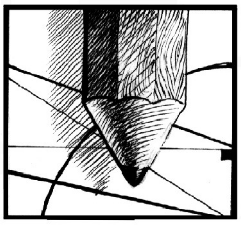

Äärimmäisen epäjatkuvista funktioista

Jukka Liukkonen
Mat. yo. evp.

Johdanto

Koodausteoriassa eräs keskeinen idea on sellaisen funktion määrittely, joka muuttaa toisiaan läheisesti muistuttavat oliot riittävän erinäköisiksi. Kun erinäköiset objektit altistetaan pienille muodonmuutoksille, ne ovat silti tunnistettavissa.

Kaaosteoriassa tarkastellaan ajan mukana muuttuvia systeemejä, joissa pieni muutos alkutilanteessa aiheuttaa valtavan ja ennustamattoman muutoksen systeemin myöhemmässä käyttäytymisessä. Kysymys ei ole satunnaisuudesta samassa mielessä kuin todennäköisyyslaskennassa. Kysymys on siitä, että vaikka systeemin kehitys tietystä alkutilasta eteenpäin tunnettaisiin tarkkaan, tästä tiedosta ei ole juurikaan hyötyä yritettäessä arvata, miten systeemi käyttäytyisi aavistuksen verran muutetusta alkutilasta lähtien.

Kun loppusyksyn hämäryydessä pohdin koodausteorian ja kaaosteorian lähtökohtia, mieleeni juolahti ajatus reaalimuuttujan reaaliarvoisesta funktiosta, joka kuvaa lähellä olevat pisteet kauaksi toisistaan ja vielä niin, että funktion arvosta tietyssä pisteessä ei voida päätellä juuri mitään funktion arvoista kyseisen pisteen lähiympäristössä — paitsi se, että ne ovat kaukana.

Selattuani lukion opetussuunnitelmia havaitsin pettymyksekseni, että pitkänkään matematiikan oppitunneilla ei enää opeteta raja-arvon käsitettä muuten kuin geometristen mielikuvien ja yksinkertaisten esimerkkitapausten tasolla. Niistä kummastakaan ei ole paljoa hyötyä tarkasteltaessa sellaisia patologisia funktioita, joita aion tässä tutkia. Siksi artikkelin lukemista on pohjustettava esittämällä jatkuvuuden täsmällinen määritelmä. Sen sisäistämiseksi predikaattilogiikan ilmaisuihin totuttelu ennakkoon olisi eduksi, mutta opetussuunnitelmissa logiikkakin rajoittuu valinnaisiin opintoihin upotettuun propositiologiikkaan. Näin ollen lukija joutuu omaksumaan uudenlaisen ajattelutavan kylmiltään. Perinteisesti tällainen omaksuminen on vaatinut pitkähkön ajan ja runsaasti omakätisesti ratkaistuja harjoitustehtäviä.

Toivoakseni pystyn tarjoamaan lukijalle jotain edes mielikuvien tasolla.

Jatkuvuus

Funktion jatkuvuus määritellään lukiossa raja-arvon kautta: funktio f on jatkuva pisteessä a, jos funktion raja-arvo ja funktion arvo yhtyvät pisteessä a. Jatkuvuus tarkoittaa siis sitä, että $f(x)$ saadaan niin lähelle lukua $f(a)$ kuin ikinä halutaan, kunhan vaan x viedään riittävän lähelle pistettä a. Jatkuva funktio on tietyssä mielessä *läheisriippuva*: funktion arvo pisteessä a riippuu täysin funktion arvoista läheisissä pisteissä.* Jos ei tukeuduta raja-arvon käsitteeseen, jatkuvuuden perinteinen täsmällinen määritelmä on seuraava:

*Pahoittelen, jos olen ymmärtänyt läheisriippuvuuden (engl. *codependency*) käsitteen väärin.

Funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on **jatkuva** pisteessä a, jos jokaista positiivista reaalilukua ε kohti on olemassa sellainen (yleensä luvusta ε riippuva) positiivinen reaaliluku δ, että

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ aina, kun } |x - a| < \delta.$$

Tietyn funktion todistaminen jatkuvaksi pelkästään tähän määritelmään nojautuen on triviaaleja erikoistapauksia lukuun ottamatta huomattavan työlästä, ja se vaatii harjoittelun kautta syntynyttä kokemusta. Asiaan ennalta vihkiytymätön lukija joutunee vaikeuksiin jo niinkin yksinkertaisen funktion kuin $f(x) = x^2$ kanssa. Tästä huolimatta määritelmä on erittäin hyödyllinen ja käyttökelpoinen. Jatkuvuus- ja raja-arvotarkastelujen ε-δ -tekniikkaa on onneksi esitelty laajalti Solmun oppimateriaalissa [2], joten tekniikan selittämiseen ei tarvitse puuttua tämän enempää.

