Baltic Way 2006

Turku, 3 listopada 2006

Version: Polish

1. Ciąg liczb rzeczywistych $a_1, a_2, a_3, \ldots$ spełnia warunek

$$a_n = a_{n-1} + a_{n+2} \quad \text{dla } n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Ile najwięcej kolejnych wyrazów tego ciągu może być dodatnich?

2. Liczby rzeczywiste $a_i \in [-2, 17]$; $i = 1, 2, \ldots, 59$ spełniają $a_1 + a_2 + \cdots + a_{59} = 0$. Udowodnić, że

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{59}^2 \leq 2006.$$

3. Wykazać, że dla każdego wielomianu $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych istnieją liczba całkowita dodatnia m oraz takie wielomiany $P_1(x)$, $P_2(x)$, …, $P_m(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że

$$P(x) = (P_1(x))^3 + (P_2(x))^3 + \ldots + (P_m(x))^3.$$

4. Niech a, b, c, d, e, f będą nieujemnymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek $a + b + c + d + e + f = 6$. Znaleźć największą możliwą wartość wyrażenia

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab$$

i wyznaczyć wszystkie 6-tki (a, b, c, d, e, f), dla których ta największa wartość jest osiągana.

5. Nie zawsze wiarygodny profesor poświęcił swoją ostatnią książkę pewnemu 2-argumentowemu działaniu $*$. Działanie to zastosowane do dwóch liczb całkowitych daje w wyniku liczbę całkowitą. Ma ono ponadto następujące własności:

a) $x * (x * y) = y$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Z}$;

b) $(x * y) * y = x$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Z}$.

Profesor twierdzi w swojej książce, że

1. działanie $*$ jest przemienne: $x * y = y * x$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Z}$.
2. działanie $*$ jest łączne: $(x * y) * z = x * (y * z)$ dla dowolnych $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Które z tych twierdzeń wynikają z własności a) i b) ?

6. Wyznaczyć największą moc zbioru liczb całkowitych dodatnich o następujących własnościach:

1. Cyfry każdej z liczb należą do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. Żadna cyfra nie występuje w jednej liczbie więcej niż raz.
3. W każdej liczbie cyfry występują w porządku rosnącym.
4. Każde dwie liczby mają co najmniej jedną wspólną cyfrę (być może na różnych pozycjach).
5. Żadna cyfra nie występuje we wszystkich liczbach.

7. Na 10-osobowym przyjęciu fotograf robił zdjęcia. Każda spośród 45 możliwych par uczestników występuje razem na dokładnie jednym zdjęciu, a każde zdjęcie przedstawia dwie lub trzy osoby. Jaka jest najmniejsza możliwa liczba zrobionych zdjęć?

8. Dyrektor wykrył w swoim wydziale 6 spisków. Każdy z nich został zawiązany przez dokładnie 3 osoby. Dowieść, że dyrektor może podzielić wydział na dwa laboratoria w taki sposób, aby żadna spiskująca grupa nie znalazła się cała w jednym laboratorium.

9. Każdemu wierzchołkowi pięciokąta foremnego przypisano liczbę rzeczywistą. Wykonujemy wielokrotnie następującą operację: Wybieramy dwa sąsiednie wierzchołki pięciokąta i zastępujemy każdą z przypisanych im liczb przez średnią arytmetyczną tych liczb. Rozstrzygnąć, czy zawsze można uzyskać zera we wszystkich wierzchołkach, jeżeli w początkowej pozycji suma wszystkich pięciu liczb jest równa zeru?

10. W tabeli 30×30 rozmieszczono 162 plusy i 144 minusy, przy czym każdy wiersz i każda kolumna zawiera co najwyżej 17 znaków. (Każde pole tabeli zawiera co najwyżej jeden znak.) Dla każdego plusa obliczamy liczbę minusów stojących w tym samym wierszu, a dla każdego minusa obliczamy liczbę plusów stojących w tej samej kolumnie. Znaleźć największą możliwą sumę wszystkich obliczonych liczb.

11. Wysokości trójkąta mają długości 12, 15 i 20. Ile wynosi pole tego trójkąta?

12. W trójkącie ABC punkt B_1 jest środkiem boku AB, a punkt C_1 jest środkiem boku AC. Niech P będzie różnym od A punktem przecięcia okręgów opisanych na trójkątach ABC_1 i AB_1C. Niech P_1 będzie różnym od A punktem przecięcia prostej AP z okręgiem opisanym na trójkącie AB_1C_1. Dowieść, że $2AP = 3AP_1$.

13. W trójkącie ABC punkty D, E leżą odpowiednio na bokach AB, AC. Proste BE i CD przecinają się w punkcie F. Wykazać, że jeżeli

$$BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA,$$

to punkty A, D, F, E leżą na jednym okręgu.

14. Na powierzchni sfery zaznaczono 2006 punktów. Udowodnić, że powierzchnię można rozciąć na 2006 przystających części tak, aby każda część zawierała w swoim wnętrzu dokładnie jeden spośród zaznaczonych punktów.

15. Środkowe trójkąta ABC przecinają się w punkcie M. Prosta t przechodząca przez punkt M przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach X i Y, przy czym punkty A i C leżą po tej samej stronie prostej t. Dowieść, że $BX \cdot BY = AX \cdot AY + CX \cdot CY$.

16. Czy istnieją takie 4 różne liczby całkowite dodatnie, że iloczyn dowolnych dwóch z nich, powiększony o 2006, jest kwadratem liczby całkowitej?

17. Znaleźć wszystkie takie liczby całkowite dodatnie n, że liczba $3^n + 1$ dzieli się przez n^2.

18. Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n niech a_n oznacza ostatnią cyfrę liczby $n^{(n^n)}$. Udowodnić, że ciąg (a_n) jest okresowy i wyznaczyć długość najkrótszego okresu.

19. Czy istnieje taki ciąg liczb całkowitych dodatnich $a_1, a_2, a_3, \ldots$, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n suma każdych kolejnych n wyrazów tego ciągu dzieli się przez n^2 ?

20. Cyframi pewnej 12-cyfrowej liczby całkowitej dodatniej, podzielnej przez 37, mogą być tylko 1, 5 i 9. Dowieść, że suma cyfr tej liczby jest różna od 76.

Czas pracy: $4\frac{1}{2}$ godz. Za każde zadanie można otrzymać 5 punktów.