Baltian Tie 2008. Ratkaisuja

1. Merkitään $q(x) = p(x) - x$. Oletetaan, että q ei ole nollapolynomi. Silloin sillä on enintään p:n asteen verran nollakohtia. Koska $q(0) = 0$, q:n nollakohdista suurin, x_0, on ei-negatiivinen. Selvästi $p(x_0) = x_0$. Mutta $q((x_0+1)^3) = p((x_0+1)^3) - (x_0+1)^3 = (p(x_0)+1)^3 - (x_0+1)^3 = (x_0+1)^3 - (x_0+1)^3 = 0$. Koska $x_0 \geq 0$, $(x_0+1)^3 > x_0+1 > x_0$. Näin ollen x_0 ei olisikaan suurin q:n nollakohdista. Siis q on nollapolynomi ja $p(x) = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

2. Asetetaan $x = 2+b+c^2$, $y = 2+c+a^2$ ja $z = 2+a+b^2$. Silloin $x+y+x = 6+(a^2+b^2+c^2)+a+b+c = 9+a+b+c$. Caychyn–Schwarzin epäyhtälön perusteella $(a+b+c)^2 \leq (|a|\cdot 1+|b|\cdot 1+|c|\cdot 1)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(1^2+1^2+1^2) = (a^2+b^2+c^2)^2 = 9$, joten $x+y+x \leq 12$. Koska $a^2+b^2+c^2 = 3$, kukin luvuista a, b, c on $\geq -\sqrt{3} > -2$, ja kaikki luvut x, y, z ovat positiivisia. Käytetään Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä:

$$(a+b+c)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{x}}\sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{y}}\sqrt{y} + \frac{c}{\sqrt{z}}\sqrt{z}\right)^2 \leq \left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z}\right)(x+y+z).$$

Koska $x+y+z \leq 12$, väite on tosi.

3. Osoitetaan, että tehtävässä esitetty tilanne ei ole mahdollinen. Olkoon $0 < x \leq \frac{1}{4}\pi$. Silloin $\sin x \leq \cos x \leq 1 \leq \cot x$ ja $\sin x < \tan x \leq 1 \leq \cot x$. Jos $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ ja $\cot x$ muodostavat aritmeettisen jonon, niin ne eivät ole yhtä suuria ja $\sin x$ on luvuista pienin, $\cot x$ suurin. Jos luvut muodostavat aritmeettisen jonon, niin riippumatta siitä, onko $\cos x$ vai $\tan x$ suurempi,

$$\cos x - \sin x = \cot x - \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x \cos x}$$

eli

$$1 = \frac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}.$$

Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska $\sin x < 1$ ja $\cos x < 1$. Jos $x > \frac{1}{4}\pi$, niin $y = \frac{1}{2}\pi - x < \frac{1}{4}\pi$. Luvut $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ ja $\cot x$ ovat samat kuin luvut $\cos y$, $\sin y$, $\cot y$ ja $\tan y$; edellä todistetun mukaan nämä viimeksi mainitut luvut eivät voi muodostaa aritmeettista jonoa, joten sama pätee luvuille $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ ja $\cot x$.

4. Jos $-6 \leq n \leq 4$ tai $6 \leq n \neq 16$, niin $|n-5| \leq 11$. Jos $P(x) - 5 = 0$, kun $x = x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$, missä x_k:t ovat eri kokonaislukuja, niin

$$P(x) - 5 = \prod_{k=1}^{5}(x - x_k)Q(x),$$

missä Q on kokonaislukukertoiminen polynomi. Jos nyt $P(x) = n$, niin $n-5$ on kuuden kokonaisluvun tulo ja näistä viisi on eri suuria. Viiden eri suuren kokonaisluvun tulon itseisarvo on ainakin $1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 3 = 12$. Tehtävän ehdot toteuttavaa kokonaislukua ei siis voi olla olemassa.

