Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaisten 2022 tehtäviä ja ratkaisuja

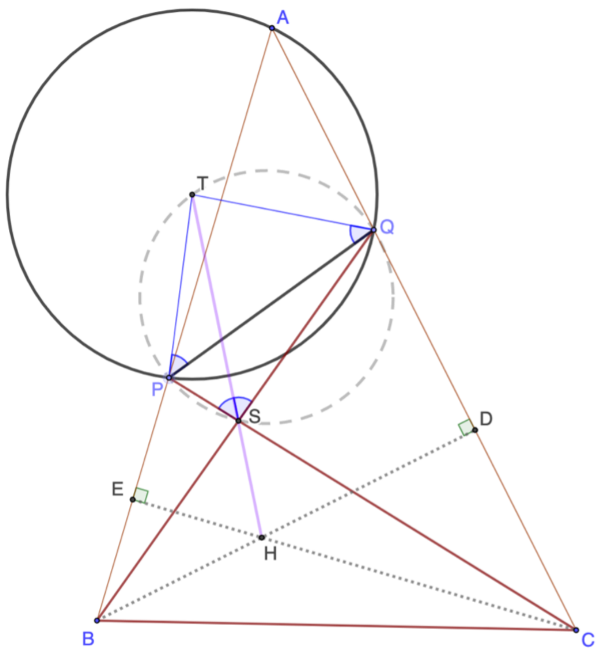
Aino Aulanko, Siiri Roschier, Anni Tapionlinna, Minea Tiitinen

Tehtävä 1: Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jossa on voimassa $BC < AB$ ja $BC < CA$. Olkoon P sellainen piste janalla AB ja Q sellainen piste janalla AC, että $P \neq B, Q \neq C$ ja $BQ = BC = CP$. Olkoot T kolmion APQ ympäri piirretyn ympyrän keskipiste, H kolmion ABC ortokeskus ja S suorien BQ ja CP leikkauspiste. Osoita, että pisteet T, H ja S ovat samalla suoralla.

Ratkaisu (Siiri): Todistus perustuu sen osoittamiseen, että sekä piste H että piste T ovat kulman $\angle BSC$ kulmanpuolittajalla. Osoitetaan aluksi, että piste H on tällä kulmanpuolittajalla. Koska $BQ = BC = CP$, on kolmio ΔBCP tasakylkinen, ja siten sen kulmasta C lähtevä korkeusjana on myös sen kulmanpuolittaja. Täten sen kulmanpuolittaja kulkee pisteen H kautta. Sama voidaan osoittaa identtisesti kolmiolle ΔQBC, ja saadaan, että kulmien $\angle CBQ = \angle CBS$ ja $\angle PCB = \angle SCB$ kulmanpuolittajat kulkevat pisteen H kautta. Koska kolmion kulmanpuolittajat leikkaavat kaikki samassa pisteessä, voidaan huomata myös kulman $\angle BSC$ kulmanpuolittajan kulkevan pisteen H kautta.

Ristikulmina $\angle BSC = \angle QSP$. Tasakylkisestä kolmiosta ΔBCP saamme, että $\angle PCB = \angle SCB = 180° - 2\angle B$, ja vastaavasti kolmiosta ΔQBC yhtäsuuruuden $\angle CBQ = \angle CBS = 180° - 2\angle C$. Tästä saamme

$$\begin{aligned}\angle QSP = \angle BSC &= 180° - \angle SCB - \angle CBS \\ &= 180° - (180° - 2\angle B) - (180° - 2\angle C) \\ &= 180° - 2\angle A.\end{aligned}$$



Koska T on ympyrän APQ keskipiste, $\angle PTQ = 2\angle PAQ = 2\angle BAC = 2\angle A$. Nyt $\angle PTQ + \angle QSP = 2\angle A + 180° - 2\angle A = 180°$, ja $PTQS$ on jännenelikulmio. Koska ympyrän säteinä $PT = TQ$, ovat niiden kehäkulmatkin samat, $\angle TSP = \angle TQP = \angle QPT = \angle QST$. Siis T on kulman $\angle QSP$ kulmanpuolittajalla, joka on sama suora kuin ristikulman $\angle BSC$ puolittaja, jolla H sijaitsi, ja voimme todeta, että pisteet T, S ja H sijaitsevat kaikki samalla suoralla, joka on kulman $\angle QSP$ kulmanpuolittaja.

