Baltian Tie -kilpailutehtävien ratkaisuja vuosilta 1990–1999

90.1. Siirryttäessä luvusta 1 lukuun n kumpaa tahansa kautta on vierekkäisten lukujen erotusten itseisarvojen summan oltava ainakin $n-1$. Täten kaikkien vierekkäisten lukujen erotusten itseisarvon tulee olla ainakin $2(n-1)$. Tämä summa myös saavutetaan esim. silloin, kun luvut ovat suuruusjärjestyksessä.

90.2. Taulukosta nähdään, että polynomi toteuttaa ehdon $p(1,\, n) = p(1,\, n-1)+n$. Tästä ja ehdosta $p(1,\, 1) = 1$ seuraa

$$p(1,\, n) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Toisaalta taulukosta nähdään, että $p(m,\, n) = p(m-1,\, n) + m - 2 + n$. Siis

$$\begin{aligned} p(m,\, n) = p(1,\, n) + (m-1)n + \sum_{k=1}^{m-2} k &= \frac{n(n+1)}{2} + (m-1)n + \frac{(m-1)(m-2)}{2} \\ &= \frac{1}{2}(m^2+n^2) + mn - \frac{3}{2}m - \frac{1}{2}n + 1. \end{aligned}$$

90.3. Jos $c = \tan\gamma$ ja $a_n = \tan\alpha_n$, niin $a_{n+1} = \tan\alpha_{n+1} = \tan(\alpha_n+\gamma)$, joten $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \gamma = \alpha_0 + n\gamma$. Jos esim. valitaan $\alpha_0 = \gamma$ ja $\dfrac{\pi}{2\cdot 1991} < \gamma < \dfrac{\pi}{2\cdot 1990}$, niin $a_{1989} = \tan(1990\gamma) > 0$, mutta $a_{1990} = \tan(1991\gamma) < 0$.

90.4. Olkoon $f(x) = a_1 + a_2x + \ldots + a_nx^{n-1}$. Silloin

$$f(x)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_ia_jx^{i+j-2}$$

ja

$$0 \le \int_0^1 f(x)^2dx = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_ia_j}{i+j-1}\Big/_0^1 x^{i+j-1} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_ia_j}{i+j-1}.$$

90.5. Jos $*$ on vaihdannainen ja liitännäinen, niin $a*(b*c) = (a*b)*c = c*(a*b)$. Jos esimerkiksi $a*b = a-b$, niin $a*(b*c) = a-(b-c) = a-b+c$ ja $c*(a*b) = c-(a-b) = -a+b+c$.

90.6. Tarkastellaan kolmioita PDA ja PCB. Suorien DA ja CB välinen kulma on $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Tästä seuraa, että se 60°:een kierto pisteen P ympäri, joka vie janan PD janaksi PC, vie myös janan DA janaksi CB (DA ja CB ovat yhtä pitkät). Kyseinen kierto vie näin ollen myös janan PA janaksi PB, joka merkitsee, että kolmio PAB on tasasivuinen.

90.7. Olkoot $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ ja $\vec{e}$ kiinteästä pisteestä O viisikulmion kärkiin A, B, C, D ja E piirretyt vektorit. Silloin janan AB keskipisteeseen M O:sta piirretty vektori on $\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ ja kolmion CDE keskijanojen leikkauspisteeseen eli painopisteeseen N piirretty vektori on $\frac{1}{3}(\vec{c}+\vec{d}+\vec{e})$. Suoran MN pisteisiin O:sta piirretyt vektorit ovat muotoa $\frac{t}{2}(\vec{a}+\vec{b})+\frac{1-t}{3}(\vec{c}+\vec{d}+\vec{e})$. Tästä nähdään heti, että ainakin vektori $\frac{1}{5}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e})$ on janalla MN ja kaikilla janoilla, jotka saadaan millä hyvänsä vektorien $\vec{a}$, ..., $\vec{e}$ kiertovaihtelulla. Kaikki tehtävässä määritellyt janat kulkevat siis viisikulmion painopisteen kautta.

90.8. Olkoot pisteen P_1 projektiot suorilla AB ja AC Q_1 ja R_1, ja pisteen P_2 vastaavat projektiot Q_2ja R_2. Simsonin suorat R_1Q_1 ja R_2Q_2 ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos $\angle Q_1R_1A+\angle Q_2R_2A=90^\circ$. Käytetään hyväksi pisteiden P_i, Q_i konstruktiosta seuraavaa ominaisuutta, jonka mukaan nelikulmioiden $AR_1P_1Q_1$ ja $AQ_2P_2R_2$ ympäri voidaan piirtää ympyrät. Kehäkulmalausetta toistuvasti soveltaen ja kun otetaan huomioon, että $\angle P_1AP_2=90^\circ$, saadaan $\angle AR_1Q_1=\angle AP_1Q_1=90^\circ-\angle P_1AQ_1=\angle Q_1AP_2=\angle Q_2R_2P_2=90^\circ-\angle Q_2R_2A$.

90.9. Piirretään kaksi yhtenevää ellipsiä, joiden akselit eivät ole yhdensuuntaisia ja jotka leikkaavat toisensa kolmessa pisteessä. Kolmio,jonka kärjet ovat näissä kolmessa pisteessä, voidaan piirtää kahdella eri tavalla ellipsin sisään, ja nämä kolmiot eivät ole symmetrisiä ellipsin akselin tai keskipisteen suhteen.

90.10. Jana voi siirtyä miten kauas tahansa. Olkoon esim. f se funktio, jonka kuvaaja on pisteiden $(0,\,0)$, $\left(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right)$, $(1,\,-1)$, $\left(\frac{3}{2},\,\frac{1}{4}\right)$, $(2,\,-4)$, ..., $\left(n-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2^n}\right)$, $(n,\,-2^n)$, ..., kautta kulkeva murtoviiva. Jos piste A seuraa tätä murtoviivaa, niin B seuraa funktion g, $g(x)=f(x-1)$ kuvaajaa. Koska kumpikin kuvaaja on murtoviiva, ja jokainen f:n kuvaajaan kuuluva murtoviivan kärki on vastaavan g:n kuvaajaan kuuluvan kärjen alapuolella, murtoviivat eivät leikkaa toisiaan.

90.11. Jos r on polynomin $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ kokonaislukujuuri, niin $p(x)$ on jaollinen polynomilla $x-r$: $p(x)=(x-r)(b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_0$. Tällöin $b_{n-1}=a_n$ ja $b_{k-1}-rb_k=a_k$, $k=n-1,\,n-2,\,\ldots,\,1$, $rb_0=a_0$. Koska b_{n-1} on kokonaisluku, b_{n-2} on kokonaisluku jne. Voidaan olettaa, että $r\neq 0$. Jos i on pienin indeksi, jolla $a_i\neq 0$ ja $i>0$, voidaan tarkastella polynomia $x^{-i}p(x)$. Oletetaan siis, että $a_0\neq 0$. Mutta koska myös b_0 on edellisen perusteella kokonaisluku, on $|r|\leq|rb_0|=|a_0|$.

90.12. Väite seuraa heti yhtälöstä $3(25m+3n)-25(3m+7n)=-166n=-2\cdot 83\cdot n$.

90.13. Koska $7\cdot 3^2=63=8^2-1$, yhtälöllä on ainakin yksi kokonaislukuratkaisu. Yhdestä ratkaisusta voi generoida äärettömän jonon uusia ratkaisuja: Olkoon $7y^2=x^2-1$. Olkoon $x_1=14y^2+1$. Silloin $x_1^2-1=14y^2(14y^2+2)=7\cdot 4\cdot y^2(7y^2+1)=7(2yx)^2=7y_1^2$, missä $y_1=2yx$.

90.14. Olkoon $a_1=1990!+1$, $a_2=a_1!+1$, ..., $a_{1990}=(a_{1989})!+1$. Silloin jokaisen a_{i+1}:n pienin alkutekijä on varmasti suurempi kuin a_i, joten luvut ovat varmasti yhteistekijättömiä. Koska jokaisella $k\in[2,\,1990]$ $a_i=n_ik+1$, niin k:n a_i-luvun summa on muotoa $nk+k$.

90.15. Jos (Fermat'n luku) $F_n=2^{2^n}+1=p^3$, niin $2^{2^n}=(p-1)(p(p+1)+1)$; koska $p(p+1)$ on parillinen, tulon jälkimmäinen tekijä on pariton ja >1. Tämä on mahdotonta, koska tulon tekijät ovat 2:n potensseja.

90.16. Tarkastellaan aluksi vaakasuoria sivuja, Jos niitä olisi pariton määrä, joko vasemmalle tai oikealle siirtymisiä olisi pariton ja vastaavasti oikealle tai vasemmalle siirtymisiä parillinen yksikköjen määrä. Vaakasuoria sivuja on siis oltava parillinen määrä, $2k$ kappaletta. Mutta jokaista vaakasuoraa sivua seuraa pystysuora, joten myös pystysuoria sivuja on parillinen määrä, joka on sama kuin vaakasuorien sivujen määrä. Sivuja on yhteensä $2k + 2k = 4k$ kappaletta.

90.17. Jos ensimmäinen oppilas ottaa ensimmäisestä kasasta 30, siihen jää 42, jolloin toisen on otettava ensimmäisestä kasasta myös 30, ja siihen jää 12. Ensimmäinen ottaa nyt toisesta kasasta 12, jolloin siihen jää 18. Toisen on otettava toisesta kasasta 12, jolloin siihen jää 6. Ensimmäinen voi nyt ottaa ensimmäisestä kasasta kaikki 12 makeista.

90.18. Merkitään $a_{ki} = 1$, jos luku k on vaakarivillä i, ja muuten $a_{ki} = 0$, ja vastaavasti $b_{kj} = 1$, jos luku k on pystyrivillä j ja muuten $b_{kj} = 0$, Olkoon $a_k = \sum_{i=1}^{101} a_{ki}$ niiden vaakarivien lukumäärä, joissa k on ja $b_k = \sum_{j=1}^{101} b_{ki}$ niiden pystyrivien lukumäärä, joissa k on, $k = 1, 2, \ldots, 101$. Jos millään vaaka- tai pystyrivillä ei ole useampia kuin 10 eri lukua, on

$$\sum_{k=1}^{101} a_k + \sum_{k=1}^{101} b_{ki} \leq 10 \cdot (2 \cdot 101).$$

Toisaalta ei ole mahdollista, että olisi $a_k b_k < 101$. Siis $a_k + b_k \geq 2\sqrt{a_k b_k} > 20$ ja $a_k + b_k \geq 21$. Näin ollen $\sum_{k=1}^{101}(a_k + b_k) \geq 21 \cdot 101 = 2121$. Ristiriita!

90.19. Merkitään $[a, b] = \{a, a+1, \ldots, b\}$ ja kutsutaan tällaista joukkoa *väliksi*. Välien $[k-q, k+p]$, $q = 0, 1, \ldots, k-1$, $p = 0, 1, \ldots 2n+1-k$, kokoelma toteuttaa tehtävän ehdon: $[k-q_1, k+p_1] \cap [k-q_2, k+p_2] = [k - \max\{q_i, q_2\}, k + \min\{p_1, p_2\}]$. Tällaisia joukkoja on $a_k = k(2n+2-k)$ kappaletta. Koska $(n+1)^2 - k(2n+2-k) = (n+1-k)^2 \geq 0$, a_k:n suurin mahdollinen arvo on $(n+1)^2$.