5. Olkoot luvut Romeon tetraedin kärjissä x_1, x_2, x_3 ja x_4, ja luvut Julian tetraedrin kärjissä y_1, y_2, y_3 ja y_4. Voidaan olettaa, että luvut sijoittuvat tetraedien kärkiin niin, että

$$x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_2 = y_2y_3 + y_3y_4 + y_4y_2, \tag{1}$$

$$x_1x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 = y_1y_3 + y_3y_4 + y_4y_1, \tag{2}$$

$$x_1x_2 + x_2x_4 + x_4x_1 = y_1y_2 + y_2y_4 + y_4y_1, \tag{3}$$

ja

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1. \tag{4}$$

Osoitetaan, että tällöin $x_i = y_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Olkoon $R = \{i \mid x_i > y_i\}$ ja $J = \{i \mid y_i > x_i\}$. Jos joukossa R on ainakin kolme alkiota, voidaan olettaa, että $\{1, 2, 3\} \subset R$. Tämä on ristiriidassa yhtälön (4) kanssa. Oleteaan sitten, että R:ssä on kaksi alkiota. Voidaan olettaa, että $R = \{1, 2\}$. Silloin $x_1 > y_1$, $x_2 > y_2$, $x_3 \le y_3$ ja $x_4 \le y_4$, joten $x_1x_2 - x_3y_3 > y_1y_2 - y_3y_4$. Mutta jos yhtälöt (1) ja (2) lasketaan yhteen ja vähennetään yhtälöt (3) ja (4), saadaan $x_1x_2 - x_3x_4 = y_1y_2 - y_3y_4$. Siis R:ssä on enintään yksi alkio. Samoin nähdään, että J:ssä on enintään yksi alkio. Luvuista x_i ja y_i ainakin kaksi paria on samoja, esimerkiksi $x_1 = y_1$ ja $x_2 = y_2$. Tällöin yhtälöistä (3) ja (4) voidaan ratkaista $x_3 = y_3$ ja $x_4 = y_4$.

6. Olkoon E jokin tehtävässä määritelty joukko. Jos a on E:n pienin alkio ja jos $b \in E$, $b \ne a$, niin

$$\frac{a^2}{b-a} \ge a$$

eli $b \le 2a$. Tämä tarkoittaa sitä, että mielivaltaisille x, $y \in E$, $x < y$, on

$$\frac{y}{x} \le 2.$$

Olkoot sitten c ja d, $c < d$, joukon E kaksi suurinta alkiota. Koska $d \le 2c$, niin

$$\frac{c^2}{d-c} \ge c.$$

Silloin

$$\frac{c^2}{d-c} = d \quad \text{tai} \quad \frac{c^2}{d-c} = c.$$

Edellinen vaihtoehto merkitsee yhtälöä

$$\left(\frac{c}{d}\right)^2 + \frac{c}{d} - 1 = 0,$$

jonka ratkaisut ovat irrationaalisia. Vaihtoehto on siis mahdoton. Siis $c^2 = dc - c^2$ eli $d = 2c$. Joukossa E voi siis olla vain kaksi alkiota c ja $2c$. Jokainen joukko $\{c, 2c\}$, c positiivinen kokonaisluku, kelpaa joukoksi E.

7. Olkoon $d = \text{s.y.t.}(m, n)$ ja $m = da$, $n = db$. Silloin $a < b$, $\text{s.y.t.}(a, b) = 1$ ja yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$3abd = 2008(a + b).$$

Havaitaan, että $2008 = 8 \cdot 251$ ja että 251 on alkuluku. Koska $\text{s.y.t.}(a, a + b) = \text{s.y.t.}(b, a + b) = 1$, niin a ja b ovat kumpikin luvun 2008 tekijöitä. Koska enintään toinen luvuista on parillinen ja enintään toinen on jaollinen luvulla 251, saadaan seuraavat mahdollisuudet pariksi (a, b): $(1, 2)$, $(1, 4)$, $(1, 8)$, $(1, 251)$, $(1, 502)$, $(1, 1004)$, $(1, 2008)$, $(2, 251)$, $(4, 251)$ ja $(8, 251)$. Koska 3 ei ole luvun 2008 teijä, $a + b$:n on olava kolmella jaollinen. Tämä pudottaa osan edellisen listan kandidaateista pois; jäljelle jäävät $(1, 2)$, $(1, 8)$, $(1, 251)$, $(1, 1004)$ ja $(4, 251)$. Jokaiselle näistä ab on luvun 2008 tekijä, ja näin ollen d on kokonaisluku. Ehdon täyttäviä pareja on siis tasan viisi kappaletta.