Tehtävä 2: Olkoon $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ positiivisten kokonaislukujen joukko. Etsi kaikki funktiot $f\colon N \to N$, joille pätee kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla a, b

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$ sekä

(2) ainakin kaksi luvuista $f(a)$, $f(b)$ ja $f(a+b)$ ovat yhtäsuuria.

Ratkaisu (Anni): Vastaukseksi saadaan $f(n) = k^{\nu_p(n)}$, jossa $k \in N$, p on alkuluku ja $\nu_p(n)$ on p:n suurin potenssi, joka jakaa n:n.

Ensiksi voimme todeta kaikkien tätä muotoa olevien funktioiden toteuttavan ehdot. Ensimmäinen ehto pätee, sillä

$$\begin{aligned} f(ab) &= k^{\nu_p(ab)} = k^{\nu_p(a)+\nu_p(b)} \\ &= k^{\nu_p(a)} \cdot k^{\nu_p(b)} = f(a)f(b). \end{aligned}$$

Toinen ehto pätee, sillä jos $\nu_p(a) = \nu_p(b)$, niin selkeästi $f(a) = f(b)$, ja jos $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$, niin pätee $\nu_p(a+b) = \min(\nu_p(a), \nu_p(a), \nu_p(b))$, jolloin $f(a+b = f(a))$ tai $f(a+b) = f(b)$.

Seuraavaksi osoitetaan näiden olevan ainoat ratkaisut. Sijoittamalla $a = b = 1$ ensimmäiseen yhtälöön saadaan $f(1) = 1$. Lisäksi yksinkertaisella induktiolla saadaan

$$f\Big(\prod_{i=1}^{k} P_i^{\alpha_i}\Big) = \prod_{i=1}^{k} f(p_i)^{\alpha_i}.$$

Olkoon S joukko alkulukuja p, joilla $f(p) \neq 1$. Jos $|S| = 1$, niin $S = \{p\}$ ja $f(p) = k$ jollain $k \neq 1$, ja siksi aiemman induktion tuloksesta $f(n) = K^{\nu_p(n)}$. Toisaalta, jos S on tyhjä joukko, niin $f(n) = 1$ kaikilla n, jonka voi kirjoittaa aiemmassa muodossa, kun $k = 1$. Oletetaan nyt, että S sisältää vähintään kaksi alkulukua. Olkoot $p < q$ joukon kaksi pienintä alkiota. Koska kaikki $q-p$:n alkutekijät ovat q:ta pienempiä ja erisuuria kuin p, niin $f(q-p) = 1$. Käyttäen ehtoa (2) lukuihin p ja $q-p$ saadaan, että jotkin kaksi luvuista $f(p =\neq 1$, $f(q) \neq 1$, $f(q-p) = 1$ ovat yhtäsuuria. Tästä seuraa, että $f(p) = f(q)$. Olkoon $t \geq 2$ pienin kokonaisluku, jolla $p^t > q$, ja merkitään $p^t = aq + b$, jossa $0 \leq b < q$. Koska $q \geq p^{t-1}$, eikä q ole jaollinen p:llä, niin saamme $q > p^{t-1}$, eli $a < p$ ja siksi $f(a) = 1$. Tästä seuraa, että aq ei ole jaollinen p:llä eikä täten myöskään b ole. Koska $b < q$, niin $f(b) = 1$, nyt käyttäen toista ehtoa lukuihin aq ja b saamme, että jotkin kaksi luvuista $f(aq) = f(a)f(q) = f(q) = f(p)$, $f(b) = 1$ ja $f(aq+b) = f(p^t) = f(p)^t$ ovat yhtäsuuria, mikä on ristiriita, joten joukko S sisältää joko yhden tai ei yhtäkään alkulukua, jolloin ainoa ratkaisu on $f(n) = k^{\nu_p(n)}$.

Tehtävä 4: On annettu positiivinen kokonaisluku $n \geq 2$, selvitä suurin positiivinen kokonaisluku N, jota kohti on olemassa $N+1$ reaalilukua $a_0, a_1, \ldots, a_N$, joilla

(1) $a_0 + a_1 = -\frac{1}{n}$ ja

(2) $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$, kun $1 \leq k \leq N-1$.