On vielä osoitettava, että jos joukon E tehtävän ehdon täyttävässä osajoukkojen kokoelmassa $\{A_i\}$ on maksimaalinen määrä osajoukkoja, niin leikkausjoukossa $\bigcap_i A_i$ on tasan yksi luku k. Leikkauksessa ei voi olla useampia lukuja, sillä jos $\{k, l\} \subset \bigcap_i A_i$, niin kokoelmaa $\{A_i\}$ voitaisiin täydentää esimerkiksi joukolla $\{k\}$. On vielä osoitettava, että maksimaalisessa tapauksessa $\bigcap_i A_i \neq \emptyset$. Havaitaan, että kokoelman $\{A_i\}$ joukot voidaan valita väleiksi: korvataan jokainen joukko A_i välillä $A_i' = [\min A_i, \max A_i]$ Jos A_i ei ole väli, tämä joukko ei kuulu alkuperäiseen kokoelmaan, koska $A_i \cap A_i' = A_i$. Korvausten jälkeen kokoelmassa on yhtä monta joukkoa kuin alkuperäisessä kokoelmassa, ja jokaisen kahden joukon leikkaus on aina väli. Jos $m_i = \min A_i'$, $M_i = \max A_i'$ ja $m = \max m_i = m_p$, $M = \min M_i = M_q$, niin $m \leq M$ (muussa tapauksessa $A_p' \cap A_q' = \emptyset$). Selvästi $[m, M] \subset \bigcap_i A_i'$.

91.1. Koska $1991 = 11 \cdot 181$ ja 11 sekä 181 ovat alkulukuja, tulossa on oltava tekijänä 11:llä ja 181:llä jaolliset luvut. Lukujen $1, 2, \ldots, 181$ erotuksista mikään ei ole jaollinen 181:llä. Siis $n \geq 182$. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_{182}$ eri kokonaislukuja. Jaettaessa erotuksia $a_j - a_1$, $j > 1$, 181:llä joko ainakin yksi jako menee tasan tai ainakin kahdessa jaossa tulee sama jakojäännös. Kummassakin tapauksessa erotusten $a_i - a_j$ joukossa on ainakin yksi 181:llä jaollinen. Samoin nähdään, että erotusten joukossa on (useita) 11:llä jaollisia lukuja. Jos $n \geq 182$, lukujen erotusten tulo on aina jaollinen 1991:llä; pienin n on siis 182.

91.2. Koska

$$102^{1991} + 103^{1991} = (102 + 103)(102^{1990} - \ldots + 103^{1990}),$$

luku $102^{1991} + 103^{1991}$ on jaollinen 205:llä ja siis 5:llä. Jos kyseinen luku on kokonaisluvun m:s potenssi ja $m \geq 2$, niin sen on oltava jaollinen luvulla $5^2 = 25$. Lasketaan $\bmod 25$: $102 \equiv 2$, $2^{10} = 1024 \equiv -1$, $2^{1990} \equiv (-1)^{199} = -1$, $2^{1991} \equiv -2$; $3^3 = 27 \equiv 2$, $3^{30} \equiv -1^{10} = 1$, $3^{1980} \equiv 1$, $3^{11} = 9 \cdot (3^3)^3 \equiv 9 \cdot 2^3 = 72 \equiv -3$, $3^{1991} \equiv -3$. Siis $102^{1991} + 103^{1991} \equiv -2-3 = -5$, joten $102^{1991}+103^{1991}$ ei ole jaollinen 25:llä, eikä siis myöskään kokonaisluvun m:s potenssi.

91.3. Jos kissan hinta on x_i ja säkin y_j, niin $12{,}10 \leq x_i + y_j \leq 16{,}00$. Koska summia $x_i + y_j$ on $20 \cdot 20 = 400$ kappaletta ja niiden mahdollisia arvoja 391, summien joukossa on ainakin kaksi samaa.

91.4. Merkitään $p(x) = p_e(x) + p_o(x)$, missä $p_e(x)$ käsittää kaikki termit, joissa esiintyy x:n parillisia potensseja ja $p_e(x)$ ne termit, joissa esiintyy x:n parittomia potensseja. Silloin $p_e(-x) = p_e(x)$, $p_o(-x) = -p_o(x)$ ja $p_o(x)$:ssä on tekijänä x. Epäyhtälö $p(-n) < p(n)$ sieventyy muotoon $0 < 2p_o(n)$. Koska p_o on kokonaislukukertoiminen ja n on $p_o(n)$:n tekijä, niin $2p_o(n) \geq 2n$. Siis $p(n) - p(-n) \geq 2n$. Näin ollen $p(-n) \leq p(n) - 2n < n - 2n = -n$.

91.5. Oikeanpuoleisen epäyhtälön todistamiseksi merkitään $a + b = t$, $b + c = u$ ja $c + a = v$ ja käytetään kahdesti aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välistä yhtälöä. Silloin $t + u + v = 2(a + b + c)$, ja

$$\begin{aligned} \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} &= 2\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right) \\ = 2\frac{uv + tv + tu}{tuv} \geq \frac{6\sqrt[3]{uvtvtu}}{tuv} &= \frac{6}{\sqrt[3]{tuv}} \geq \frac{18}{t+u+v} = \frac{9}{a+b+c}. \end{aligned}$$

Vasemmanpuoleisen epäyhtälön todistamiseksi havaitaan, että

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} = \frac{c\sqrt{ab} + a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac}}{abc}$$

ja

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ca + ab}{abc}.$$

Mutta

$$bc + ca + ab = c\frac{b+a}{2} + b\frac{c+a}{2} + a\frac{b+c}{2} \geq c\sqrt{ab} + b\sqrt{ac} + a\sqrt{bc},$$

ja todistus on valmis.

91.6. Eräs ratkaisu on varmasti $x = 0$. Jos $x > 0$, $[x]\{x\} \le x$ ja $1991x > x$, joten yhtälöllä ei ole ratkaisuja. Jos $x < -1$, $|[x]\{x\}| \le 2|x| < 1991|x|$. Jos $-1 \le x < 0$, $[x] = 1$, $\{x\} = x+1$ ja yhtälö saa muodon $-x-1 = 1991x$. Tällä yhtälöllä on ratkaisu $x = -\dfrac{1}{1992}$.

91.7. Koska $C = \pi - A - B$, tehtävän epäyhtälö on

$$\sin A + \sin B > \cos A + \cos B - \cos(A+B).$$

Merkitään $A + B = 2t$, $A - B = 2u$. Koska kolmio on teräväkulmainen, $t > \dfrac{\pi}{4}$, ja siis $\sin t > \cos t$. Näillä merkinnöillä tehtävän epäyhtälö saa yhtäpitävän muodon

$$2\sin t \cos u > 2\cos t \cos u - \cos(2t)$$

eli

$$2(\sin t - \cos t)\cos u > (\sin t + \cos t)(\sin t - \cos t),$$

joka edelleen on yhtäpitävä epäyhtälön

$$\cos u > \frac{1}{2}(\sin t + \cos t)$$

kanssa. Riittää, kun todistetaan, että $\cos u > \sin t = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$. Viimeinen epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön

$$u = \frac{A-B}{2} < \frac{\pi}{2} - t = \frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2}$$

eli $A < \dfrac{\pi}{2}$ kanssa; koska kolmio oletettiin teräväkulmaiseksi, tämä epäyhtälö on tosi.

91.8. Merkitään tehtävän polynomia $p(x)$:llä. Koska p on neljättä astetta, sillä on enintään neljä reaalista nollakohtaa. Oletetaan, että $a < b < c < d < e$. Koska $p(a) = (a-b)(a-c)(a-d)(a-e)$, ja kaikki neljä tulon tekijää ovat negatiivisia, $p(a) > 0$. Vastaavasti $p(b) = (b-a)(b-c)(b-d)(b-e) < 0$. Samalla tavoin nähdään, että $p(c) > 0$, $p(d) < 0$ ja $p(e) > 0$. Koska p on jatkuva funktio, sen kuvaajan on puhkaistava x-akseli ainakin kerran pisteiden a ja b, b ja c, c ja d sekä d ja e välissä. p:llä on siis ainakin neljä reaalista nollakohtaa.

91.9. Jos $a > 0$, niin $ae^x = x^3$ jos ja vain jos $e^{x+\ln a} = e^{3\ln x}$ eli

$$x + \ln a = 3\ln x. \tag{1}$$

Logaritmikäyrän muodon perusteella tiedetään, että yhtälöllä (1) on kaksi, yksi tai ei yhtään ratkaisua. Rajatapaus on se, missä suora $y = x + \ln a$ on käyrän $y = f(x) = 3\ln x$ tangentti. Sivuamispisteessä $(x_0, 3\ln x_0)$ on oltava $f'(x_0) = \dfrac{3}{x_0} = 1$ eli $x_0 = 3$. Tällöin $\ln a = 3\ln 3 - 3$ ja

$$a = e^{3\ln 3 - 3} = \frac{27}{e^3} = a_0.$$

Kun $0 < a < a_0$, yhtälöllä on kaksi ratkaisua, kun $a = a_0$, ratkaisuja on yksi, kun $a > a_0$, ratkaisuja ei ole. Jos $a < 0$, ae^x on vähenevä funktio. Koska x^3 on kasvava, on tasan yksi piste x, jossa $ae^x = x^3$.

91.10. Klassinen tieto on, että 54° ja 36° kulmien trigonometriset funktiot on lausuttavissa juurilausekkeina. Koska tämä ei ole välttämättä nykyään yleisesti tunnettua, johdetaan tulos. Olkoon $ABCDE$ säännöllinen viisikulmio ja F janojen AD ja BE leikkauspiste. Olkoon $AB = b$ ja $AF = EF = a$. Koska $\angle BAE = 108^\circ$ ja $\angle BAD = 2 \times \angle DAE$ (kehäkulmia vastaavat kaaret!), niin $\angle BAD = 72^\circ$ ja $\angle DAE = \angle ABE = 36^\circ$. Tästä seuraa, että $\angle BFA = 72^\circ$, eli kolmio BFA on tasakylkinen. Tasakylkisistä kolmioista ABE ja AFE saadaan nyt

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b} = \frac{1}{\dfrac{a}{b}+1}.$$

Ratkaisemalla yhtälö saadaan

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Tästä saadaan edelleen

$$\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = \frac{b}{2a} = \frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1).$$

Pythagoraan lauseen mukaan tästä saadaan edelleen

$$\cos^2 54^\circ = 1 - \frac{1}{16}(\sqrt{5}+1)^2 = \frac{1}{8}(5-\sqrt{5})$$

ja

$$\cos 54^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{5-\sqrt{5}}.$$

Nyt voidaan käyttää peräkkäin kaavoja

$$\cos 6^\circ = \cos(60^\circ - 54^\circ) = \cos 60^\circ \cos 54^\circ + \sin 60^\circ \sin 54^\circ$$

ja

$$\sin 3^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 6^\circ)} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{5-\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{5}+1)\right)}.$$

91.11. Tarkastellaan kaikkia k:n pituisia numeroista 0, 1, ..., 9 muodostettuja jonoja. Väitetään, että näissä jonoissa on yhtä monta sellaista, jossa numeroiden summa on parillinen kuin sellaista, jossa numeroiden summa on pariton. Väite pätee, kun $k = 1$. Jos väite pätee, kun $k = n$, se pätee, kun $k = n + 1$: jokaista k-pituista jonoa vastaa 5 sellaista, jossa numeroiden summa on parillinen ja 5 sellaista, jossa numeroiden summa on pariton; ja jokainen $k + 1$-pituinen jono saadaan lisäämällä johonkin k-pituiseen jonoon yksi numero. Tästä seuraa, että numeroissa 0, 1, ...,

999999 on tasan yhtä monta sellaista, jossa numeroiden summa on parillinen ja yhtä monta sellaista, jossa numeroiden summa on pariton (täydennetään kaikki luvut kuusinumeroisiksi tarpeen mukaan alkunollia lisäämällä). Koska mukana on nolla, mutta ei 1000000, niin lukujen 1, 2, ..., 1000000 joukossa on kaksi enemmän sellaisia, joissa numeroiden summa on pariton.

