2003.1. Olkoon f jokin tehtävän ehdon toteuttava funktio. Jos a on positiivinen rationaaliluku, niin $af(x)$ toteuttaa myös tehtävän ehdot. Jos tehtävällä on ratkaisuja, ratkaisujen joukossa on siten funktio f, jolle $f(1) = 1$. Osoitetaan, että tällaisia funktioita on vain yksi. Tehdään tämä induktiolla. Olkoon g toinen ratkaisu, jolle pätee $g(1) = 1$. Osoitetaan, että ehdosta $g\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right)$ aina, kun $p+q \le n$ seuraa $g\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right)$ aina, kun $p+q \le n+1$. Tämä on oletuksen mukaan totta, kun $n = 2$. Olkoon $q < p$. Nyt

$$g\left(\frac{p}{q}\right) = g\left(\frac{p-q}{q}+1\right) = \left(1+\frac{p-q}{q}\right)g\left(\frac{p-q}{q}\right) = \left(1+\frac{p-q}{q}\right)f\left(\frac{p-q}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right),$$

koska $p-q+q = p < p+q$, joten induktio-oletusta voidaan käyttää. Ehdon (1) perusteella tapaus $p < q$ palautuu jo käsiteltyyn. Jos p:llä ja q:lla ei ole yhteisiä tekijöitä, asetetaan $f\left(\frac{p}{q}\right) = pq$. Nyt $\left(1+\frac{q}{p}\right)pq = (p+q)q$ ja $\frac{p}{q}+1 = \frac{p+q}{q}$. Luvuilla $p+q$ ja q ei ole yhteisiä tekijöitä. Määritelty f toteuttaa siis ehdon (2). Ehto (1) toteutuu triviaalisti. Kaiken kaikkiaan tehtävän ratkaisut ovat kaikki funktiot $f\left(\frac{p}{q}\right) = apq$, missä a on positiivinen reaaliluku ja s.y.t.$(p,\, q) = 1$.

2003.2. Olkoon a jokin tehtävän yhtälön reaalinen ratkaisu. Silloin a on myös toisen asteen yhtälön $ax^2+px+q = 0$ reaalinen ratkaisu. Mutta tämä merkitsee sitä, että toisen asteen yhtälön diskriminantti $p^2 - 4aq$ on ei-negatiivinen.

2003.3. Koska $xyz = 1$, niin $(1+x)(1+y)(1+z) = 1+x+y+z+yz+xz+xy+xyx = x+y+z+\frac{1}{x}+1+y+\frac{1}{z}+2$. On siis todistettava, että

$$x+y+z+\frac{1}{x}+1+y+\frac{1}{z} \ge 2\sqrt[3]{\frac{y}{x}}+\sqrt[3]{\frac{z}{y}}+\sqrt[3]{\frac{x}{y}}.$$

Mutta aritmeettisen ja geometisen keskiarvon välisen epäyhtälön perusteella

$$\sqrt[3]{\frac{y}{x}} \le \frac{1}{3}\left(1+y+\frac{1}{x}\right).$$

Vastaavat epäyhtälöt pätevät epäyhtälön oikean puolen kahdelle muulle termille. Riittää siis, jos todistetaan epäyhtälö

$$x+y+z+\frac{1}{x}+1+y+\frac{1}{z} \ge \frac{2}{3}\left(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+2.$$

Tämä epäyhtälö seuraa välittömästi kaikilla positiivisilla luvuilla a toteutuvasta epäyhtälöstä $a+\frac{1}{a} \ge 2$.

