Baltic Way 2006

Turku, November 3, 2006

Version: Swedish

1. Om en följd $a_1, a_2, a_3, \ldots$ av reella tal vet man att

$$a_n = a_{n-1} + a_{n+2} \quad \text{för } n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Vilket är det största möjliga antalet på varandra följande positiva element som denna följd kan innehålla?

2. Anta att de reella talen $a_i \in [-2, 17]$; $i = 1, 2, \ldots, 59$ uppfyller $a_1 + a_2 + \cdots + a_{59} = 0$. Visa att

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{59}^2 \leq 2006.$$

3. Visa att det för varje polynom $P(x)$ med reella koefficienter finns ett positivt heltal m och polynom $P_1(x)$, $P_2(x)$, …, $P_m(x)$ med reella koefficienter sådana att

$$P(x) = (P_1(x))^3 + (P_2(x))^3 + \ldots + (P_m(x))^3.$$

4. Låt a, b, c, d, e, f vara ickenegativa reella tal som uppfyller $a + b + c + d + e + f = 6$. Bestäm det största möjliga värdet av

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab$$

och bestäm alla 6-tuppler (a, b, c, d, e, f) för vilka detta värde antas.

5. En tidvis opålitlig professor har skrivit en bok om en viss binär operation $*$. När denna operation verkar på två godtyckliga heltal är resultatet ett nytt heltal. Operationen antas uppfylla följande två axiom:

a) $x * (x * y) = y$ för alla $x, y \in \mathbb{Z}$;

b) $(x * y) * y = x$ för alla $x, y \in \mathbb{Z}$.

Professorn påstår i sin bok att

1. operationen $*$ är kommutativ: $x * y = y * x$ för alla $x, y \in \mathbb{Z}$.
2. operationen $*$ är associativ: $(x * y) * z = x * (y * z)$ för alla $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Vilka av dessa påståenden följer av de givna axiomen?

6. Bestäm det största möjliga antalet element i en mängd av positiva heltal med följande egenskaper:

1. Talen skrivs med siffror ur mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. Ingen siffra förekommer mer än en gång i samma tal.
3. Siffrorna i varje tal står i växande ordning.
4. Varje par av tal har minst en gemensam siffra (möjligen i olika positioner).
5. Det finns ingen siffra som förekommer i alla talen.

7. En fotograf har tagit ett antal fotografier vid en fest med 10 personer. Vart och ett av de 45 paren av personer förekommer tillsammans på exakt ett foto, och varje foto visar två eller tre personer. Vilket är det minsta möjliga antalet foton som fotografen kan ha tagit?

8. En chef har fått kännedom om sex konspirationer på sin avdelning. I varje konspiration är exakt tre personer inblandade. Visa att chefen kan dela avdelningen i två delar och på så sätt splittra alla de konspirerande grupperna.

9. Varje hörn i en regelbunden femhörning tilldelas ett reellt tal. Följande operation får upprepas ett godtyckligt antal gånger: Man väljer två intilliggande hörn i femhörningen, och ersätter talen i båda dessa hörn med det aritmetiska medelvärdet av de två talen. Är det alltid möjligt att på detta sätt få alla fem talen att vara noll samtidigt, givet att summan av de ursprungliga talen är noll?

10. 162 plustecken och 144 minustecken skrivs i rutorna i en tabell med 30 rader och 30 kolumner på ett sådant sätt att varje rad och varje kolumn innehåller högst 17 tecken. (Ingen ruta innehåller mer än ett tecken.) För varje plustecken räknar man antalet minustecken i samma rad och för varje minustecken räknar man antalet plustecken i samma kolumn. På detta sätt får man ett tal för varje plustecken och ett tal för varje minustecken. Vad är det största möjliga värdet av summan av alla dessa tal?

11. Höjderna i en triangel är 12, 15, och 20. Vad är arean av triangeln?

12. Låt ABC vara en triangel, låt B_1 vara mittpunkten på sidan AB och C_1 mittpunkten på sidan AC. Låt P vara den skärningspunkt som inte är A mellan de omskrivna cirklarna till trianglarna ABC_1 och AB_1C. Låt P_1 vara den skärningspunkt som inte är A mellan linjen AP och den omskrivna cirkeln till triangeln AB_1C_1. Visa att $2|AP| = 3|AP_1|$.

13. I en triangel ABC ligger punkterna D och E på sidorna AB respektive AC. Linjerna BE och CD skär varandra i F. Visa att om

$$|BC|^2 = |BD| \cdot |BA| + |CE| \cdot |CA|,$$

så ligger punkterna A, D, F, E på en cirkel.

14. 2006 punkter ligger på ytan av en sfär. Visa att ytan kan skäras upp i 2006 kongruenta delar så att varje del innehåller exakt en av punkterna i sitt inre.

15. Medianerna i triangeln ABC skär varandra i punkten M. En linje t genom M, med A och C på samma sida av t, skär den omskrivna cirkeln till ABC i X och Y. Visa att $|BX| \cdot |BY| = |AX| \cdot |AY| + |CX| \cdot |CY|$.

16. Finns det 4 olika positiva heltal sådana att varje par av dem har en produkt som ger en heltalskvadrat när den adderas till 2006?

17. Bestäm alla positiva heltal n sådana att $3^n + 1$ är delbart med n^2.

18. För varje positivt heltal n låter vi a_n beteckna den sista siffran i $n^{(n^n)}$. Visa att följden (a_n) är periodisk och bestäm längden av (den kortaste) perioden.

19. Finns det en följd $a_1, a_2, a_3, \ldots$ av positiva heltal sådan att varje summa av n på varandra följande element är delbar med n^2 för varje positivt heltal n?

20. Ett 12-siffrigt positivt heltal skrivs med siffrorna 1, 5 och 9 och är delbart med 37. Visa att talets siffersumma inte är 76.

Skrivtid 4,5 timmar. 5 poäng per problem.