91.12. 1991-kulmiolla on yhteensä $\binom{1991}{2} = 995 \cdot 1991$ eli pariton määrä sivuja ja lävistäjiä. Sivujen ja lävistäjien väritys on sama asia kuin kaikkien luvuista $1, 2, \ldots, 1991$ muodostettujen kahden eri luvun parien jakaminen kahdeksi joukoksi S ja P, "sinisiin" ja "punaisiin". "Uudelleennumerointi" on joukon $\{1, \ldots, 1991\}$ kääntäen yksikäsitteinen kuvaus f itselleen. Voimme olettaa, että joukossa S on enemmän alkioita kuin joukossa R. Ei voi olla niin, että kaikilla $\{k, l\} \in S$ olisi $\{f(k), f(l)\} \in R$. Tämä tarkoittaa, että joillakin k ja l kärjet numero k ja l ovat yhdistetyt sinisellä janalla sekä ennen että jälkeen uudelleennumeroinnin.

91.13. Määritellään jako-osien etäisyys sopimalla, että sellaisten kolmioiden etäisyys, joilla on yhteinen sivu, on 1 ja että kolmion Δ_1 etäisyys kolmiosta Δ_2 on n, jos Δ_2:lla on yhteinen sivu jonkin sellaisen kolmion kanssa, jonka etäisyys Δ_1:stä on $n-1$, ja $n-1$ on pienin mahdollinen. Näin määritellen ison kolmion kärjessä olevan pikkukolmion etäisyys sellaisista pikkukolmioista, joiden yksi sivu on kärkeä vastassa olevalla ison kolmion sivulla, on 8, ja 8 on suurin mahdollinen kolmioiden välinen etäisyys. Jos sellaisissa kolmioissa, joiden etäisyys on 1 on aina luvut, joiden erotus on enintään 3, täytyy lukujen 1 ja 25 sijaita kolmioissa, joiden etäisyys on 8. Ainakin toinen luvuista on silloin kolmion kärjessä; olkoon se 1. Koska myös 25:n ja 2:n on oltava etäisyydellä 8 olevissa kolmioissa, on myös 25:n oltava kärjessä, ja 2:n tätä kärkeä vastassa olevalla sivulla. Mutta koska $24-2 = 22 > 7\cdot 3$, niin luku 24 on etäisyydellä 8 1:stä ja 2:sta. Ainoa mahdollisuus olisi, että 24 on samassa kärkikolmiossa kuin 25! Ristiriita osoittaa, että joidenkin naapurikolmioiden lukujen erotus on ≥ 4.

91.14. Oletamme, että ritari on huoneessa, jossa hän ei ole aikaisemmin käynyt, ja että hän ei ole vielä käynyt kahdesti yhdessäkään huoneessa. Ritari ei silloin ole voinut käyttää mitään ovea kahdesti, ja hän on voinut käyttää enintään $n-1$:tä ovea, ja huone, jossa hän on, on $n-1$. huone, jossa hän käy. Ritari valitsee umpimähkään yhden mahdollisen oven ja astuu siitä. Nyt joko ritari saapuu huoneeseen, jossa hän ei vielä ole käynyt tai hän astuu ulos tai hän astuu huoneeseen B, jossa hän on jo käynyt. Ensimmäinen vaihtoehto johtaa samanlaiseen tilanteeseen kuin mistä lähdettiin, toinen vaihtoehto johtaa tilanteeseen, jossa ritari vieraili enintään $n-1$:ssä huoneessa ja jälkimmäinen tilanteeseen, jossa ritari voi palata takaisin sellaisten huoneiden kautta, joissa hän on jo käynyt: tullessaan toista kertaa huoneeseen B hän ei voi käyttää samaa ovea kuin ensi kerran B:ssä käydessään (koska kaikissa huoneissa ennen toista käyntiä B:ssä vierailtiin ensi kertaa), joten hän voi kulkea samoista ovista pois kuin mistä tulikin. Huoneita, joissa ritari tulee käymään on enintään $n-1+n-2 = 2n-3$ kappaletta.

91.15. a) On mahdollista. Jos kuningas lähtee alkuruudustaan, käy jossain ruudussa kääntymässä ja palaa samaa tietä lähtöruutuunsa, niin sen ruudun, jossa kuningas kääntyi parillisuus muuttuu, samoin lähtöruudun, mutta kaikkiin välillä olevin ruutuihin tulee lisätyksi 2, joten niiden parillisuus ei muutu. Jos laudalla on ruutuja, joissa alkuaan on pariton luku, kuningas voi käydä niissä kaikissa vuoron perään ja palata aina välillä alkuperäiseen ruutuunsa. Viimeisen käynnin jälkeen kuningas joko palaa alkuruutuunsa tai pysähtyy viereiseen ruutuun sen mukaan, onko alkuruudussa pariton vai parillinen luku.

b) On mahdollista. Voidaan olettaa, että kuningas on aluksi ruudussa a1. (Ellei se ole, niin se voi siirtyä.) Kuningas voi nyt järjestelmällisesti kasvattaa ruuduissa olevia numeroita kolmella jaolliseksi alkaen esim ruudusta h8 ja palaten aina välillä sellaisiin ruutuihin, joita ei ole vielä saatettu kolmella jaollisiksi. Näin voidaan jatkaa, kunnes korkeintaan ruudussa a1 on kolmella jaoton luku ja kuningas on jossakin ruuduista a2, b1 tai b2. Jos a1:n luku on $\equiv 2 \bmod 3$, niin viimeinen siirto tehdään ruutuun a1. Jos a1:ssä on luku, joka on $\equiv 1 \bmod 3$, niin tehdään siirto johonkin ruudun a1 viereiseen ruutuun. Siirron jälkeen molemmissa on luku $\equiv 1 \bmod 3$. Siirtämällä kuningasta edestakaisin näiden kahden ruudun kesken saadaan molempien luvut kasvatettua kolmella jaollisiksi.

c) On mahdollista. Voidaan olettaa, että kuningas on jossakin ruuduista a1, a2, b1, b2. Oletetaan, että ruuduissa ei kaikissa ole sama luku. Järjestetään ensin näihin ruutuihin sama luku niin, että kuningas on tarvittavien siirtojen jälkeen ruudussa b2. Jos näiden neljän ruudun suurimman ja pienimmän luvun erotus on d, niin joko yhden (jos pienin luku ei ole kuninkaan alkuruudussa ja pienin luku on vain yhdessä ruudussa), kahden (jos kuningas on pienimmän luvun ruudussa ja kaikissa muissa ei ole suurin luku tai jos kuningas ei ole pienimmän luvun ruudussa ja pienin luku on kahdessa ruudussa) tai kolmen siirron (kuningas on pienimmässä ruudussa ja kaikissa muissa ruuduissa on suurin luku tai pienin luku on kolmessa ruudussa) jälkeen erotus saadaan pienennettyä arvoon $d - 1$. Äärellisen monen siirron jälkeen kaikissa ruuduissa on sama luku. Neljällä lisäsiirrolla kuningas saadaan vielä haluttuun kulmaruutuun. Toistamalla päättely seuraavissa neljässä ruudussa tullaan tilanteeseen, jossa vierekkäisissä neljän ruudun neliöissä on kussakin sama luku. Kiertämällä tämän jälkeen yhtä neliötä niin kauan, että siihen tulee koko laudan suurin luku, siirtymällä naapurineliöön jne, saadaan koko laudalle sama luku. (Tehtävän a) ja b) kohtien vastaus sisältyy tähän, sillä sama luku voidaan kuvatulla prosessilla tuottaa parilliseksi tai kolmella jaolliseksi.)

91.16. Olkoot P_1, P_2 ja P_3 pisteiden O_1, O_2 ja O_3 projektiot suoralla l. Pythagoraan lauseen mukaan $P_1P_2 = \sqrt{(r_1+r_2)^2 - (r_1-r_2)^2} = 2\sqrt{r_1r_2}$. Vastaavasti $P_1P_3 = 2\sqrt{r_1r_3}$ ja $P_3P_2 = \sqrt{sr_2r_3}$. Väite saadaan, kun yhtälö $\sqrt{r_1r_2} = \sqrt{r_1r_3} + \sqrt{r_2r_3}$ jaetaan puolittain luvulla $\sqrt{r_1r_2r_3}$.

91.17. Olkoot $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$ x-, y- ja z-akselin suuntaiset yksikkövektorit. Oletetaan, että alkuperäinen säde tulee vektorin $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ suunnasta ja kohtaa ensin xy-tason. Olkoon $\vec{v}$:n ja $\vec{k}$:n välinen kulma α. Heijastunut vektori $\vec{v}$ on samassa tasossa kuin $\vec{u}$ ja $\vec{k}$, ja se muodostaa vektorin $\vec{k}$ kanssa kulman $\pi - \alpha$. Vektoriksi $\vec{v}$ voidaan valita $\vec{u} - 2c\vec{k} = a\vec{i} + b\vec{j} - c\vec{k}$. Vastaavalla tavalla xz-tasossa tapahtuneen heijastuksen jälkeen säteen suunta on $a\vec{i} - b\vec{j} - c\vec{k}$ ja yz-tasossa tapahtuneen heijastuksen jälkeen $-a\vec{i} - b\vec{j} - c\vec{k} = -\vec{u}$. Heijastusten jälkeen säde palaa lähtösuuntaansa.

91.18. Jos pallon sisään piirretyt tetraedrit eivät leikkaa toisiaan, niin pallon keskipiste kuuluu enintään toiseen niistä. Tästä seuraa, että ainakin toinen tetraedri sisältyy erääseen puolipalloon. Mutta puolipalloon piirretyistä tetraedreistä suurin on se, jonka pohja on mahdollisimman suuri ja korkeus mahdollisimman suuri eli se, jonka pohjana on yksikköympyrään piirretty tasasivuinen kolmio ja korkeus 1. Tällaisen tetraedrin tilavuus on kuitenkin vain $\dfrac{\sqrt{3}}{4} < \dfrac{1{,}8}{4} = 0{,}45$.

91.19. Olkoon O suorien A_1A_2 ja B_1B_2 leikkauspiste. Silloin pisteen O potenssi kaikkien kolmen ympyrän suhteen on sama. Tästä seuraa erityisesti, että O on suoralla C_1C_2 (joka sisältää kaikki ne pisteet, joiden potenssi on sama niiden ympyröiden suhteen, jotka leikkaavat C_1:ssä ja C_2:ssa). Koska $\angle A_2A_1B_2 = \angle B_2B_1A_2$, (kaarta A_2B_2 vastaavat kehäkulmat), kolmiot OA_1B_2 ja OB_1A_2 ovat yhdenmuotoiset. Tästä seuraa, että

$$\frac{A_1B_2}{A_2B_1} = \frac{A_1O}{B_1O}.$$

Vastaavasti

$$\frac{B_1C_2}{B_2C_1} = \frac{B_1O}{C_1O} \quad \text{ja} \quad \frac{C_1A_2}{C_2A_1} = \frac{C_1O}{A_1O}.$$

Väite saadaan kertomalla edelliset kolme yhtälöä puolittain keskenään.

91.20. Olkoon D suoran AB ja x-akselin leikkauspiste. Olkoon $\angle AOD = \alpha$ ja $\angle COD = \beta$. Piirretään A-keskinen ympyrä O:n ja C:n kautta. Silloin $\angle ACO = \alpha$. Suoran AB yhtälö on

$$y - \frac{1}{x_1} = \frac{\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1}}{x_2 - x_1}(x - x_1) = -\frac{1}{x_1x_2}(x - x_1).$$

Kun $y = 0$, $x = x_1 + x_2$ eli $OD = x_1 + x_2$. Kolmio OCD on tasakylkinen. (C:stä piirretyn korkeusjanan kantapiste on sivun OD keskipiste.) Näin ollen $\angle CDO = \beta$ ja $\angle OCA = 2\beta$. Siis $\alpha = 2\beta$, eli väite on todistettu.