2003.4. Osoitetaan ensin, että

$$\frac{2a}{a^2+bc} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön $b(a-c)^2+c(a-b)^2 \ge 0$ kanssa ja siis tosi. Osoitetaan sitten, että

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\right).$$

Kun tämä epäyhtälö kerrotaan abc:llä, nähdään, että se on yhtäpitävä toden epäyhtälön $(a-b)^2+(a-c)^2 \ge 0$ kanssa. On siis kaikkiaan osoitettu, että

$$\frac{2a}{a^2+bc} \le \frac{1}{4}\left(\frac{2a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\right).$$

Samoin on totta, että

$$\frac{2b}{b^2+ca} \le \frac{1}{4}\left(\frac{2b}{ca}+\frac{c}{ab}+\frac{a}{bc}\right)$$

ja

$$\frac{2c}{c^2+ab} \le \frac{1}{4}\left(\frac{2c}{ab}+\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}\right).$$

Väite saadaan, kun kolme viimeistä epäyhtälöä lasketaan yhteen.

2003.5. Todetaan ensin induktiolla, että $a_n = 2^{2^{n-2}}$, kun $n \ge 1$. Näin on, kun $n=1$. Jos $a_n = 2^{2^{n-2}}$, niin $a_{n+1} = a_n a_{n-1}^2 = 2^{2^{n-2}} 2^{2\cdot 2^{n-3}} = 2^{2^{n-1}}$, joten induktioaskel on otettu. Koska $1+a_1 = 1+\sqrt{2}$, todistettavaksi epäyhtälöksi jää

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) < 2a_2a_3\cdots a_n.$$

Tämän epäyhtälön oikea puoli on

$$2^{1+2^0+2^1+\cdots+2^{n-2}} = 2^{2^{n-1}}.$$

Vasen puoli puolestaan on

$$\left(1+2^{2^0}\right)\left(1+2^{2^1}\right)\cdots\left(1+2^{2^{n-2}}\right) = 1+2^{2^0}+2^{2^1}+2^{2^0+2^1}+2^{2^2}+\cdots+2^{2^0+2^1+\cdots+2^{n-2}}$$
$$= 1+2+2^2+\cdots+2^{2^{n-1}-1} = 2^{2^{n-1}}-1.$$

Todistus on valmis.

2003.6. Olkoon $m = \dfrac{n}{d}$. Tarkastellaan kaikkia joukon $S_n = \{1,\,2,\,\ldots,\,n\}$ osituksia $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$, missä jokaisessa joukossa A_j on d lukua (ja joukot ovat yhteisalkiottomia). Olkoon tällaisten ositusten lukumäärä t. Jokainen joukon S_n d-alkioinen osajoukko esiintyy yhtä moessa osituksessa. Olkoon tämä lukumäärä s. S_n:llä on $\dbinom{n}{d}$ d-alkioista osajoukkoa. Selvästi $s\cdot\dbinom{n}{d} = mt$ (vasemmanpuoleinen tulo laskee jokaisen osituksen jokaisen siihen kuuluvan m:n eri joukon kohdalta). Jokaisessa osituksessa on oltava ainakin yksi sellainen joukko A_j, että $\sum_{i\in A_j} x_i \ge 0$. Joukkoja, joilla on tämä ominaisuus on oltava ainakin

$$\frac{t}{s} = \frac{1}{m}\binom{n}{d} = \frac{d}{n}\binom{n}{d} = \binom{n-1}{d-1}$$

kappaletta.