Ratkaisu (Aino): Kerron tässä oman ratkaisuni sekä sen, minkä ideoiden kautta päädyin siihen.

Kokeilin ensin, mitä tapahtuu, jos $n = 2$. Nyt valitaan $k = 1$, saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} (a_1 + a_0)(a_1 + a_2) &= a_0 - a_2 \\ -\frac{1}{2}(a_1 + a_2) &= a_0 - a_2 \\ -\frac{1}{2}a_1 - a_0 + \frac{1}{2}a_2 &= 0 \\ -\frac{1}{2}(a_1 + a_0) - \frac{1}{2}(a_0 - a_2) &= 0 \\ -\frac{1}{2}(a_0 - a_2) &= -\frac{1}{4} \\ a_0 - a_2 &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Sijoitetaan tämä alkuperäiseen yhtälöön ja saadaan

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(a_1 + a_2) &= \frac{1}{2} \\ a_1 + a_2 &= -1. \end{aligned}$$

Nyt valitaan $k = 2$:

$$\begin{aligned} (a_2 + a_1)(a_2 + a_3) &= a_1 - a_3 \\ -a_2 - a_3 &= a_1 - a_3 \\ a_1 + a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Tämä on ristiriita, joten kun $n = 2$, niin $N = 2$.

Nyt on selvää, että N:lle on olemassa raja ainakin joillain n. Kun tämä oli tiedossa, päätin kokeilla, mitä arvoja saadaan lukujonon alussa mielivaltaisella n:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_0)(a_1 + a_2) &= a_0 - a_2 \\ -\frac{1}{n}(a_1 + a_2) &= a_0 - a_2 \\ -\frac{1}{n}a_1 - a_0 + \frac{n-1}{n}a_2 &= 0 \\ -\frac{1}{n}(a_1 + a_0) - \frac{n-1}{n}(a_0 - a_2) &= 0 \\ -\frac{n-1}{n}(a_0 - a_2) &= -1/n^2 \\ a_0 - a_2 &= \frac{1}{n(n-1)} \\ -\frac{1}{n}(a_1 + a_2) &= \frac{1}{n(n-1)} \\ a_1 + a_2 &= -\frac{1}{n-1}. \end{aligned}$$

Kokeillaan vielä, mitä tapahtuu, kun $k = 2$:

$$\begin{aligned}
(a_2 + a_1)(a_2 + a_3) &= a_1 - a_3 \\
-\frac{1}{n-1}(a_2 + a_3) &= a_1 - a_3 \\
-\frac{1}{n-1}a_2 + \frac{n-2}{n-1}a_3 - a_1 &= 0 \\
-\frac{1}{n-1}(a_2 + a_1) &= \frac{n-2}{n-1}(a_1 - a_3) \\
a_1 - a_3 &= \frac{1}{(n-2)(n-1)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{n-1}(a_2 + a_3) &= \frac{1}{(n-2)(n-1)} \\
a_2 + a_3 &= -\frac{1}{n-2}.
\end{aligned}$$

Näyttäisi siltä, että $a_k + a_{k-1} = -\frac{1}{n-k+1}$ kaikilla k, ja ristiriita tulee, kun $a_k + a_{k-1} = -1$. Varmistetaan vielä, että ristiriita tosiaan seuraa tästä jokaisella n:

$$\begin{aligned}
(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) &= a_{k-1} - a_{k+1} \\
-a_k - a_{k+1} &= a_{k-1} - a_{k+1} \\
a_{k-1} + a_k &= 0.
\end{aligned}$$

Nyt tarvitsee enää todistaa, että $a_k + a_{k-1} = -\frac{1}{n-k+1}$ kaikilla k. Tehdään tätä varten induktio-oletus, että tämä pätee k:lla , ja osoitetaan, että tällöin se pätee myös $k+1$:llä:

$$\begin{aligned}
(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) &= a_{k-1} - a_{k+1} \\
-\frac{1}{n-k+1}a_k - \frac{1}{n-k+1}a_{k+1} &= a_{k-1} - a_{k+1} \\
-\frac{1}{n-k+1}(a_{k-1} + a_k) &= \frac{n-k}{n-k+1}(a_{k-1} - a_{k+1}) \\
a_{k-1} - a_{k+1} &= \frac{1}{(n-k)(n-k+1)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) &= a_{k-1} - a_{k+1} \\
-\frac{1}{n-k+1}(a_k + a_{k+1}) &= \frac{1}{(n-k)(n-k+1)} \\
a_k + a_{k+1} &= -\frac{1}{n-k} = -\frac{1}{n-(k+1)+1}.
\end{aligned}$$

Induktiotodistus on nyt valmis, sillä alkuaskel on jo tehtävänannossa, jossa annettiin $a_0 + a_1 = -\frac{1}{n} = -\frac{1}{n-1+1}$.