92.1. Koska sekä p että q ovat parittomia, niin $q - p = 2k$ ja $p + q = 2(p + k)$ Koska $p < p + k < p + 2k = q$, $p + k$ ei ole alkuluku, joten se on kahden ykköstä suuremman positiivisen kokonaisluvun tulo.

92.2. Jos p on alkuluku, niin $d(p^k) = k + 1$. Silloin $d(p^{p^n-1}) = p^n$ ja $\dfrac{p^{p^n-1}}{p^n} = p^{p^n-(n+1)}$. Koska $p^n - (n+1) \geq 0$ kaikilla n, tehtävän vaatimuksen täyttäviä lukuja löytyy äärettömän monta.

92.3. Parillisen luvun neliö on muotoa $4k$ ja parittoman $4k + 1$. Kolmella jaollisen luvun kuutio on muotoa $9k$, kolmella jaottoman taas muotoa $(3m \pm 1)^3 = 27m^3 \pm 27m^2 + 9m \pm 1 = 9k \pm 1$. Kahden neliön summa on täten muotoa $4k + j$, $0 \leq j \leq 2$ ja kahden kuution summa muotoa $9k + l$, $-2 \leq l \leq 2$. Aritmeettisen jonon $36k + 3$ luvut eivät voi olla kahden neliön eikä kahden kuution summia.

92.4. Pythagoraan lauseen nojalla kuusikulmion sivujen x- ja

y-akseleille piirrettyjen projektioiden neliöiden summa on sama kuin kuusikulmion sivujen neliöiden summa; jos tämä summa on kuuden peräkkäisen kokonaisluvun summa, niin se on pariton. Toisaalta projektioiden neliöiden summa on pariton vain jos projektioiden summakin on pariton. Tämä ei ole mahdollista, koska projektioiden vektorisumma on nolla.

92.5. Koska

$$(a^2+b^2+(a+b)^2)^2 = a^4+b^4+(a+b)^4+2a^2b^2+2a^2(a+b)^2+2b^2(a+b)^2$$
$$= a^4+b^4+(a+b)^4+2a^2b^2+2a^4+4a^3b+2a^2b^2+2a^2b^2+4ab^3+2b^4 = 2(a^4+b^4+(a+b)^4),$$

väite seuraa.

92.6. Havaitaan, että

$$\frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{k^2-k+1}{k^2+k+1}.$$

Edellisten tekijöiden tulo voidaan laskea heti:

$$\prod_{k=2}^{100}\frac{k-1}{k+1} = \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 98\cdot 99}{3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 100\cdot 101} = \frac{2}{100\cdot 101}.$$

Jos $a_k = k^2+k+1$, niin $a_{k-1} = (k-1)((k-1+1)+1 = k^2-k+1$. Siis

$$\prod_{k=1}^{100}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} = \frac{a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_{100}}{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{99}} = \frac{a_{100}}{a_1} = \frac{100^2+100+1}{3}.$$

Kysytty tulo on siis

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{100^2+100+1}{100\cdot 101} = \frac{2}{3}\cdot\frac{100\cdot 101+1}{100\cdot 101} > \frac{2}{3}.$$

92.7. Jos potenssitornin ylin a korvataan luvulla 1992, saadaan potenssitornilukua suurempi luku x. Toisaalta $a^{1992} = 1992$, joten x on sama kuin potenssitorni, jossa ylin eksponentti on 1992 ja a:t ovat vähentyneet yhdellä. Kun korvaus suoritetaan toistuvasti, jää lopulta jäljelle vain $x = 1992$. Potenssitorniluku on siis tehtävän luvuista pienempi.

92.8. Yhtälö on sama kuin

$$2^x = \frac{2x+4}{4-x}.$$

Koska vasen puoli on positiivinen, mahdolliset ratkaisut ovat joukossa, jossa oikean puolen osoittaja ja nimittäjä ovat samanmerkkiset, eli välillä $(-2, 4)$. Käymällä läpi tämän välin kokonaisluvut saadaan ratkaisut $x = 0$, $x = 1$ ja $x = 2$.

92.9. Kolmannen asteen polynomin kulku on sellainen, että väite tulee todistetuksi, jos polynomille löytyy negatiivinen minimi ja positiivinen maksimi. Koska $f'(x) = 3x^2+2ax+b$ ja $b < 0$, f':lla on kaksi nollakohtaa, x_1 ja x_2, $x_1x_2 = b < 0$. Jakoyhtälön mukaan

$$f(x) = \left(\frac{x}{3}+\frac{a}{9}\right)f'(x) + 2\left(\frac{b}{3}-\frac{a^2}{9}\right)x.$$

Siis f':n nollakohdissa on

$$f(x_1)f(x_2) = 4\left(\frac{b}{3}-\frac{a^2}{9}\right)^2 x_1x_2 < 0.$$

Maksimi ja minimi ovat erimerkkiset.

92.10. Kirjoitetaan

$$p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \qquad a_4 \neq 0.$$

Silloin $p(x)-p(-x) = 2a_3x^3+2a_1x = 0$ kaikilla x, mikä voi toteutua vain kun $a_3 = a_1 = 0$. Selvästi $p(0) = a_0 = 1$, ja jotta p olisi positiivinen suurilla x:n arvoilla, on oltava $a_4 > 0$. Ääriarvokohtia koskevan ehdon (iv) nojalla derivaatalla $p'(x) = 4a_4x^3+2a_2x = 2x(a_4x^2+a_2)$ on oltava ainakin kaksi eri suurta reaalista nollakohtaa. Koska $p'(x) = 0$, kun $x = 0$ tai $x = \pm\sqrt{-a_2/2a_4}$. On oltava $-a_2 > 0$. Tarkastelemalla $p(x)$:n kuvaajaa havaitaan, että minimipisteitä näistä voivat olla vain jälkimmäiset kaksi. Ehdosta (iv) seuraa, että $-a_2 = 2a_4$. Siis $p(x) = a_4(x^4-2x^2)+1 = a_4(x^2-1)^2+1-a_4$. Jotta $p(x) \geq 0$ kaikilla x, on oltava $a_4 \leq 1$. Kääntäen todetaan heti, että jokainen polynomi $p(x) = a(x^2-1)^2+(1-a)$, missä $0 < a \leq 1$, toteuttaa tehtävän ehdot.

92.11. Ehdosta (iii) seuraa, että $f(1) = 1$. Jos $q > 2$, niin

$$f(q) = \frac{1}{1+f\left(\dfrac{1}{q-2}\right)} \tag{1}$$

ja jos $\dfrac{1}{2} \leq q < 1$, niin

$$f(q) = \frac{1}{1+f\left(\dfrac{1-q}{q}\right)}. \tag{2}$$

Olkoon $q = \dfrac{a}{b}$ positiivinen rationaaliluku; olkoon $a+b = n$. Jos $q < \dfrac{1}{2}$ eli $a < 2b$, niin

$$\frac{q}{1-2q} = \frac{a}{b-2a}$$

ja $a+b-2a = b-a < n$. Jos $\dfrac{1}{2} \leq q < 1$, niin

$$\frac{1-q}{q} = \frac{b-a}{a},$$

ja $b-a+a = b < n$. Jos $1 < q \leq 2$, niin

$$q-1 = \frac{a-b}{b}$$

ja $a-b+b < n$. Jos $q > 2$, niin $a > 2b$ ja

$$\frac{1}{q-2} = \frac{b}{a-2b},$$

$b+a-2b = a-b < n$. Ehtoja (i) ja (ii) sekä kaavoja (1) ja (2) käyttäen saadaan $f(q)$ aina lausuttuna sellaisen $f(r)$:n lausekkeena, missä r:n nimittäjän ja osoittajan summa on aidosti pienempi kuin q:n nimittäjän ja osoittajan summa. Äärellisen monen askelen jälkeen tullaan $f(1)$:een. Kääntäen jokainen $f(q)$ voidaan laskea $f(1) = 1$:stä äärellisen monella laskutoimituksella. Ehdot (i) – (iii) toteuttavia funktioita on yksi ja vain yksi.

92.12. Selvästi $L = 1$ on eräs mahdollinen arvo (Esim. $\phi(n) = n$ kaikilla n). Osoitetaan, että se on ainoa mahdollisuus. Oletetaan, että jollakin ϕ on $L > 1$. Raja-arvon määritelmästä seuraa tällöin, että on olemassa sellainen luku N, että

$$\frac{\phi(n)}{n} > 1$$

kaikilla $n \geq N$. Erityisesti $\phi(n) \geq N + 1$ kaikilla $n \geq N$. Mutta nyt ϕ ei voi saada kaikkia positiivisia kokonaislukuja arvoikseen; koska voi olla $\phi(n) \leq N$ vain, kun $n < N$, joku luvuista 1, 2, ..., N ei ole ϕ:n saamien arvojen joukossa. Oletetaan sitten, että $L < 1$. Silloin on olemassa $b < 1$ ja n_0 siten, että $\phi(n) \leq bn$, kun $n > n_0$. Olkoon n_1 niin suuri, että $n_1 - n_0 > bn_1$ Nyt $n_1 - n_0$ funktion arvoa $f(n_0 + 1)$, $f(n_0 + 2)$, ..., $f(n_1)$ ovat kaikki pienempiä kuin bn_1; niiden joukossa on oltava ainakin kaksi yhtä suurta, joten f ei ole bijektio. Oletus $L \neq 1$ johti ristiriitaan tehtävän oletusten kanssa, joten $L = 1$ on ainoa mahdollisuus.

92.13. Koska $0 < (x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$, saadaan aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välistä yhteyttä käyttäen

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2 \geq \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} \geq 4\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i y_i}.$$

Toisaalta

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i y_i} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i y_i}}.$$

Kun nämä epäyhtälöt kerrotaan puolittain, saadaan heti tehtävän epäyhtälö.

92.14. Olkoon A sellainen kaupunki, josta pääsee teitä pitkin useimpiin kaupunkeihin. Jos maassa olisi kaupunki B, johon ei pääse A:sta, niin B:stä pääsisi A:han. Mutta silloin B:stä pääsisi A:han ja kaikkiin niihin kaupunkeihin, joihin A:sta pääsee.

92.15. Noak voi sijoittaa neljä mielivaltaista eläintä neljään häkkiin. Viidennellä eläimellä on enintään kolme vihollista, joten se voidaan sijoittaa ainakin yhteen häkkiin. Täsmälleen sama tilanne vallitsee kuudennen, seitsemännen ja kahdeksannen eläimen kohdalla. – Tehtävä tässä muodossaan perustui erehdykseen. Alkuperäinen tarkoitus oli ollut vaatia, että joka häkissä on kaksi eläintä, mutta kilpailutehtäviä (Vilnassa) puhtaaksikirjoitettaessa kakkonen oli pudonnut pois. Tämän vaativamman version ratkaisu pohjautuu yllä olevaan; jatkotarkastelussa selvitetään, että niissä tapauksissa, joissa joissakin häkeissä on enemmän eläimiä, voidaan tehdä vaihtoja, jotka tasaavat lukumäärät.

