperbolisten funktioiden käänteisfunktioina.