8. Koska $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, joukossa A on oltava jokin muu luku, jonka tekijänä on 13 korotettuna parittomaan potenssiin. Nyt $1014 = 78 \cdot 13 = 6 \cdot 13^2$, joten joukossa on oltava jokin lukua 1014 suurempi 13:n monikerta. Nyt $13 \cdot 79 = 1027$ on tällainen, mutta koska 79 on alkuluku, joukossa A olisi oltava jokin toinen 79:n monikerta. Nyt $12 \cdot 79 = 948 < 1001$ ja $14 \cdot 79 = 1106$. Mutta $13 \cdot 80 = 1040$, joten $13 \cdot 80$ on lupaavampi kandidaatti joukon A suurimman alkion pienimmäksi mahdolliseksi arvoksi. Joka tapauksessa A:n suurin alkio ei voi olla pienempi kuin 1040. Se myös kelpaa, sillä voidaan valita $A = \{1001, 1008, 1012, 1035, 1040\}$. Näin siksi, että $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, $1008 = 7 \cdot 2^4 \cdot 3^2$, $1012 = 2^2 \cdot 11 \cdot 23$, $1035 = 3 \cdot 3^2 \cdot 23$ ja $1040 = 2^4 \cdot 5 \cdot 13$. Kun A:n alkiot kerrotaan keskenään, jokaisen alkutekijän eksponentti on parillinen. Tulo on siis neliöluku.

9. Todetaan, että $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$. Oletetaan, että $1008 = a^b - b^a$. Osoitetaan ensin, että ainakin toinen luvuista a ja b on pariton. Jos olisi $\max\{a, b\} = 2x$ ja $\min\{a, b\} = 2y$, niin olisi $(2x)^{2y} - (2y)^{2x} = 2^{2y}(x^{2y} - 2^{2(x-y)}y^{2x}) = \pm 1008 = \pm 2^4 \cdot 63$. Siis $y \le 2$. Jos olisi $y = 2$, olisi 63 jaollinen luvulla $x^4 - 4^{2x-2} = (x^2 + 4^{x-1})(x^2 - 4^{x-1})$. Helposti nähdään, että tämä ei ole mahdollista. Jos olisi $y = 1$, olisi $\pm 1008 = 4x^2 - 2^{2x}$ ja $x^2 - 2^{2x-2} = 252$ eli $(x + 2^{x-1})(x - 2^{x-1}) = 4 \cdot 63$. Nyt x:n olisi oltava parillinen. Kokeilemalla nähdään, että $x = 2$, 4, 6, ja 8 eivät ole ratkaisuja; kun $x \ge 10$, niin $x + 2^{x-1} > 252$. Koska a ja b eivät voi olla molemmat parillisia, ja niiden kokonaislukupotenssien erotus on parillinen, molemmat ovat parittomia. Jos molemmat luvut olisivat jaollisia kolmella, $1008 = a^b - b^a$ olisi jaollinen 27:llä. Siis kumpikaan luvuista ei ole jaollinen 3:lla. Samoin päätellään, että kumpikaan luvuista ei ole jaollinen 7:llä.

Todistuksen loppuun saattamiseksi joudutaan käyttämään hyväksi Eulerin funktiota ϕ. Osoitetaan, että jos n on luvun 1008 tekijä, $\text{s.y.t.}(a, n) = \text{s.y.t.}(b, n) = \text{s.y.t.}(a, \phi(n)) = \text{s.y.t.}(b, \phi(n))$ ja $a \equiv b \bmod \phi(n)$, niin $a \equiv b \bmod n$. Eulerin lauseesta seuraa nimittäin, että $a^{\phi(n)} \equiv b^{\phi(n)} \equiv 1 \bmod n$. Toisaalta, jos $a \equiv b \equiv d \bmod \phi(n)$, niin $a^b = a^{d+k\phi(n)} \equiv a^d \bmod n$ ja vastaavasti $b^a \equiv b^d \bmod n$. Siis $a^d - b^d \equiv a^b - b^a = 1008 \equiv 0 \bmod n$. Koska $\text{s.y.t.}(d, \phi(n)) = 1$, on olemassa d' siten, että $dd' \equiv 1 \bmod \phi(n)$ (d:llä on käänteisalkio mod $\phi(n)$) eli $dd' = 1 + k\phi(n)$. Koska $a^d \equiv b^d \bmod n$, on $a^{dd'} \equiv b^{dd'} \bmod n$ eli $a^{1+k\phi(n)} \equiv b^{1+k\phi(n)} \bmod n$. Eulerin lauseesta seuraa nyt $a \equiv b \bmod n$.