92.16. Määritellään käsite *sivutahkorengas*. Se on jono T_1, T_2, $\ldots T_k$, $T_{k+1} = T_1$ sivutahkoja siten, että T_j:llä ja T_{j+1}:llä on yhteinen särmä ja kaikki yhteiset särmät ovat yhdensuuntaisia. Oletetaan, että sivutahkoista voidaan muodostaa n sivutahkorengasta. Selvästi jokaisella kahdella sivutahkorenkaalla on tasan kaksi yhteistä sivutahkoa ja jokainen sivutahko kuuluu tasan kahteen sivutahkorenkaaseen. Tästä seuraa, että sivutahkojen lukumäärä on kaksi kertaa niin suuri kuin sivutahkorenkaiden joukon kaksialkioisten osajoukkojen määrä eli $n(n - 1)$. Mutta millään kokonaisluvulla ei ole $n(n - 1) = 1992$ $(44 \cdot 45 = 1980$ ja $45 \cdot 46 = 2070)$.

92.17. Oletuksen perusteella $AP = \dfrac{8}{2}$. Merkitään $2\alpha = \angle ACD$. Silloin $\angle ABD = 2\alpha$, $\angle DBC = \angle CAD = 90° - 2\alpha$ ja (kolmion BAD tasakylkisyyden perusteella) $\angle BAD = 90° - \alpha$, joten $\angle BAC = \angle BDC = \alpha$. Merkitään $PD = d$ ja sovelletaan sinilausetta kolmioihin APD ja CPD. Saadaan

$$\frac{d}{\sin(90° - 2\alpha)} = \frac{8}{5\sin(90° - \alpha)}, \quad \frac{d}{\sin(2\alpha)} = \frac{2}{5\sin\alpha}.$$

Näistä eliminoidaan d. kun käytetään hyväksi tietoja $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$ ja $\sin(90° - x) = \cos x$, saadaan $4\sin\alpha\cos^2\alpha = 8\cos(2\alpha)\sin\alpha$, josta edelleen $\cos(2\alpha) + 1 = 4\cos(2\alpha)$ ja $\cos(2\alpha) = \dfrac{1}{3}$, $CD = 2\cos(2\alpha) = \dfrac{2}{3}$.

92.18. Olkoot M, N ja L sivujen BC, CA ja AB keskipisteet. Koska kolmio ABC ei ole tylppäkulmainen, sen ympäri piirretyn ympyrän keskipiste O on kolmion MNL sisällä tai kärjessä. Mutta silloin

$$AB + CA + BC = 2(AM + MN + NC) > 2(AO + OC) = 2d.$$

92.19. Leikatkoon AD C:n (paitsi A:ssa) myös pisteessä F_1. Leikatkoon BE vastaavasti C:n myös pisteessä F_2. Homotetia, jonka keskus on A ja joka kuvaa D:n pisteeseen F_1, kuvaa t:n C:n tangentiksi t_1, jonka sivuamispiste on F_1. Vastaavasti homotetia, jonka keskus on B ja joka kuvaa E:n pisteeseen F_2 kuvaa t:n C:n tangentiksi t_2, jonka sivuamispiste on F_2. Koska t_1 ja t_2 ovat molemmat t:n suuntaisia ja t:n samalla puolella, niiden on yhdyttävä; silloin myös sivuamispisteet ovat samat, ja sivuamispiste on samalla suorien AD ja BE leikkauspiste F.

92.20. Koska $c^2 = a^2 + b^2$, saadaan heti

$$p(p-c) = \frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{4} = \frac{1}{2}ab = S,$$
$$(p-a)(p-b) = \frac{-a+b+c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2} = \frac{c^2 - (a-b)^2}{4} = \frac{1}{2}ab = S.$$

93.1 Voimme olettaa, että $a_1 > a_3$. Olkoon $x = a_1\cdot 100 + a_2\cdot 10 + a_3$. Silloin $x^2 = a_1^2\cdot 10000 + 2a_1a_2\cdot 1000 + (a_2^2 + 2a_1a_3)\cdot 100 + 2a_2a_3\cdot 10 + a_3^2$; koska x^2 on viisinumeroinen, $a_3 \le 3$. Kun kokeillaan eri mahdollisuuksia arvoilla $a_1 = 3$ ja $a_3 = 2$, saadaan ratkaisut 301, 311, 201, 211, 221 (ja 103, 113, 102, 112, 122).

93.2. Tarkastellaan lukuja $6n+3$. Koska $(6n+3)(6m+3) = 6(6mn) + 6(3m+3n) + 9 = 6(6mn + 3m + 3n + 1) + 3$, näiden lukujen tulot ja potenssit ovat samaa muotoa. Siten esimerkiksi jokaisella k luku $9^k = (6\cdot 1 + 3)^k = 6n + 3$ jollain n:n arvolla.

93.3. Suurin määrä on kolme. Luvut $33 = 3\cdot 11$, $34 = 2\cdot 17$ ja $35 = 5\cdot 7$ ovat peräkkäisiä mielenkiintoisia lukuja. Koska 3 ja 5 ovat alkulukuja, mikään neljän peräkkäisen luvun jono, jossa 4 on mukana, ei voi koostua vain mielenkiintoisista luvuista. Joka neljäs lukua 4 suurempi kokonaisluku on muotoa $2\cdot 2\cdot p$, eikä niin olen voi olla mielenkiintoinen.

93.4. Jos

$$p = \sqrt{\frac{25}{2} + \sqrt{\frac{625}{4} - n}} + \sqrt{\frac{25}{2} - \sqrt{\frac{625}{4} - n}},$$

niin $p^2 = 25 + 2\sqrt{n}$ eli $n = \left(\frac{p^2 - 25}{2}\right)^2$ ja $p \geq 5$. p on pariton. Jos $p = 5$, niin $n = 0$. Jos $p = 7$, $n = 144$. Jos $p \geq 9$, $n > \frac{625}{4}$, ja lauseke ei ole määritelty.

93.5. $n^{12} - n^8 - n^4 + 1 = (n^8 - 1)(n^4 - 1) = (n^4 + 1)(n^2 + 1)^2(n + 1)^2(n - 1)^2$. Jos n on pariton, niin luvuista $n + 1$, $n - 1$ toinen on jaollinen 4:llä, toinen 2:lla. Koska $n^4 + 1$ on jaollinen kahdella ja $(n^2 + 1)^2$ neljällä, tulee kysytty luku jaolliseksi kaikkiaan luvulla $2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 16 = 2^9$.

93.6. Merkitään $h(x) = \frac{f(x)}{x}$. Silloin $g(x) = \frac{x^2}{f(x)} = \frac{x}{h(x)}$. Nyt $x = g(f(x)) = \frac{f(x)}{h(f(x))}$, josta $h(f(x)) = \frac{f(x)}{x} = h(x)$. Merkitään $f^{(0)} = f$, $f^{(n+1)}(x) = f(f^{(n)}(x))$. Induktiolla nähdään, että $h(f^{(n)}(x)) = h(x)$. Koska $f(x) = xh(x)$, niin $f^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x)h(f^{(n)}(x)) = f^{(n)}(x)h(x)$. Siis

$$\frac{f^{(n)}(x)}{x} = \frac{f^{(n)}(x)}{f^{(n-1)}(x)} \cdot \frac{f^{(n-1)}(x)}{f^{(n-2)}(x)} \cdot \ldots \cdot \frac{f(x)}{x} = h(x)^4.$$

Erityisesti $\frac{f^{(n)}(3)}{3} = h(3)^n$ on kaikilla n välillä $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Tämä on mahdollista vain, kun $h(3) = 1$ eli $f(3) = 3 = g(3)$.

93.7. Toisen yhtälön perusteella $z = 2x$. Kolmannen yhtälön nojalla $x = \frac{1}{3}(20 - y)$. Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan nyt

$$\left(\frac{40 - 2y}{3}\right)^x = (y^2)^x.$$

Tästä seuraa joko $\frac{1}{3}(40 - 2y) = y^2$ tai $\frac{1}{3}(40 - 2y) = -y^2$ ja x parillinen. Jälkimmäisellä yhtälöllä ei ole reaalilukuratkaisuja. Edellisen yhtälön ratkaisut ovat $y = -4$ ja $y = \frac{10}{3}$. Koska vain kokonaislukuratkaisut kelpaavat, ainoa ratkaisu on $y = -4$, $x = 8$, $z = 16$.

93.8. Merkitään I:llä ja D:llä sellaisten kokonaislukujen joukkoja, joiden numerot ovat aidosti kasvavia tai aidosti väheneviä. Olkoot D_0, D_1, D_2 ja D_3 D:n osajoukot, jotka muodostuvat 9:llä alkavista, ei 9:llä alkavista, 0:aan päättyvistä ja ei 0:aan päättyvistä luvuista. Kaikki I:n luvut saadaan luvusta 123456789 jättämällä siitä joitain numeroita pois. k-numeroisten I:n lukujen määrä on $\binom{9}{k}$ (voimme pitää 0:aa 0-numeroisena lukuna).

Jokainen k-numeroinen luku a joukossa I voidaan yhdistää yksikäsitteiseen lukuun $b_0 \in D_0$, $b_2 \in D_2$, $b_3 \in D_3$ siten, että

$$\begin{aligned}
a + b_0 &= 999\ldots 9 = 10^{k+1} - 1,\\
a + b_2 &= 99\ldots 9 = 10^k - 1,\\
a + b_3 &= 111\ldots 10 = \frac{10}{9}(10^k - 1).
\end{aligned}$$

Jos siis merkitsemme joukon A alkioiden summaa $S(A)$:lla, niin

$$\begin{aligned}
S(I) + S(D_0) &= \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}(10^{k+1} - 1) = 10\cdot(10+1)^9 - 2^9 = 10\cdot 11^9 - 2^9\\
S(I) + S(D_1) &= \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}(10^{k} - 1) = 11^9 - 2^9,\\
S(I) + S(D_3) &= \frac{10}{9}(11^9 - 2^9).
\end{aligned}$$

Koska $S(D_0) + S(D_1) = S(D_2) + S(D_3) = S(D)$, ja $S(D_2) = 10S(D_3)$, niin

$$\begin{cases} 2S(I) + S(D) = 11^{10} - 2^{10},\\ S(I) + \dfrac{1}{11}S(D) = \dfrac{10}{9}(11^9 - 2^9), \end{cases}$$

Tästä voidaan ratkaista

$$S(I) + S(D) = \frac{80}{81}\cdot 11^{10} - \frac{35}{81}2^{10}.$$

Summa pitää sisällään yksinumeroiset luvut kahdesti, joten oikea vastaus on

$$\frac{80}{81}\cdot 11^{10} - \frac{35}{81}2^{10} - 45 = 25617208995.$$

93.9. Ensimmäisen yhtälön perusteella $|x|^5 = |y|(1 + |y|^4) \geq |y|^5$, ja yhtäsuuruus pätee vain, kun $x = y = 0$. Samoin saadaan muista yhtälöistä peräkkäin $|x| \geq |y| \geq |z <\geq |t| \geq |x|$. Koska tämä on mahdollista vain, kun yhtäsuuruus vallitsee joka epäyhtälössä, on oltava $x = y = z = t = 0$.

93.10. Voimme olettaa, että $|a'_m - b'_m| = \max_{1\leq i\leq n}|a_i - b_i| = c$ ja että $a'_m > b'_m$. Tarkastellaan lukuja b'_1, b'_2, ..., b'_m, a'_m, a'_{m+1}, ..., a'_n. Koska niitä on $n+1$ kappaletta, kahdella niistä on ollut sama indeksi ennen suuruusjärjestykseen asettamista; toisen näistä on oltava jokin b_j ja toisen jokin a_j. Mutta $b_j \leq b'_m < a'_m \leq a_j$, joten $|a_j - b_j| > |a'_m - b'_m| = c$.