2003.7. Jos $X = \{100, 101, \ldots, 10000\}$, niin kaikille $x\angle y \in X$, $x \neq y$, pätee $xy \geq 100 \cdot 101 > 10000$. Joukossa X voi olla ainakin $10000 - 99 = 9901$ alkiota. Osoitetaan, että enempää ei voi olla. Olkoon X tehtävässä kuvattu joukko. Jos kaikki X:n alkiot ovat ≥ 100, X:ssä on enintään 9901 alkiota. Jos $1 \in X$, on oltava $X = \{1\}$. Oletetaan, että X:ssä ovat alkiot $1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < 100$. Tarkastellaan sitten lukupareja $(200 - x_1,\ x_1(200-x_1))$, $(200-x_2,\ x_2(200-x_2)$, $\ldots$, $(200-x_k, x_k(200-x_k))$. Oletuksesta seuraa, että vain toinen kunkin parin kahdesta luvusta kuuluu joukkoon X. Kaikki luvut ovat keskenään eri suuria ja jokainen on > 100 ($100 < 200-x_k < 200-x_{k-1} < \cdots < 200-x_1 < 200$ ja koska $x_j(200-x_j)-200 = (x_j-1)\cdot 200-(x_j-1)x_j-x_j = 200(x_j-1)-x_j > 200-100$ ja $x_j(200-x_j)-x_i(200-x_i) = 200(x_j-x_i)-(x_j-x_i)(x_i+x_j) = (200-(x_i+x_j))(x_j-x_i) > 0$, kun $i < j$, niin $200 < x_1(200-x_1) < x_2(200-x_2) < \cdots < x_k(200-x_k)$). On siis ainakin k 100:aa suurempaa lukua, jotka eivät kuulu X:ään ja $99 - k$ sataa pienempää lukua, jotka eivät kuulu X:ään. X:ssä on siis enintään 9901 lukua.

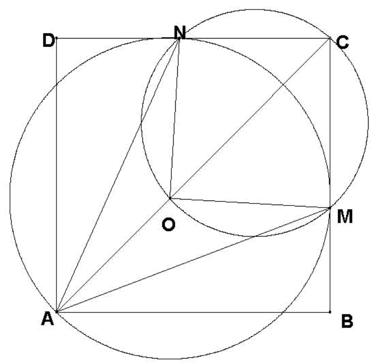
2003.8. Osoitetaan että pelaaja, joka saa ottaa makeisia tilanteessa, jossa pöydällä on $2n$ makeista, voittaa. Osoitetaan tämä induktiolla. Jos $n = 1$, asia on ilmeinen. Oletetaan, että kun pöydällä on $2n$ makeista, seuraava ottaja pystyy voittamaan. Olkoon pöydällä $2n + 2$ makeista. Jos tilanteessa, jossa pöydällä on $2n + 1$ voittostrategia olisi toiseksi ottavalla pelaajalla, $2n$-tilanteen aloittaja söisi yhden makeisen. Tällöin hän olisi $2n + 1$-tilanteen toinen ottaja, ja voittaisi. Oletetaan, että $2n + 1$ tilanteessa aloittaja olisi voittaja. Silloin siinä tilanteessa aloittajan ensimmäinen siirto ei voi olla yhden makeisen syönti, koska se johtaisi vastapelaajan $2n$-tilanteeseen, jossa induktio-oletuksen mukaan tämä voittaisi. Aloittajan siirto olisi n:n makeisen syönti, ja toinen olisi tämän jälkeen $n + 1$-tilanteessa ja häviäisi. Mutta $2n + 2$-tilanteen aloittaja voi saattaa vastustajansa tilanteeseen $n + 1$, joka johtaa tämän häviöön ja siis $2n + 2$-aloittajan voittoon. Parillisessa aloitustilanteessa oleva siis voittaa. Mutta 2003-aloittaja voi ottaa yhden tai 1001 makeista, ja saattaa näin ollen toisen välttämättä parilliseen aloitustilanteeseen.