Nyt $a \equiv b \equiv 1 \bmod 2$. Koska $\phi(4) = 2$, $\phi(8) = 4$ ja $\phi(16) = 8$, niin $a \equiv b \bmod 4$, $a \equiv b \bmod 8$ ja $a \equiv b \bmod 16$. Olemme todennet, että a ja b ovat kolmella jaottomia.

Koska $a \equiv b \bmod 2$ ja $\phi(3) = 2$, $a \equiv b \bmod 3$. Luku $a - b$ on siis jaollinen 6:lla; koska $\phi(9) = 6$, niin $a \equiv b \bmod 9$. Myös $\phi(7) = 6$ ja a ja b ovat jaottomia 7:llä. Siis $a \equiv b \bmod 7$. Kaikkiaan siis $a \equiv b \bmod 1008$. – Koska $1009^1 - 1^{1009} = 1008$, yhtälöllä on ainakin yksi ratkaisu. Ei ole tiedossa, onko sillä muita ratkaisuja.

10. On ilmeistä, että jos a ja b ovat positiivisia kokonaislukuja, niin $S(ab) \le S(a)S(b)$. [Oikealla puolella on kaikkien a:n ja kaikksien b:n numeroiden tulojen summa, vasemmalla puolella osa näistä summista on korvautunut summan numeroiden summalla.] Näin ollen $S(n) = S(10000n) = S(16n \cdot 625) \le S(16n)S(625) = 13S(16n)$. Siis

$$\frac{S(n)}{S(16n)} \le 13$$

kaikilla n. Nyt $S(625) = 13$ ja $S(16 \cdot 625) = S(10000) = 1$, joten suurin kysytyn suhteen arvo on 13.

11. Jos $169 = 13^2$ kuuluu joukkoon A, joukossa on neliöluku. Oletaan, että

$$A \subset \{1, 2, \ldots, 168\} = \bigcup_{k=1}^{84} \{k, 169 - k\}.$$

Koska joukossa A ei ole kahta lukua, joiden summa olisi 169, A:han ei sisälly kahta lukua mistään edellä olevan parien yhdisteen parista. Koska A:ssa on 84 lukua ja pareja on 84, jokaisesta parista on mukana tasan yksi luku. Siis myös parista $\{25, 144\} = \{5^2, 12^2\}$ jompikumpi luku on joukossa A.

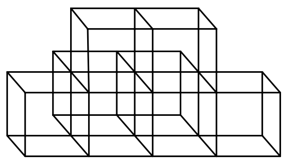
12. Konstruoidaan sellainen $3n$:n alkion joukon E kolmialkioisten osajoukkojen joukon osajoukko S, että jokainen E:n kaksialkioinen osajoukko on tasan yhden S:n joukon osajoukko. Jos tällainen luokan oppilaiden kolmikkojen joukko on olemassa, niin jokaiset kaksi oppilasta A ja B tekevät lahjan sille oppilaalle C, jolle $\{A, B, C\} \in S$. Oppilasparia A, C vastaava S:n alkio on yksikäsitteisyyden nojalla myös $\{A, C, B\} = \{A, B, C\}$, joten A ja C tekevät lahjansa B:lle.