93.12. Yhteyksiä eri kaupunkien välillä on oltava ainakin $13 - 1 = 12$. Jos a on autoyhteyksien, j junayhteyksien ja l lentoyhteyksien määrä, niin tehtävän oletuksen mukaan on oltava $a + j \geq 12$, $\quad j + l \geq 12$, $\quad l + a \geq 12$. Kun nämä yhtälöt lasketaan yhteen, saadaan $2(a + j + l) \geq 36$, $a + j + l \geq 18$. Olkoot kaupungit K_1, K_2, $\ldots$, K_{13} Jos kaupunkien K_{2n+1} ja K_{2n+2}, välillä on linja-autoyhteys, Kaupunkien K_{2n+2} ja K_{2n+3} välillä junayhteys ja K_{2n+1} ja K_{2n+3} välillä lentoyhteys, $n = 0, \ldots, 5$, niin jokaisesta kaupungista pääsee jokaiseen muuhun autolla ja junalla (vuoron perään toista ja toista kulkuneuvoa käyttäen, ja jokaisesta "parittomasta" kaupungista jokaiseen toiseen parittomaan kaupunkiin pelkästään lentäen. Koska jokainen parillinen kaupunki on yhdistetty "viereisiin" parittomiin kaupunkeihin sekä junalla että linja-autolla, voidaan jokaisesta kaupungista päästä jokaiseen muuhun käyttäen lentokonetta ja joko linja-autoa tai junaa.

93.13. Koska pikkukolmioita on 100, ne ovat kymmenessä rivissä. (n:n ensimmäisen parittoman luvun summa on n^2, kuten relaation $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ ja induktion avulla helposti nähdään.) Jos pikkukolmion korkeudeksi valitaan 1, niin jokaisen ison kolmion pisteen sen sivuista laskettujen etäisyyksien summa on 10 eli ison kolmion korkeus. Jos olisi valittavissa 8 kärkipistettä tehtävässä esitetyllä tavalla ja jos näiden pisteiden etäisyydet ison kolmion kolmesta sivusta olisivat a_i, b_i, c_i, $i = 1, 2, \ldots, 8$, niin

$$\sum_{i=1}^{8}(a_i + b_i + c_i) = 80.$$

Toisaalta kaikki a_i:t olisivat keskenään eri suuria lukuja samoin kuin kaikki b_i:t ja kaikki c_i:t. Mutta tämä merkitsisi, että $\sum_{i=1}^{8} a_i \geq 0 + 1 + 2 + \ldots + 7 = 28$. Koska sama pätisi lukuihin b_i ja c_i, olisi kaikkien a_i-, b_i- ja c_i-lukujen summa ainakin 84. Pisteitä ei siis voi olla ainakaan enempää kuin 7. Esimerkillä voidaan osoittaa, että 7 on mahdollinen.

93.14. Kuvio

$$\begin{array}{ccccc} & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & & & \circ \\ \circ & & & \circ & \circ \\ \circ & & \circ & & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \end{array}$$

osoittaa, että ainakin kahdeksalla poistolla selvitään. Melko moniosaisella tapaustarkastelulla voidaan osoittaa, että seitsemän poistoa ei riitä. [Tehtävä oli tuomariston työtapaturma.]

93.15. Voidaan, esimerkiksi kirjoittamalla toiseen noppaan luvut 1, 2, 3, 4, 5, ja 6 ja toiseen 1, 1, 1, 7, 7 ja 7.

93.16 Jos ympyröiden keskipisteet O ja P olisivat samalla puolella suoraa EH, olisi $EH \| OP$ ja OP yhtä pitkä kuin janojen EF ja GH keskipisteiden etäisyys, joka on $3 + 6 + 3 = 12$. Ympyröiden halkaisija olisi pienempi kuin 12, eikä voisi olla $|AB| = 14$. Koska kolmiot OFE ja PGH ovat yhteneviä tasakylkisiä kolmioita, $\angle OEF = \angle PHF$, joten myös kolmiot OEF ja PHF ovat yhteneviä. Siis F on janan OP keskipiste. Pisteet O ja P ovat samalla puolella suoraa AD (ellei näin olisi, AD kulkisi M:n kautta ja olisi oltava

$BC < FG$, toisin kuin oletettiin). Silloin $AD\|OP$ ja $AO\|CP$, joten $|AC| = |OP| = 28$ ja $OM = 14$. Olkoon $OT = h$ kolmioiden OEM ja OEF korkeusjana. Silloin $h^2 = r^2 - 3^2$ ja (koska $|TM| = 6$) $h^2 = 14^2 - 6^2$. Siis $r = 13$.

93.17. Voidaan. Sijoitetaan pisteet tasasivuisen kolmion kärkiin ja annetaan kunkin liikkua pitkin kolmion sivua samalla nopeudella. Pisteet ovat silloin aina tasasivuisen kolmion kärkinä, eivätkä siis koskaan ole samalla suoralla. Jotta pisteiden nopeudet saataisiin erisuuriksi, lisätään pisteiden nopeuksiin vakiovektori, jonka projektiot tehtävän kolmelle suoralle ovat eri pituiset. Koko kuvio liikkuu nyt vakionopeudella, joten pisteet ovat edelleen kolmion kärkiä.

93.20. Jos kuution Q ympäri piirretään ($\frac{\sqrt{3}}{2}$-säteinen) pallo S, niin jokainen hyvä tetraedri sisältyy S:ään. Pythagorasta ja tetraedrin tilavuuden kaavaa soveltaen näkee, että S:n sisään piirretyn säännöllisen tetraedrin tilavuus on $\frac{1}{3}$. Tällainen tetraedri on mm. sellainen tetraedri, jonka neljä kärkeä yhtyvät Q:n neljään kärkeen (ja jonka särmät ovat $\sqrt{2}$:n pituisia. Pienentämällä tätä maksimitetraedria homoteettisesti saadaan hyviä tetredreja, joiden tilavuus on mielivaltainen V, $0 < V < \frac{1}{3}$.

94.1. Koska $(x \circ y) \circ z = (x + y - xy) \circ z = x + y - xy + z - xz - yz + xyz$ on symmterinen x:n, y:n ja z:n suhteen, $(x \circ y) \circ z = (y \circ z) \circ x = (x \circ z) \circ y$, ja ratkaistavaksi jää yhtälö $0 = (x \circ y) \circ z = x + y + z - xy - yz - zx + xyz = (x - 1)(y - 1)(z - 1) + 1$. Yhtälö toteutuu, kun luvuista $x - 1$, $y - 1$, $z - 1$ yksi tai kolme on -1 ja kaksi tai nolla on $+1$; joko $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ tai kaksi luvuista x, y, z on 2 ja kolmas 0.

94.2. Vastaoletus 1: $a_{i-1} + a_{i+1} \geq 2a_i$ kaikilla $i = 2, 3, \ldots, 8$. Silloin $a_3 \geq 2a_2 - a_1 = 2a_2 \geq a_2$, $a_4 \geq 2a_3 - a_2 = a_3 + (a_3 - a_2) \geq a_3$ jne., siis $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_9$. Koska $a_1 = a_9 = 0$, kaikki a_i:t ovat nollia, mikä kiellettiin oletuksissa. Siis on oltava ainakin yhdellä i $a_{i-1} + a_{i+1} < 2a_i$.

Vastaoletus 2: $a_{i-1} + a_{i+1} \geq 1{,}9a_i$ kaikilla i. Koska kaikki a_i:t eivät ole nollia, jokin niistä, esim. a_k, on suurin. Luvut voidaan kertoa samalla luvulla, joten voidaan olettaa, että $a_k = 1$. Silloin $a_{k-1} + a_{k+1} \geq 1{,}9$. Koska a_{k-1}, $a_{k+1} \leq 1$, on a_{k-1}, $a_{k+1} \geq 0{,}9$, ja ainakin toinen luvuista on $\geq 0{,}95$. Voidaan olettaa, että $a_{k+1} \geq 0{,}95$. (Ellei, voidaan muuttaa indeksointia, $b_k = a_{10-k}$). Silloin $a_{k+2} \geq 1{,}9 \cdot 0{,}95 - 1 = 0{,}805$, $a_{k+3} \geq 1{,}9 \cdot 0{,}805 - a_{k+1} \geq 1{,}9 \cdot 0{,}805 - 1 = 0,5295$ ja $a_{k+4} \geq 1{,}9 \cdot 0{,}5295 - 1 = 0{,}00605$. Siis $k + 4 < 9$ eli $k < 5$. Koska $a_{k-1} \geq 0{,}9$, on $a_{k-2} \geq 1,9 \cdot 0{,}9 - 1 = 0{,}71$ ja $a_{k-3} \geq 1{,}9 \cdot 0{,}71 - 1 = 0{,}349$.Siis $k - 3 \geq 2$, joten $k \geq 5$. Ristiriita.

94.3. lauseke on määritelty vain, kun x:n ja y:n itseisarvo on enintään 1. Lausekkeen suurin arvo saadaan selvästi silloin, kun $x \geq 0$ ja $y \geq 0$. Näin ollen voidaan merkitä $x = \cos t$, $y = \cos u$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$. Lauseke on nyt $\cos t \cos u + \cos t \sin u + \cos u \sin t - \sin t \sin u = \cos(u + t) + \sin(u + t) = \sqrt{2}(\cos(u + t) \sin \frac{\pi}{4} + \sin(u + t) \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \sin(u + t + \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$. Maksimi $\sqrt{2}$ saadaan, kun $u + t = \frac{\pi}{4}$.

94.4. Oletetaan, että $\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1} = \frac{p}{q}$ ja $\frac{p}{q}$ on supistetussa muodossa. Silloin $\frac{q}{p} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{2}$. Yhtälöistä

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1} = \frac{p}{q}$$

saadaan $\sqrt{n+1} = \frac{2q^2+p^2}{2pq}$ ja edelleen $4np^2q^2 = 4q^4+p^4$. Nähdään, että p^4 on jaollinen kahdella, ja siis myös p on jaollinen kahdella. Jos $p = 2r$, saadaan $4nr^2q^2 = q^4+4r^4$, joten myös q on jaollinen kahdella. Mutta näin ollen $\frac{p}{q}$ ei ole supistetussa muodossa. Tehtävässä vaadittuja lukuja n ei ole olemassa.

94.5. On helppo nähdä, että jos a ja b ovat kokonaislukuja, niin $p(a)-p(b)$ on jaollinen luvulla $a-b$. Oletetaan, että $p(a) = 1$ ja $p(b) = 3$. Jos $p(c) = 2$, niin $c-a$ on luvun 1 tekijä, ja samoin $c-b$. Siis $c-a = \pm 1$ ja $c-b = \pm 1$. Mutta tällaiset ehdot täyttäviä kokonaislukuja on enintään 1.

94.6. Tarkastellaan lukujen 2^k jäännösluokkia $\bmod q$. Koska luokkia on äärellinen määrä, on olemassa i ja j, $i > j$, niin että $2^i - 2^j$ on jaollinen q:lla. Koska $2^i - 2^j = 2^j(2^{i-j}-1)$ ja q on pariton, q on $2^{i-j}-1$:n tekijä: $2^{i-j}-1 = qs$. Mutta $\frac{p}{q} = \frac{ps}{2^{i-j}-1}$.

94.7. Summassa on parillinen määrä termejä. Ne voidaan yhdistää pareittain niin, että summan termit ovat

$$\frac{1}{k^3}+\frac{1}{(p-k)^3} = \frac{p^3-3p^2k+3pk^2}{k^3(p-k)^3}.$$

Tällaisten termien summan nimittäjän kaikki alkutekijät ovat pienempiä kuin p, mutta p on osoittajan tekijä.