2003.9. Käytetään hyväksi Fibonaccin lukuja F_n, $F_0 = 1$, $F_1 = 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, kun $n \geq 2$. Silloin $144 = F_{10}$. Osoitetaan yleisesti, että k:lla kysymyksellä, joihin vastataan niin kuin tehtävässä esitetään, voidaan määrittää luku positiivinen kokonaisluku $n \leq F_k$. Jos $k = 0$, $n = 1$ ja jos $k = 1$, riittää kysyä, onko $n < 2$. Yleisessä tapauksessa kysytään ensin, onko $n < F_{k-1} + 1$ ja onko $n < F_{k-2} + 1$. Niin kauan kuin saadaan yöntäviä vastauksia, sanokaamme i:nnen kysymyksen jälkeen $i - 1$:een kysymykseen, on seuraava kysymys, onko $n < F_{k-(i+1)} + 1$. Jos j:nnen kysymyksen jälkeen saadaan kielteinen vastaus $j - 1$:seen kysymykseen, tiedetään, että $F_{k-(j-1)} + 1 \leq n \leq F_{k-(j-2)}$. n on nyt jokin $F_{k-(j-2)} - F_{k-(j-1)} = F_{k-j}$:stä kokonaisluvusta. Induktiivisesti voidaan päätellä, että n saadaan selville jäljellä olevilla $k - j$:llä kysymyksellä. Jos kaikkiin kysymyksiin saadaan myönteinen vastaus, niin viimeinen kysymys on onko n pienempi kuin $F_{k-k} + 1 = 2$, jos vastaus on myönteinen, $n = 1$.

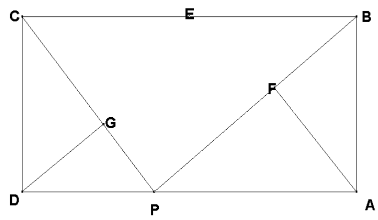
2003.10. Osoitetaan ensin, että $n \geq 12$. Valitaan 12 pistettä (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, 12$ niin, että $x_i \equiv 0 \bmod 4$, kun $1 \leq i \leq 6$ ja $x_i \equiv 1 \bmod 4$, kun $7 \leq i \leq 12$ ja $y_i \equiv 0 \bmod 4$, kun $1 \leq i \leq 3$ tai $10 \leq i \leq 12$ ja $y_i \equiv 1 \bmod 4$ muulloin. Neljän x-koordinaatin keskiarvo on kokonaisluku, jos kaikki indeksit ovat ≤ 6, jolloin y-koordinaattien keskiarvo ei ole kokonaisluku, tai kun kaikki indeksit ovat ≥ 7, jolloin taaskaan y-koordinaattien summa ei ole neljällä jaollinen. Osoitetaan sitten, että jos $n \geq 13$, jonkin neljän pisteen keskiö on aina hilapiste. Yksinkertainen laatikkoperiaatteen sovellus osoittaa, että jokaisen viiden pisteen joukossa on kaksi pistettä (x, y) ja (x', y') siten, että $x \equiv x' \bmod 2$ ja $y \equiv y' \bmod 2$. Jokaisen viiden pisteen joukossa on siis kaksi sellaista, joiden välisen janan keskipiste on hilapiste. 13 pisteen joukosta voidaan poimia 5 erillistä pisteparia, joiden välisen janan keskipiste on hilapiste. Näiden viiden keskipisteen pisteen joukossa on edelleen kaksi, joiden välisen janan keskipiste on hilapiste. Kyseinen keskipiste on kyseisten janojen päätepisteiden keskiö.