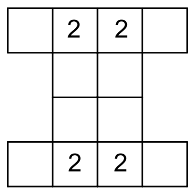
Joukon S konstruoimiseksi nimetään lapset symboleilla $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n, C_1, C_2, \ldots, C_n$. Sisällytetään joukkoon S ensiksi kaikki kolmikot $\{A_i, B_i, C_i\}$, $1 \le i \le n$. Joukkoon S otetaan myös kaikki kolmiokot $\{A_i, A_j, B_k\}$, $\{B_i, B_j, C_k\}$ ja $\{C_i, C_j, A_k\}$, missä $1 \le i < j \le n$ ja $i + j \equiv 2k \bmod n$. Todetaan, että i ja j määrittävät k:n, $1 \le k \le n$, yksikäsitteisesti. Jokaisella $1 \le i < j \le n$ pari $\{A_i, A_j\}$ on yksikäsitteisen joukon $\{A_i, A_j, B_k\}$ osajoukko; sama pätee pareihin $\{B_i, B_j\}$ ja $\{C_i, C_j\}$. Jos pariin $\{A_i, A_j\}$ liitetty joukko B_k olisi joko B_i tai B_j, olisi $i + j \equiv 2i \bmod n$ tai $i + j \equiv 2j \bmod n$. Kummastakin seuraisi $i \equiv j \bmod n$ ja koska $1 \le i, j \le n$, ristiriita $i = j$. Tämä merkitsee sitä, että $\{A_i, B_i, C_i\} \in S$ on ainoa joukko, jonka osajoukkona on $\{A_i, B_i\}$ (tai $\{B_i, C_i\}$, $\{A_i, C_i\}$). Jos $i \ne k$, niin $i + j \equiv 2k \bmod n$ määrittää j:n yksikäsitteisesti, ja $i \ne j$, koska muuten ehdosta $i + j \equiv 2k \bmod n$ seuraisi $i = k$. Näin ollen pariin $\{A_i, B_k\}$ liittyy yksikäsitteinen joukko $\{A_i, A_j, B_k\} \in S$.

13. Kilpailuun voi osallistua ainakin 56 maata, sillä jos kaikki valitsevat kolme tehtävää vain kahdeksasta mahdollisesta, niin eri valintoja on $\binom{8}{3} = 56$ kappaletta. Osoitetaan, että 56 on suurin mahdollinen osallistuvien maiden määrä. Olkoon K niiden tehtäväkolmikkojen joukko, joita joku äänesti ja E niiden tehtäväkolmikkojen joukko, joita kukaan ei äänestänyt. Olkoon K:ssa k alkiota ja E:ssä e alkiota. Silloin $k + e = \binom{9}{3} = 84$. Tarkastellaan kolmikkoa $x \in K$. Kolmikkoja, joissa ei ole yhtään x:ään kuuluvaa tehtävää, on $\binom{6}{3} = 20$ kappaletta. Nämä voidaan jakaa kymmeneksi pariksi niin, että pariin kuuluvissa kolmikoissa ei ole yhteistä tehtävää. Jokaisessa parissa ainakin toisen kolmikon on kuuluttava joukkoon E, koska muuten olisi kolme maata, jotka yhteensä ovat äänestänet kaikkia yhdeksää tehtävää, toisin kuin tehtävässä ilmoitettiin. Jokaiseen $x \in K$ liittyy siis ainakin 10 joukkoa $y \in E$ niin, että x:llä ja y:llä ei ole yhteisiä alkioita. Jokaiseen $y \in E$ voidaan toisaalta liittää enintään 20 alkiota $x \in K$ (koska on tasan 20 joukkoa, joilla ei ole yhteisä alkioita y:n kanssa). Mutta tämä merkitsee, että $10k \leq 20e$ ja

$$k = \frac{2}{3}k + \frac{1}{3}k \leq \frac{2}{3}k + \frac{2}{3}e = \frac{2}{3}(k + e) = \frac{2}{3} \cdot 84 = 56.$$

14. Vastaus tehtävän kysymykseen on myönteinen. Kahdesta tehtävässä määritellystä palikasta saa oheisen kuvion mukaisen kappaleen (toinen on "lappeellaan" osaksi toisen alla). Kaksi tällaista kappaletta voidaan laittaa vierekkäin, niin että syntyy esine, joka suoraan ylhäältä katsottuna näyttää alemman kuvan mukaiselta. Siinä 12 kuutiota on samassa tasossa ja 2:lla on merkitty paikat, joissa kaksi kuutiota on päällekkäin. Kun toisen tällaisen esineen kääntää ylösalaisin ja kiertää sitä 90°, niin sen voi asettaa kuvan mukaisen esineen päälle niin, että syntyy $4 \times 4 \times 2$-suorakulmainen särmiö. Kaksi tällaista päällekkäin asetettuna muodostaa $4 \times 4 \times 4$-kuution.