94.8. Olkoon $a = 2i+1 \geq 3$ mielivaltainen pariton luku. Määritetään $b = 2k$, $c = 2k+1$ niin, että $(a,\, b,\, c)$ on Pythagoraan kolmikko. On oltava $c^2-b^2 = 4k+1 = a^2 = 4i^2+4i+1$. Tämä saadaan aikaan valitsemalla $k = i^2+i$. Koska $(na,\, nb,\, nc)$ on Pythagoraan kolmikko, jos $(a,\, b,\, c)$ on, niin väite on todistettu kaikille muille luvuille kuin 2:n potensseille. Mutta $(8,\, 15,\, 17)$ on Pythagoraan kolmikko, joten kaikki 2:n potenssit ≥ 8 ovat jonkin Pythagoraan kolmikon pienimpiä jäseniä.

94.9. Koska neliöt ovat $\equiv 0$ tai $\equiv 1 \bmod 3$ ja $2^a \equiv (-1)^a \bmod 3$, niin a:n on oltava parillinen, jotta olisi $2^a+3^b = n^2$. Lisäksi n:n on oltava pariton. Siis $a = 2x$ ja $n = 2y+1$, ja yhtälö on $4^x+3^b = 4y^2+4y+1$. Siis $3^b \equiv (-1)^b \equiv 1 \bmod 4$, joten b on parillinen, $b = 2z$. Siis $4^x = (2y+1)^2-3^{2z} = (2y+1-3^z)(2y+1+3^z)$. Tulon tekijät ovat molemmat parillisia, mutta koska niiden summa on $4y+2$, vain toinen tekijä on jaollinen 4:llä. Täten $2y+1-3^z = 2$ ja $2y+1+3^z = 2^{2x-1}$. Näistä voidaan ratkaista $2\cdot 3^z = 2^{2x-1}-2$ ja $3^z = 4^{x-1}-1$. Koska 4:n parittomat potenssit päättyvät 4:ään ja parilliset 6:een ja 3^z ei voi päättyä viiteen, mutta päättyy 3:een aina, kun $z = 4d+1$, on oltava $x-1 = 2e+1$, $z = 4d+1$ joillain e ja d, $e \geq 0$, $d \geq 0$. Siis $3^{4d+1} = 3\cdot 81^d = 3\cdot(5\cdot 16+1)^d = 4^{2e+1}-1 = 4\cdot 16^e-1$. Jos nyt $d \geq 1$, niin $e \geq 1$, ja tullaan ristiriitaan, koska edellisessä yhtälössä yhtä lukuun ottamatta kaikki termit ovat jaollisia 16:lla. Siis $d = 0$, $e = 0$, $z = 1$, $x = 2$, $b = 2$, $a = 4$, ja ainoa ratkaisu on $2^4+3^2 = 4^2+3^2 = 5^2$.

94.10. Tarkastetaan $2n$-pituisia lukuja, jotka täyttävät tehtävän ehdot. Olkoon a_i tällaisten, i:hin päättyvien lukujen määrä. Symmetrian perusteella $a_1 = a_5$ ja $a_2 = a_4$. Lisäksi $a_3 = 2a_1$ (lukuja, joiden viimeiset numerot ovat 21 ja 23 on yhtä paljon, samoin lukuja, joiden viimeiset numerot ovat 43). $2n + 2$ pituisten lukujen määrä on $2a_1+3a_2++4a_3+3a_4+2a_5 = 4a_1+6a_2+4a_3 = 3(2a_1+2a_2+a_3)+a_3-2a_1 = 3(2a_1+2a_2+a_3)$. Koska 2-pituisia lukuja on 8 (12, 21, 23, 32, 34, 43, 45, 54), saadaan induktiolla, että $2n$-pituisia lukuja on $8 \cdot 3^{n-1}$. Kun $2n = 1994$, $n - 1 = 996$. Kysytty lukumäärä on siis $8 \cdot 3^{996}$.

94.11. Kulmat NAS ja NBS ovat suoria. Siis kolmiot $NA'S$ ja NSA ovat yhdenmuotoidsia. Samoin kolmiot $NB'S$ ja NSB ovat yhdenmuotoisia. Lisäksi kolmiot NSA ja NSB ovat yhtenevät (saadaan toisistaan peilaamalla suorassa WE). Kolmiot $NA'S$ ja $B'NS$ ovat siis yhdenmuotoiset, joten $\dfrac{SA'}{SN} = \dfrac{SN}{SB'}$ eli $SA' \cdot SB' = SN^2$.

94.12. Olkoon $\mathcal{C}$ kolmion $A_1A_2A_3$ ja $\mathcal{C}_1$ kolmion $A_1S_2S_3$ sisään piirretty ympyrä, $\mathcal{C}$:n ja $\mathcal{C}_1$:n säteet olkoot r ja r_1. Olkoon vielä H_1 $\mathcal{C}_1$:n ja S_2S_3:n sivuamispiste. Osoitetaan, että S_1O_1, S_2O_2 ja S_3O_3 ovat kolmion $S_1S_2S_3$ kulmien puolittajat. Tämän todistamiseksi riittää, että osoitetaan, että O_1 on kaarella S_2S_3. Koska kolmio $A_1S_2S_3$ on tasakylkinen, suora A_1H_1 joka tapauksessa puolittaa kaaren S_2S_3 (ja kulkee pisteiden O_1 ja O kautta). Kolmiot $S_2A_1H_1$ ja OS_2H_1 ovat yhdenmuotoisia (suorakulmaisia, ja kulmien $S_2A_1H_1$ ja OS_2H_2 kyljet kohtisuorassa toisiaan vastaan). Piste O_1 on $\mathcal{C}$:llä, jos $OH_1 = r - r_1$. Että näin on, nähdään yhtälöketjusta

$$\frac{r-r_1}{r} = 1-\frac{r_1}{r} = 1-\frac{O_1P_1}{OS_2} = 1-\frac{P_1A_1}{S_2A_1} = \frac{S_2A_1 - P_1A_1}{S_2A_1} = \frac{S_2P_1}{S_2A_1} = \frac{S_2H_1}{S_2A_1} = \frac{OH_1}{OS_2} = \frac{OH_1}{r}.$$

94.13. Olkoon $PQRS$ tehtävässä annetun ominaisuuden omaava neliö. Selvästikin $a > 2$. Olkoon $P'Q'R'S'$ se neliön $PQRS$ sisällä oleva neliö, jonka sivut ovat etäisyydellä 1 $PQRS$:n sivuista ja jonka sivujen pituus on siis $a - 2$. Koska kaikki viisi kiekkoa ovat $PQRS$:n sisällä, niiden keskipisteet ovat $P'Q'R'S'$:ssä. Jaetaan $P'Q'R'S'$ neljäksi yhteneväksi neliöksi; näiden sivujen pituus on $\dfrac{a}{2}-1$. Laatikkoperiaatteen perusteella ainakin kaksi ympyrän keskipistettä on samassa pikkuneliössä. Niiden keskinäinen etäisyys on enintään $\sqrt{2}\left(\dfrac{a}{2}-1\right)$. Tämän etäisyyden on oltava ainakin kaksi, mistä seuraa $a \ge 2 + 2\sqrt{2}$. Toisaalta, jos $a = 2+2\sqrt{2}$, on mahdollista sijoittaa viisi tosiaan peittämätöntä yksikkökiekkoa niin, että niiden keskipisteet ovat $PQRS$:n keskipisteessä ja pisteissä P', Q', R' ja S'.

94.14. Koska kolmiossa pitemmän sivun vastainen kulma on suurempi kuin lyhemmän sivun, pätevät epäyhtälöt $(a - b)(\alpha - \beta) \ge 0$, $(b - c)(\beta - \gamma) \ge 0$ ja $(c - a)(\gamma - \alpha) \ge 0$ eli $a\alpha + b\beta \ge a\beta + b\alpha$, $b\beta + c\gamma \ge b\gamma + c\beta$ ja $c\gamma + a\alpha \ge c\alpha + a\gamma$. Nämä epäyhtälöt ovat yhtäpitäviä epäyhtälöiden

$$\frac{a}{\beta} + \frac{b}{\alpha} \ge \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}, \quad \frac{b}{\gamma} + \frac{c}{\beta} \ge \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}, \quad \text{ja} \quad \frac{c}{\alpha} + \frac{a}{\gamma} \ge \frac{c}{\gamma} + \frac{a}{\alpha}$$

kanssa. Tehtävän väite saadaan, kun edelliset kolme epäyhtälöä lasketaan puolittain yhteen.

94.15. Oletamme, että kolmiossa ABC kaikkien sivujen ja korkeusjanan AH pituudet ovat kokonaislukuja. Kosinilauseesta seuraa, että kolmion kulmien kosinit ovat rationaalisia, ja niin ollen janojen BH ja HC pituudet ovat rationaalilukuja. Mutta ei-kokonaisen rationaaliluvun neliö ei voi olla kokonaisluku, joten BH:n ja HC:n pituudet ovat kokonaislukuja (Pythagoraan lause sovellettuna suorakulmaisiin kolmioihin ABH ja CAH). Mutta nyt joko BH:n ja HC:n pituudet ovat molemmat parillisia tai parittomia, jolloin AB:n ja AC:n pituudet ovat molemmat parillisia tai parittomia, BC:n pituus on parillinen ja kolmion ABC piirin pituus on parillinen; jos taas BH:n ja HC:n pituuksista tasan toinen on pariton, myös AB:n ja AC:n pituuksista tasan toinen on pariton. Tässä tapauksessa BC:n pituus on pariton, ja kolmion ABC piirin pituus on taas parillinen. Piiri ei siis voi olla 1995.

94.16. Riittää, kun osoitetaan, että aina, kun siilien keskipisteet ovat tarpeeksi lähellä toisiaan, siilit koskettavat. Olkoot O ja M kahden siilin keskipisteet ja olkoon $OM < \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. Olkoot A, B ja C O-keskisen siilin piikkien kärjet. Oletetaan, että M on kulmassa AOC. Leikatkoon M:n kautta piirretty AC:n suuntainen suora OA:n ja OC:n pisteissä K ja L ja olkoon X KL:n keskipiste. Nyt

$$\frac{KL}{AC} = \frac{OX}{\frac{1}{2}} \leq \frac{OM}{\frac{1}{2}},$$

josta $KL \leq 2 \cdot OM \cdot AC < 1$. Kolmio OKL jää siten kokonaan M-keskisen 1-säteisen ympyrän sisälle. Ainakin yksi M-keskisen siilin piikki työntyy m:stä kolmioon OKL. Sen on siten leikattava jompi kumpi janoista OK, OL, eli siilit koskettavat toisiaan. Jos siilit eivät kosketa toisiaan, niin n:n siilin tarvitsema pinta-ala on enemmän kuin $\dfrac{n\pi}{12}$. Saarella olevien siilien määrä ei voi olla ääretön.

94.17. Olkoon a_i saarella i olevien kaupunkien määrä, $i = 1, 2, \ldots, 13$. Oletetaan, että joillain i ja j on $a_i \geq a_j > 1$. Saarella j olevasta kaupungista K lähtee $25 - a_j$ lauttayhteyttä. Jos K siirrettäisiin saarelle i, K:stä lähtisi $25 - (a_i + 1) < 25 - a_j$ yhteyttä, ja kaikki muut yhteydet säilyisivät ennallaan. Pienin yhteyksien määrä saavutetaan tilanteessa, jossa yhdellä saarella on 13 kaupunkia ja muilla 12 saarella yksi kaupunki kullakin. Tällöin yhteyksiä on $13 \cdot 12 + \binom{12}{11} = 222$ kappaletta.