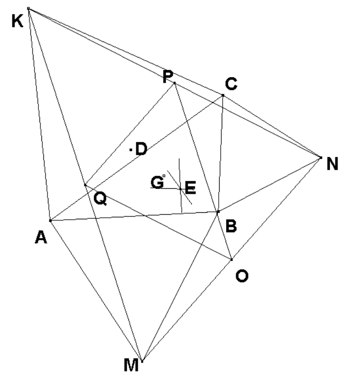
2003.11. Tämä on mahdollista. Rakennetaan konfiguraatio vaiheittain. Piirretään ensin vinoneliö, jonka sivut ja yksi lävistäjä ovat yksikön pituisia. Vinoneliön neljän kärkipisteen välisistä etäisyyksistä viisi on yksikön pituisia. Valitaan nyt kaksi yksikkövektoria, joiden välinen kulma on 60° ja tehdään molempien vektorien määrittämät yhdensuuntaissiirrot. Vektorit voidaan valita niin, että alkuperäisen vinoneliön ja sen kuvien kärkipisteet eivät osu päällekkäin. Nyt on syntynyt kuvio, jossa on 12 pistettä ja $3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 27$ pisteiden välistä yksikön pituista etäisyyttä (jokainen lähtökuvion neljästä kärkipisteestä ja tämän pisteen kuvat ovat tasasivuisen kolmion kärjet). Kun sama prosessi toistetaan, saadaan ensin $3 \cdot 12 = 36$ pistettä ja $3 \cdot 27 + 3 \cdot 12 = 117$ yksikköetäisyyttä, sitten $3 \cdot 36 = 108$ pistettä ja $3 \cdot 117 + 3 \cdot 36 = 459$ yksikköetäisyyttä, $3 \cdot 108 = 324$ pistettä ja $3 \cdot 459 + 3 \cdot 108 = 1701$ yksikköetäisyyttä ja $3 \cdot 324 = 972$ pistettä ja $3 \cdot 1701 + 3 \cdot 324 = 6075$ yksikköetäisyyttä. Huomattakoon, että ehto jonka mukaan "monistetun" kuvion kärjet eivät osua "monistettavan" kuvion kärkipisteisiin saadaan aina toteutumaan, koska siirtovektorien suunta voidaan valita vapaasti, ja väistettävänä on aina äärellisen monta pistettä.

2003.12. Kolmion MCN ympäri piirretty ympyrä leikkaa janan AC pisteessä C. Koska $\angle MCO = \angle NCO\ (= 45^\circ)$, jänteet OM ja ON ovat yhtä pitkät. Jännenelikulmiossa $MCNO$ kulma MCO on suora, joten vastakkainen kulma NOM on myös suora. Jännettä MN vastaavat kehäkulmat ympyrässä, jonka keskipiste on O ja säde OM ovat 45°:een kulmia ja kaikki pisteet, joista MN näkyy 45°:een kulmassa ovat tällä ympyrällä. Siis A on tällä ympyrällä, joka näin ollen on kolmion AMN ympäri piirretty ympyrä.

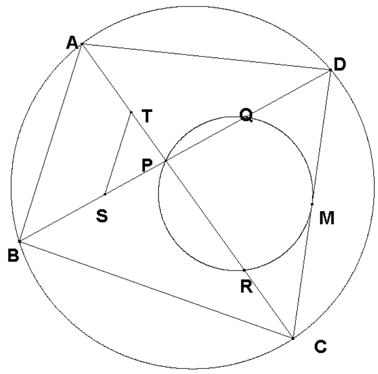


2003.13. Piirretään pisteiden F ja P kautta ympyrä, joka sivuaa suoraa BC. Suorakulmaisesta kolmiosta BPA saadaan $\dfrac{BP}{BA} = \dfrac{BA}{BF}$ eli $BP \cdot BF = BA^2 = BE^2$. Koska pisteen B potenssi sanotun ympyrän suhteen on BE^2, on E:n oltava sivuamispiste. Aivan samoin nähdään, että G:n ja P:n kautta kulkeva BC:tä sivuava ympyrä sivuaa BC:tä pisteessä E. Vain yksi ympyrä sivuaa BC:tä pisteessä E ja kulkee pisteen P kautta. Siis E, P, F ja G ovat samalla ympyrällä.





2003.14. Olkoot janojen MN, NK ja KM keskipisteet O, P ja Q. Jos G on kolmion MNK painopiste, niin kolmiot MNK ja PQO ovat homoteettiset, homotetiakeskuksena G ja homotetiakertoimena $-\frac{1}{2}$. Homotetiakuvauksessa kulmat ja suorien suunnat säilyvät, joten O:sta piirretty AC:tä vastaan kohtisuora suora kuvautuu K:sta piirretylle AC:tä vastaan kohtisuoralle suoralle. Koska CKA on tasasivuinen kolmio, tämä suora on AC:n keskinormaali. Vastaavasti P:stä ja Q:sta AB:tä ja BC:tä vastaan piirretyt kohtisuorat kuvautuvat AB:n ja BC:n keskinormaaleille. Koska keskinormaalit leikkaavat samassa pisteessä D, myös tehtävässä kuvatut kolme suoraa leikkaavat samassa pisteessä E, joka on D:n vastinpiste edellä määritellyssä homotetiassa.