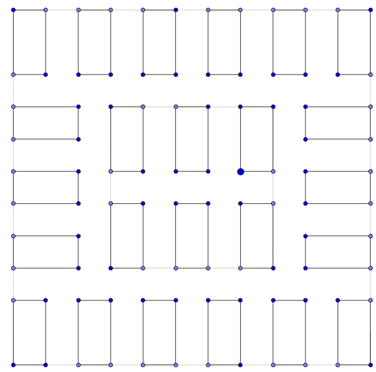
15. Jos dominot asetellaan neliön keskustasta alaken oheisen kuvan mukaisesti, niin neliöön, jonka sivu on $5 + 6n$ saadaan sopimaan

$$\sum_{k=0}^{n}(6 + 12n) = 6(n + 1)^2$$

dominoa. Tämä nähdään induktiolla, sillä renkaaseen, jonka sisäreuna on $5 + 6n$-neliö ja ulkoreuna $5 + 6(n + 1)$ neliö saadaan kuvan järjestelyä seuraten "pystysuoraan asentoon" $2 \cdot (3 + 3(n + 1))$ dominoa ja "vaakasuoraan asentoon" $2 \cdot (3 + 3n)$ eli yhteensä $12n + 18 = 6 +$

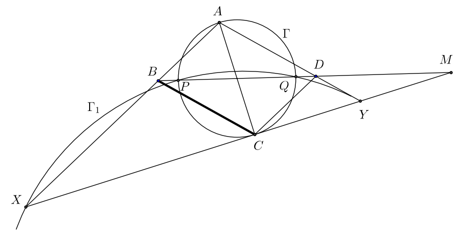
$12(n+1)$ dominoa. Kun $n=12$ eli $5+6n=77$, dominoita saadaan sijoitettu $6\cdot 13^2=1014$ kappaletta ja dominoiden pinta-ala on $2028>2008$. Kysytty n:n pienin arvo on siis ≤ 77.

Jos 1004 dominoa olisi sijoitettu tehtävässä esitetyllä tavalla 76×76-neliöön, niin sellaiset suorakaiteet, joiden keskellä on domino, ja joiden sivut ovat puolen yksikön etäisyydellä dominon sivuista, eivät mene päällekkäin. Tällaiset suorakaiteet olisivat myös kokonaan $77\cdot 77$-neliön sisällä. Mutta kuvattujen suorakaiteiden ala on $2\cdot 3=6$, ja ne peittäisivät siis kaikkiaan alan $1004\cdot 6=6024$. Mutta $77^2=5929$. Dominot eivät siis mahdu 76×76-neliöön, joten tehtävässä kysytty pienin n on 77.



16. Olkoon Γ ympyrä, jonka halkaisija on AC ja Γ_1 ympyrä joka kulkee pisteiden X, P ja Q kautta. Olkoon M suorien AD ja CY leikkauspiste. Pisteen M potenssi ympyrän Γ_1 suhteen on $MP\cdot MQ$. Näin ollen piste Y on ympyrällä Γ_1, jos $MX\cdot MY=MP\cdot MQ$. Koska $AC\perp CM$, CM on ympyrän Γ tangentti. Pisteen M potenssi ympyrän Γ suhteen on $MP\cdot MQ=MC^2$. Mutta koska $BC\|AY$ ja $AX\|DC$, on

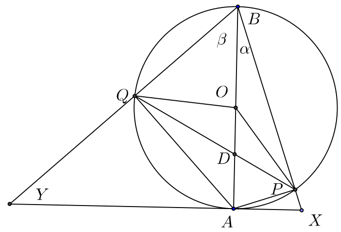
$$\frac{MC}{MY}=\frac{MB}{MD}=\frac{MX}{MC}.$$



Siis $MX\cdot MY=MC^2=MP\cdot MQ$, ja väite on todistettu.

17. Olkoon tehtävän jännenelikulmio $ABCD$, S sen ala ja R sen ympäri piirretyn ympyrän säde. Voidaan olettaa, että $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ ja $DA=d$. Olkoon vielä $AC=e$ ja $BD=f$. Ptolemaioksen lauseen nojalla $ac+bd=ef$. Maksimoitava lauseke on siis $(e(ab+cd))(f(ad+bc))=(abe+cde)(bcf+adf)$. Kolmion ala on tunnetusti neljäsosa sen sivujen tulosta jaettuna ympärysympyrän säteellä. Koska kolmioiden ABC ja CDA ympärysympyrän säde on R ja alojen summa S, on $abe+cde=4RS$. Samoin on $(bcf+adf)=4RS$. Tehtävän lauseke on maksimaalinen, kun S on maksimaalinen. Kuperan nelikulmion ala on puolet sen lävistäjien tulon ja niiden välisen kulman sinin tulosta. Kaikki nämä maksimoituvat tehtävän tapauksessa silloin, kun $ABCD$ on neliö.