Siis $a_k + a_{k-1} = -\frac{1}{n-k+1}$ kaikilla n ja k, ja ristiriita tulee, jos ja vain jos $a_k + a_{k-1} = -1$, eli kun $n-k+1 = 1$ eli $k = n$. Lukujonoa voidaan siis jatkaa a_n:ään asti, mutta ei pidemmälle. Siispä $N = n$.

Sain omasta ratkaisustani kuusi pistettä, koska unohdin mainita, että luvut a_0 ja a_1 on aina mahdollista löytää. Tämä on kuitenkin triviaalia, sillä $a_1 = -\frac{1}{n} - a_0$, joka on reaaliluku jokaisella reaaliluvulla a_0.

Tehtävä 5: Olkoon $f(n, 2k)$ lukumäärä, joka kertoo kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n, k, kuinka monella eri tavalla $n \times 2k$ -lauta voidaan peittää täysin nk kappaleella kokoa 2×1 olevilla dominolaatoilla. (Esimerkiksi on $f(2, 2) = 2$ ja $f(3, 2) = 3$.) Etsi kaikki sellaiset positiiviset kokonaisluvut n, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k luku $f(n, 2k)$ on pariton.

Ratkaisu (Minea): Olkoon $f(m, n)$ lukumäärä, joka kertoo erilaisten laatoitusten lukumäärän $m \times n$ -laudalla. (Käytännöllisyyden vuoksi määritellään, että jos $m = 0$ tai $n = 0$, niin $f(m, n) = 1$.)

Väite 1: $f(m, 2n + 1) = f(m, n) \pmod 2$ kaikilla luvuilla n ja parillisilla luvuilla m.

Todistus: Peilataan $m \times (2n + 1)$ laatoitukset keskisarakkeen suhteen. Nyt kukin peilattu laatoitus on samanlainen joko itsensä tai jonkun toisen alkuperäisen laatoituksen kanssa. Toiselle laatoitukselle peilautuvia laatoituksia on parillinen määrä, joten modulossa 2 tarkasteltuna $f(m, 2n+1)$ on kongruentti itselleen peilautuvien laatoitusten lukumäärälle.

Itselleen peilautuvissa laatoituksissa keskisarakkeen on pysyttävä muuttumattomana peilauksessa, joten keskisarakkeessa on oltava $m/2$ pystysuoraa dominopalikkaa. Sen molemmille puolille jää $m \times n$ kokoinen osa laudasta. Koska lauta on keskisarakkeen suhteen itselleen peilautuva, jokaista oikean puolen laatoitusta vastaa yksi mahdollinen vasemman puolen laatoitus. Itselleen peilautuvien laatoitusten lukumäärä on siis $f(m, n)$, joten $f(m, 2n + 1) = f(m, n) \pmod 2$.

Väite 2: $f(n, n) = 0 \pmod 2$ kaikille parillisille $n \geq 2$.

Todistus: Jos $n \times n$ -laudan laatoitus peilataan lävistäjänsä suhteen, se ei voi peilautua itselleen. Jokaisella laatoituksella on peilattuna pari, joten $n \times n$ -laatoitusten määrä on aina parillinen.

Ensimmäisestä väitteestä seuraa, että luku n toteuttaa vaatimuksen, jos ja vain jos luku $\frac{1}{2}(n-1)$ toteuttaa.

Jos $n \geq 2$, toisen väitteen perusteella luku n ei toteuta vaatimusta.

Jos $n = 0$, määritelmän mukaan luku n toteuttaa vaatimuksen, sillä $f(m, 0) = 1$.

Etsityt luvut n ovat siis muotoa $2^k - 1$. (Huomaa, että tämä sisältää myös tapauksen $n = 0$.)