Predikaattilogiikan kvanttoreita $\forall$ (lue: kaikilla) ja $\exists$ (lue: on olemassa) käyttäen ehto funktion f jatkuvuudelle pisteessä a kirjoitetaan esimerkiksi näin:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \colon |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Osittain suomennettuna tämä tarkoittaa, että kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että ehdosta $|x - y| < \delta$ seuraa $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Kun hieroglyfejä muistuttavat symbolit tulevat tutuiksi, tiiviiseen muotoon kirjoitettu jatkuvuusehto auttaa asian hahmottamisessa.

Mitä tapahtuu, jos viimeisin epäyhtälö käännetään nurin päin?

Jatkuvuudesta äärimmäiseen epäjatkuvuuteen

Matemaattisessa tekstissä ε tarkoittaa yleensä pientä positiivista lukua, ja suurta positiivista lukua merkitään esimerkiksi kirjaimella M. Kun jatkuvuusehto käännetään nurinniskoin, potentiaalisesti hyvin pienen luvun ε tilalle astuu potentiaalisesti hyvin suuri luku M. Uusi, merkityssisällöltään ratkaisevasti erilainen ehto näyttää tältä:

$$\forall M > 0\ \exists \delta > 0 \colon 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| > M.$$

Tähän oli pakko lisätä epäyhtälö $0 < |x - a|$ mahdollisuuden $x = a$ poissulkemiseksi. Jos olisi $x = a$, epäyhtälö $|f(x) - f(a)| > M$ saisi muodon $0 > M$, joka ei toteutuisi millään positiivisella luvulla M. Jatkuvuusehdosta muokkaamani hankalan näköinen ehto on raakile. Kypsyttelin sitä hieman ja päädyin seuraavaan määritelmään:

▾ Määritelmä 1
Olkoon A reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ osajoukko. Funktio $f\colon A \to \mathbb{R}$ on **hillitön**, jos jokaista reaalilukua M kohti on olemassa $r > 0$, jolle

$$|f(a_1) - f(a_2)| > M$$

aina, kun $a_1, a_2 \in A$ ja $0 < |a_1 - a_2| < r$. ▴

Tiettävästi joskus on käynyt niin, että matemaatikko on todistanut paksun nivaskan tuloksia tietyt ehdot toteuttavista funktioista, ja myöhemmin toinen matemaatikko on huomannut, ettei sellaisia funktioita voi edes olla olemassa. Siksi on tärkeää osoittaa esimerkillä, että hillittömiä funktioita on olemassa.

Jos A on äärellinen, implikaation $\Rightarrow$ totuustaulusta† johtuen jokainen funktio $A \to \mathbb{R}$ on sekä jatkuva‡ että hillitön. Tämänkaltaisten triviaalien tapausten lisäksi olisi syytä löytää varteenotettavampi esimerkki. Otetaanpa joukoksi A rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$. Se on tunnetusti numeroituva (ks. [3], [4]), joten $\mathbb{Q}$ voidaan esittää muodossa

$$\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\},$$

missä $q_i \neq q_j$ aina, kun $i \neq j$. Ehto $f(q_i) = i^2$ määrittelee funktion $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, jonka kuvajoukko on

$$f(\mathbb{Q}) = \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots\} = \{1, 4, 9, \ldots\}.$$

Näytän seuraavassa, että funktio f nousee arvoon arvaamattomaan minkä tahansa pisteen läheisyydessä.

Väite 1
Funktio f on hillitön.

Todistus
Pitää osoittaa, että määritelmän 1 ehto on voimassa funktiolle f. Olkoon siis M jokin reaaliluku. Koska $|f(q_i) - f(q_j)| > 2$ aina, kun $i \neq j$, ilman päättelyn yleispätevyyden menettämistä voidaan olettaa, että $M \geq 2$. Luvuksi r valitaan

$$r = \min\left\{ |q_i - q_j| \,\middle|\, i \leq M,\ j \leq M,\ i \neq j \right\} > 0.$$

Jos $0 < |q_i - q_j| < r$, välttämättä $i \neq j$, ja $i > M$ tai $j > M$. Silloin

$$\begin{aligned} |f(q_i) - f(q_j)| &= |i^2 - j^2| = |i - j|(i + j) \\ &\geq i + j > M. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Markku Halmetoja esittelee mainiossa artikkelissaan [1] mm. jatkuvia mutta silti perin juurin vinksahtaneita funktioita. Artikkeliin kannattaa tutustua siellä käytetyn ε-δ -tekniikankin takia. Lopussa Halmetoja yllättää lukijan mainitsemalla, että vinksahtaneet funktiot muodostavat ylivoimaisen enemmistön kaikkien jatkuvien funktioiden laumassa.

†Lause $P \Rightarrow Q$ on epätosi vain, jos P on tosi ja Q epätosi.

‡Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ jatkuvuus tarkoittaa, että f on jatkuva jokaisessa joukon A pisteessä a. Jatkuvuus pisteessä $a \in A$ puolestaan tarkoittaa seuraavaa: jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ aina, kun $x \in A$ ja $|x - a| < \delta$.