18. Olkoon ympyrän S keskipiste O. Voidaan olettaa, että ympyrän säde on 1. Leikatkoon PQ suoran AB pisteessä D. Olkoon $\angle ABP = \alpha$ ja $\angle ABQ = \beta$. Silloin $\angle POQ = 2(\alpha + \beta)$, ja koska kolmio OQP on tasakylkinen, $\angle OQP = \angle OPQ = 90^\circ - (\alpha + \beta)$. Koska $\angle DOP = 2\alpha$, $\angle ODP = 180^\circ - (2\alpha + 90^\circ - \alpha - \beta) = 90^\circ - (\alpha - \beta)$. Sovelletaan sinilausetta kolmioon ODP, jossa $OP = 1$. Saadaan



$$OD = \frac{\sin(\angle OPD)}{\sin(\angle ODP)} = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} = \frac{1 - \tan\alpha\tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}.$$

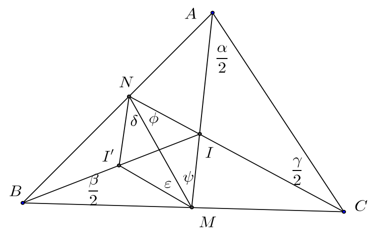
Mutta

$$\tan\alpha = \frac{AX}{AB} = \frac{AX}{2}, \quad \tan\beta = \frac{AY}{AB} = \frac{AY}{2}.$$

Siis $\tan\alpha\tan\beta = \frac{1}{4}AX \cdot AY = \frac{c}{4}$. Näin ollen OD on riippumaton pisteiden X ja Y valinnasta, eli jokainen suora PQ kulkee pisteen D kautta.

19. Valitaan jokaista jännettä AB kohden lyhempi kaari $\widehat{AB}$ (jos AB on halkaisija, valitaan jompikumpi puoliympyröistä $\widehat{AB}$. Valittujen kaarien pituuksien summa on > 19. Ympyrän kehän pituus on π. Kuusi kehän pituutta on $< 6 \cdot 3{,}15 = 18{,}9 < 19$. Tästä seuraa, että ainakin jokin ympyrän kaari sisältyy ainakin seitsemään valituista kaarista. Jokainen tällaisen kaaren pisteestä piirretty halkaisija leikkaa kaikki ainakin seitsemään kaareen liittyvät jänteet.

20. Olkoon kolmion ABC kulmanpuolittajien leikkauspiste I ja kolmion NBM kulmanpuolittajien leikkauspiste I'. Olkoot kolmion ABC kulmat α, β, γ ja $\angle I'NM = \delta$, $\angle I'MN = \varepsilon$, $\angle MNI = \phi$ ja $\angle NMI = \psi$. Tehtävän ehdosta seuraa, että jollain k on $\delta = k\phi$ ja $\varepsilon = k\psi$. Kulmat kolmioiden AIC ja MIN kärjessä I ovat ristikulmia, joten $\phi + \psi = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma$. Kolmioista ABC ja NBM saadaan $\alpha + \gamma = 2\delta + 2\varepsilon$. Siis $k(\phi + \psi) = \delta + \varepsilon = \phi + \psi$, eli $k = 1$. Tästä seuraa, että kolmiot NIM ja $NI'M$ ovat yhteneviä (ksk) ja että kolmio $NI'I$ on tasakylkinen. Silloin sen huipusta N piirretty korkeusjana yhtyy kulmanpuolittajaan. Siis $NM \perp I'I$. Mutta tämä merkitsee sitä, että kolmion BMN kärjestä B piirretty kulmanpuolittaja on kohtisuorassa kantaa MN vastaan. Silloin kolmio BMN on tasakylkinen; $BM = BN$. Mutta koska AM ja CN ovat kulmanpuolittajia,



$$BM = \frac{AB}{AB + AC} \cdot BC, \quad BN = \frac{BC}{AC + BC} \cdot AB.$$

Edellisistä yhtälöistä seuraa $AB = AC$; ABC on siis tasakylkinen.