2003.15. Olkoon Γ tehtävässä määritelty P:n ja M:n kautta kulkeva ympyrä. Lasketaan pisteiden C ja D potenssi Γ:n suhteen ja otetaan huomioon se, että CD on Γ:n tangentti ja $CM = MD$. Saadaan $CR \cdot CP = CM^2 = MD^2 = DP \cdot DQ$ eli $RC = \dfrac{DP \cdot DQ}{CP}$. Koska $ST \| AB$, on $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{AT}{BS} = \dfrac{AT}{DQ}$ eli $AT = \dfrac{DQ \cdot AP}{BP}$. Väite on yhtäpitävä yhtälön $\dfrac{DP}{CP} = \dfrac{AP}{BP}$ kanssa. Mutta koska $ABCD$ on jännenelikulmio, sen ympäri voidaan piirtää ympyrä Γ'. Pisteen P potensslle Γ':n suhteen pätee $AP \cdot PC = BP \cdot PD$, joten väite on todistettu.

2003.16. Olkoon $a - b = p$, missä p on alkuluku ja olkoon $ab = k^2$. Koska $b(b+2) = (b+1)^2 - 1$, toteamme, että $p \neq 2$. Nyt $k^2 = (p+b)b = b^2 + pb = \left(b + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}p^2$ ja $p^2 = (2b+p)^2 - 4k^2 = (2b+p+2k)(2b+p-2k)$. Koska p on alkuluku, luvulla p^2 on vain kaksi ykköstä suurempaa tekijää, p, joten on oltava $2b + p + 2k = p^2$ ja $2b + p - 2k = 1$. Kun yhtälöt lasketaan puolittain yhteen, saadaan $4b + 2p = p^2 + 1$ eli $b = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ ja $a = b + p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$. Tämä välttämätön ehto on myös riittävä: jos $a = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$, $b = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$, missä p on mielivaltainen pariton alkuluku, niin a ja b toteuttavat tehtävän ehdon.

2003.17. Marin ohjelma toimii oikein. Olkoon $d > 1$ jokin n:n tekijä. Oletetaan, että Marin ohjelma antaa tulostuksen "d on yhdistetty". Niiden d:n tekijöiden, joitka ovat $\leq d$, lukumäärä k on ≥ 2 (ainakin 1 ja d kuuluvat joukkoon). Silloin $\lceil k/2 \rceil < k$. Ohjelman löytämä d:n tekijä ei siis ole tekijöistä suurin eli d, joten d on yhdistetty luku. Jos taas d on yhdistetty luku, sillä on pienin alkutekijä p; selvästi $p^2 \leq d$. Jos nyt $a_1, \ldots, a_m$ ovat p:tä pienemmät n:n tekijät, niin myös luvut $pa_1, \ldots, pa_m$ ovat d:tä pienempiä n:n tekijöitä (p:llä ja luvuilla a_i ei ole yhteisiä tekijöitä). n:llä on siis ainakin $2m + 1$ d:tä pienempää tekijää, ja p on näiden tekijöiden joukossa järjestyssijalla $m+1$. Mutta $m+1 \le \lceil k/2 \rceil$, joten Marin ohjelma löytää p:n ja tulostaa d:n yhdistetyksi.