Hillittömyyden tukahduttaminen

Yrityksistäni määritellä hillitön funktio $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ei tullut mitään, ei kerta kaikkiaan. Syy selviää kohta. Sitä ennen on paikallaan esitellä kasaantumispisteen määritelmä ja muutamia valmistavia tosiasioita, joiden todistaminen ei ole vaikeaa, mutta vaatii harjaantuneisuutta. Seuraavat merkinnät ovat yleisesti käytössä:

$$\begin{aligned} B(a,r) &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < r\}, \\ B^*(a,r) &= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-a| < r\} \\ &= B(a,r) \setminus \{a\}. \end{aligned}$$

Ylempi joukko on a-keskinen r-säteinen avoin väli. Alempi on vastaavasti a-keskinen r-säteinen *punkteerattu* avoin väli. Moni pelkää punkteerausta. Pelko on turha, sillä punkteerauksessa vain poistetaan keskipiste.

▾ Määritelmä 2
Olkoon A reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ osajoukko. Piste $a \in \mathbb{R}$ on joukon A **kasaantumispiste**, jos jokaisella $r > 0$ pätee

$$A \cap B^*(a,r) \neq \emptyset. \quad \blacktriangle$$

Tosiasia 1
Jokainen a-keskinen r-säteinen avoin väli $B(a,r)$, $r > 0$, sisältää peräti äärettömän määrän joukon A alkioita silloin, kun a on joukon A kasaantumispiste.

Perustelu
Poimitaan joukosta $A \cap B^*(a,r)$ alkio a_0. Sen jälkeen otetaan säteeksi $r_0 := |a_0 - a| > 0$ ja poimitaan joukosta $A \cap B^*(a, r_0)$ alkio a_1. Sen jälkeen otetaan säteeksi $r_1 := |a_1 - a| > 0$ ja poimitaan joukosta $A \cap B^*(a, r_1)$ alkio a_2. Poimintaa voidaan jatkaa loputtomiin, jolloin saadaan ääretön joukko $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\} \subset A \cap B^*(a,r)$. ■

Tosiasia 2
Jos ääretön joukko A sisältyy rajoitettuun väliin $[a,b]$, joukolla A on ainakin yksi väliin $[a,b]$ kuuluva kasaantumispiste.

Perustelu
Eräs kasaantumispiste on joukon

$$\{x \in \mathbb{R} \mid]-\infty, x] \cap A \text{ on äärellinen}\}$$

pienin yläraja eli supremum (ks. [2], pienimmän ylärajan määritelmä ja ominaisuudet). ■

Tosiasia 3
Jos $A_1, A_2, \ldots$ on päättymätön jono numeroituvia joukkoja, myös yhdiste $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ on numeroituva.

Perustelu
Tulos on perusteltu Wikipedian sivulla [4] käyttäen "kolmionumerointia". ■

Tosiasia 4
Ylinumeroituvalla reaalilukujoukolla on vähintään yksi kasaantumispiste.

Perustelu
Olkoon A ylinumeroituva joukko reaalilukuja. Joukko $\mathbb{R}$ voidaan esittää välien

$$[n, n+1], \quad n \in \mathbb{Z} = \{\text{kokonaisluvut}\},$$

yhdisteenä. Erään tällaisen välin ja ylinumeroituvan joukon A leikkaus on välttämättä ylinumeroituva (tosiasia 3). Tällöin kyseisellä välillä on joukon A kasaantumispiste (tosiasia 2). ■

Väite 2
Ei ole olemassa hillitöntä funktiota $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Todistus
Olkoon $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio. Reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ on yhdiste alkukuvista

$$A_n := f^{-1}\big([n, n+1[\big),$$

missä n on kokonaisluku. Koska $\mathbb{R}$ on ylinumeroituva, ainakin yksi joukoista A_n on ylinumeroituva (tosiasia 3), jolloin sillä on vähintään yksi kasaantumispiste a (tosiasia 4). Tällöin joukossa $A_n \cap B(a, r/2)$ on ääretön määrä alkioita kaikilla $r > 0$ (tosiasia 1). Koska näiden alkioiden x kuvat $f(x)$ kuuluvat välille $[n, n+1[$, ne ovat korkeintaan yksikön päässä toisistaan. Jokaisella $r > 0$ on siis olemassa luvut $a_1, a_2 \in A_n \cap B(a, r/2)$, joille $a_1 \neq a_2$ ja $|f(a_1) - f(a_2)| \leq 1$. Koska lisäksi $|a_1 - a_2| < r$, hillittömyyden määrittelevä ehto funktiolle f ei voi olla voimassa edes tapauksessa $M = 1$. ■

Vasta kun ymmärtää kaikista vaihtoehdoista ainoan, ymmärtää kaiken.
— Erno Paasilinna

Viitteet

[1] Halmetoja, M.: *Analyysin alkulähteillä.* Solmu 3/2008. `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2008/3/kummalliset.pdf`

[2] Halmetoja, M. & Merikoski, J.: *Lukion matemaattisen analyysin mestarikurssi.* Tampere, 2017. `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2016/lmam.pdf`

[3] Merikoski, J., Virtanen, A. & Koivisto, P.: *Johdatus diskreettiin matematiikkaan.* Tampere, 2004. `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2018/jdm-2017-12-19.pdf`

[4] Wikipedia: *Countable set.* `https://en.wikipedia.org/wiki/Countable_set`