2003.18. Ehdot täyttävä väritys on mahdollinen. Liitetään jokaiseen kokonaislukuun k luku, josta on poistettu tekijät 5, siis sellainen k', että $k = 5^m k'$, $m \ge 0$ ja k' jaoton viidellä. Väritetään nyt 0 ja 1 siniseksi, 2 vihreäksi, 3 punaiseksi ja 4 keltaiseksi. Väritetään kaikki kokonaisluvut niin, että k_1 ja k_2 ovat samanväriset, jos ja vain jos $k_1' \equiv k_2' \mod 5$. Oleteaan nyt, että a, b, c ja d ovat samanväriset ja että $3a - 2b - 2c + 3d = 0$. Tämä yhtälö voidaan jakaa luvulla 5^m, missä m on suurin kokonaisluku, jolla 5^m on tekijänä luvuissa a, b, c ja d. Saadaan $0 = 3 \cdot 5^A a' - 2 \cdot 5^B b' - 2 \cdot 5^C c' + 3 \cdot 5^D d' \equiv 3(5^A a' + 5^B b' + 5^C c' + 5^D d') \mod 5$, missä ainakin yksi luvuista A, B, C, D on 0. Jos luvut a, b, c ja d ovat nollasta eroavia, niin $a' \equiv b' \equiv c' \equiv d' \not\equiv 0 \mod 5$. Silloin $5^A + 5^B + 5^C + 5^D \equiv 0 \mod 5$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska yhteenlaskettavista viiden potensseista ainakin yksi on $5^0 = 1$. Jos jotkin yksi, kaksi tai kolme luvuista a, b, c, d ovat nollia, sama päättely toimii, kun kyseiset luvut jätetään pois tarkastelusta. Yhtälö $3a - 2b = 2c - 3d$ ei siis ole mahdollinen.

2003.19. Todistetaan epäsuorasti. Olkoon $a + b?pq$, missä $p \ne q$ ja p ja q ovat alkulukuja. Jos $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ on neliöluku, niin luvun $a^2 - ab + b^2 = (a+b)^2 - 3ab$ on oltava jaollinen p:llä ja q:lla, joten $3ab$:n on oltava jaollinen p:llä ja q:lla. Voidaan olettaa, että $p \ne 3$. Silloin $p \mid a$ tai $p \mid b$. Koska $p \mid (a+b)$, sekä $p \mid a$ että $p \mid b$. Olkoon $a = pn$, $b = pm$. Nyt on oltava $q = 3$, sillä muussa tapauksessa voitaisiin päätellä, että myös $q \mid a$ ja $q \mid b$, jolloin $a \ge pq$, $b \ge pq$ ja $a + b > pq$. Näin ollen $3p = a + b = p(n+m)$. Siis $n = 1$ ja $m = 2$ tai $n = 2$ ja $m = 1$. Tällöin $a^3 + b^3 = 9p^3$. $a^3 + b^3$ ei siis voi olla neliöluku. Todistus on valmis.

2003.20. Olkoot $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ luvun n parittomat tekijät ja olkoon 2^k korkein 2:n potenssi, joka on n:n tekijä. Luvun n kaikki tekijät ovat a_1, a_2, $\ldots$, a_q, $2a_1$, $\ldots$, $2a_q$, $\ldots$, $2^k a_1$, $\ldots$, $2^k a_q = n$. n:ää pienempiä tekijöitä on siis $(k+1)q - 1$ kappaletta ja kaikkien tekijöiden, n itse mukaan lukien, summa on $2n = (2^{k+1} - 1)(a_1 + \cdots + a_q) + (k+1)q - 1$. Jos q on parillinen, yhtälön oikea puoli on pariton. Jos q on pariton ja $k+1$ on pariton, yhtälön oikea puoli on pariton. Lukujen p ja k on siis molempien oltava parittomia. Kokonaisluvulla $n' = 2^{-k} n < n$ on pariton määrä q tekijöitä. Jos n':n alkulukuhajotelma on $n' = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, niin sen tekijöiden määrä on $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$; tämä on pariton vain, jos jokainen α_j on parillinen eli jos n' on neliöluku. Siis, koska k on pariton, $n = 2^k s^2 = 2^{2t+1} s^2 = 2(2^t s)^2$.