94.18. Oletetaan, että numerointi on suoritettu vaaditulla tavalla. Jos jossain pisteessä on numero 1, kyseisen pisteen kautta kulkevilla kahdella suoralla ei voi olla toista ykköstä. Jokainen ykkönen merkitsee siten kaksi suoraa. Ykkösellä merkittyjä leikkauspisteitä on näin ollen $\dfrac{n}{2}$ kappaletta, eli n on parillinen. Olkoot suorat l_1, l_2,..., l_n. Kirjoitetaan suorien nimet seuraavaan taulukkoon:

$$\begin{array}{cccccc} & & l_3 & l_4 & \ldots & l_{n/2+1} \\ l_1 & l_2 & & & & \\ & & l_n & l_{n-1} & \ldots & l_{n/2+2} \end{array}$$

ja kierretään taulukon oikeaa laitaa $n-1$ kertaa "myötäpäivään":

$$\begin{array}{cccccc} & & l_2 & l_3 & \dots & l_{n/2} \\ l_1 & l_n & & & & \\ & & l_{n-1} & l_{n-2} & \dots & l_{n/2+1} \end{array},$$

$$\begin{array}{cccccc} & & l_n & l_2 & \dots & l_{n/2-1} \\ l_1 & l_{n-1} & & & & \\ & & l_{n-2} & l_{n-3} & \dots & l_{n/2} \end{array}$$

jne. Taulukot antavat n eri tapaa liittää suorat pareittain toisiinsa: l_1 ja sen oikealla puolella oleva suora ja allekkain olevat suorat. Numeroidaan nyt suorien leikkauspisteet niin, että i:nnen taulukon mukaisesti yhdistettyjen suorien leikkauspisteisiin kirjoitetaan luku i.

94.19. Vakoojat olkoot $V_1, V_2, \dots, V_{16}$. Olkoon a_i niiden vakoojien luku, jotka vakoilevat V_i:tä, b_i niiden vakoojien luku, joita V_i vakoilee, ja $c_i = 15 - (a_i + b_i)$ V_i:hin neutraalisti suhtautuvien vakoilijoiden luku. Jos V_i:n lisäksi otetaan yhdeksän muuta vakoojaa, niin tässä joukossa on oltava ainakin yksi, jota V_j vakoilee. Siis $a_i+c_i \le 8$. Samoin joukossa on oltava ainakin yksi, joka vakoilee V_i:tä. Siis $b_i+c_i \le 8$. Koska siis $a_i+b_i+2c_i \le 16$, on oltava $c_i \le 1$. Oletetaan sitten, että on olemassa 11 vakoilijaa, joita ei voi numeroida tehtävässä ehdotetulla tavalla. Olkoon V niistä yksi ja muut $U_1, U_2, \dots, U_{10}$; niin numeroituina, että U_i vakoilee U_{i+1}:tä ja U_{10} U_1:tä (näin voitiin tehdä oletuksen perusteella). Oletetaan, että yksikään U_j ei ole neutraali V:n suhteen. Jokin U_j, esim. U_1 vakoilee V:tä. Silloin V ei voi vakoilla U_2:ta, koska muuten syntyisi 11:n peräkkäisvakoilijan ketju. Siis U_2 vakoilee V:tä. Päättelyä jatkaen saadaan, että jokainen U_j vakoilee V:tä. Tämä on edellä sanotun nojalla mahdotonta. Siis vakoilijoiden U_j joukossa on tasan yksi V:hen neutraalisti suhtautuva. Mutta "suhtautua neutraalisti" on vastavuoroinen relaatio; on mahdotonta, että paritonalkioisessa joukossa jokaisella alkiolla on yksi ja vain yksi pari. Ristiriita: siis 11 vakooja voidaan aina numeroida samoin kuin kymmenenkin.

94.20. Ajatellaan, että ison kolmion ABC sivu AB on vaakasuora ja että käytettävät värit ovat punainen, sininen ja keltainen. Oletetaan, että tehtävän väite ei ole tosi. Sivulla AB on 3001 pikkukolmion kärkeä $A = A_0, A_1, \dots, A_{300} = B$. Ainakin 1001 niistä on samaa väriä, sanokaamme punaisia. Olkoon B_{kn} se kärki, jolla kolmio $B_{kn}A_kA_n$ on tasasivuinen. Oletuksemme mukaan B_{kn} ei ole punainen, jos A_k ja $A : n$ ovat. Koska jokaista punaisten kärkien paria A_k, A_n kohden kärki B_{kn} on eri piste, niin näitä kärkiä B_{kn} on ainakin $\binom{1001}{2} > 500\,000$ kappaletta. Koska kaikki kärjet ovat 3000:lla vaakasuoralla, ainakin yksi tällainen suora sisältää yli 160 kärkeä B_{kn}. Koska kaikki kärjet B_{kn} ovat muuta väriä kuin punaisia, ainakin 81 samalla suoralla olevaa kärkeä on samaa väriä, sanokaamme sinisiä. Samalla suoralla olevat siniset kärjet B_{kn} ja B_{lm} määrittävät kärjen C_{knlm}, joka on kyseisten kärkien yläpuolella, joka ei ole sininen, ja jolle kolmio $C_{knlm}B_{kn}B_{lm}$ on tasasivuinen. Mutta $C_{knlm}A_kA_m$ on myös tasasivuinen; tässä A_k on kärjen B_{kn} määräävistä alimman sivun kärjistä toinen ja A_m pisteen B_{lm} määräävistä pisteistä toinen. Siis C_{knlm} ei ole punainenkaan, vaan sen on oltava keltainen. Nyt kärkiä C_{knlm} on ainakin $\binom{81}{2} > 3200$, joten ainakin kaksi niistä on samalla vaakasuoralla. Mutta nämä kaksi määrittävät edellä esitettyyn tapaan kärjen D, joka ei ole keltainen, ei sininen eikä punainen. Ristiriita, siis vastaoletus on väärä.

95.1. Todetaan ensin, että parittomat x:n arvot eivät voi olla ratkaisuja, mutta $x = 2$ antaa ratkaisun $y = 1$, $z = 1$. Olkoon $y + z = 2a$. Silloin $y^6 + z^6 = (a + t)^6 + (a - t)^6 = 2a^6 + 30a^4t^2 + 30a^2t^4 + 2t^6 \geq 2a^6$. Jos $x \geq 4$, niin $y^6 + z^6 \geq 2\left(\frac{x^2}{4}\right)^6 \geq 2x^6 > x^6$, ja toinen yhtälö ei toteudu. Ainoa ratkaisu on $(x, y, z) = (2, 1, 1)$.

95.2. Olkoon $(a-1)a(a+1) = a(a^2-1) = p(a^2+k)$. Jos olisi $p \geq a$, niin $a^2 - 1 \geq a^2 + k$, mikä on mahdotonta, koska k on positiivinen. Oletetaan sitten, että $p \leq a - 1$. Silloin $(a-1)(a^2+a) = (a^2+k)p \leq (a-1)(a^2+k)$. Epäyhtälö toteutuu, jos $a = 1$ tai jos $a \leq k$. Jos $a = 1$, niin $k \geq 1 = a$.

95.3. a, b ja c ovat Pythagoraan lukuja, ja ovat siis muotoa $a = (m^2 - n^2)p$, $b = 2mnp$ ja $c = (m^2 + n^2)p$; lisäksi $p = 1$. Siis $b + c = 2mn + m^2 + n^2 = (m + n)^2$.

95.4. Olkoon Johnin ikä $10x+y$, missä x ja y ovat 0:n ja 9:n välissä olevia kokonaislukuja. Koska Maryn ikä on $10y+x$ ja Mary on nuorempi, on $x \geq y$; ei voi olla $x = y$, koska tällöin John ja Mary olisivat samanikäiset. Lisäksi $(10x + y)^2 - (10y + x)^2 = 99(x^2 - y^2) = n^2$ jollakin kokonaisluvulla n. On oltava $n = 33k$ ja $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 11k^2$. Koska $1 \leq x - y \leq 8$ ja $1 \leq x + y \leq 17$, on oltava $x + y = 11$. Tällöin $x - y$ on pariton kokonaisluvun neliö, joten $x - y = 1$. On siis oltava $x = 6$, $y = 5$. Kokeilemalla nähdään, että 65 ja 56 todella täyttävät tehtävän ehdot.

95.5. Tarkastellaan kokonaislukuja välillä $I = [t + 1, t + 2c]$. Tällä välillä on varmasti kolme lukua $x = n_a a$, $y = n_b b$ ja $z = n_c c$. Jos $x \neq y \neq z \neq x$, xyz on kysyttyä tyyppiä oleva luku. Jos $x = y = z$, niin joko $x-a = (n_a-1)a$ ja $z-b = (n_b-1)b$ tai $x+a = (n_a+1)a$ ja $x+b = (n_b+1)b$ kuuluvat väliin I, ja jokin luvuista $(x\pm a)(x\pm b)x$ on kysyttyä tyyppiä. Oletetaan sitten, että $x = y \neq z$, ja että x ei ole jaollinen c:llä. Luvuista $x \pm a$ ainakin toinen kuuluu väliin I. Jos tämä luku on sama kuin z, niin luvuista $y \pm b$ kumpikaan ei ole z. Jokin luvuista $(x\pm a)yz$, $x(y\pm b)z$ on silloin haluttua muotoa. Olkoon sitten $x \neq y = z$. Jos luvuista $y \pm b$ ainakin toinen kuuluu väliin I. Jos tämä luku ei ole x, niin $x(y \pm b)z$ on haluttua muotoa. Jos se on x, niin x on b:llä jaollinen, mutta $x \pm a \neq z$; muotoa $(x \pm a)xz$ oleva luku on vaadittu. Täsmälleen samoin päätellään, jos $x = z \neq y$.

95.6. Käytetään hyväksi tietoa, että positiivisten lukujen harmoninen keskiarvo on enintään yhtä suuri kuin aritmeettinen keskiarvo:

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Siis:

$$\frac{a+c}{a+b} + \frac{b+d}{b+c} + \frac{c+a}{c+d} + \frac{d+b}{d+a}$$

$$= (a+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+d}\right) + (b+d)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{d+a}\right) \geq (a+c)\cdot\frac{4}{a+b+c+d} + (b+d)\cdot\frac{4}{b+c+d+a} = 4.$$

95.7. [Ellei muista, että $\cos 36° = \sin 54° = \dfrac{1}{4}(1+\sqrt{5})$, voi piirtää a-sivuisen säännöllisen viisikulmion $ABCDE$ ja pisteessä F leikkaavat lävistäjät AC ja BD, todeta kulmien BAC, BCA ja CBF olevan 36°, kulman CBA 108° ja kulmien ABF ja BFA 72°. Näin ollen $AF = a$ ja jos $FC = b$, niin yhdenmuotoisista kolmioista ABC ja CFB sekä sinilauseesta saadaan

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{\sin 108°}{\sin 36°} = \frac{\sin 72°}{\sin 36°} = 2\cos 36°.$$

Siis $x = 2\cos 36°$ toteuttaa yhtälön

$$\frac{1}{x} + 1 = x,$$

jonka ratkaisu on $x = \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.] Kaksinkertaisen kulman kosinin kaavasta saadaan suoraan $\sin^2 18° = \dfrac{1}{8}(3-\sqrt{5})$. Todennettavaksi jää relaatio

$$\frac{1}{8}(3-\sqrt{5})\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}+1\right) = \frac{1}{8}$$

eli

$$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}+1 = \frac{1}{3-\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$$

eli

$$\frac{3-\sqrt{5}}{8} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2.$$

Tämä osoittautuu todeksi, joten haluttu kahden positiivisen luvun yhtäsuuruus on sekin voimassa.

95.8. Voidaan olettaa, että $|a| \ge |b|$ ja $|a| \ge |c|$. Oletetaan, että $a > 0$. Koska $|a+b| \le |c| \le |a|$, niin $b \le 0$. Samoin nähdään, että $c \le 0$. Kun alkuperäisistä yhtälöistä poistetaan itseisarvomerkit, kaksi ensimmäistä niistä saa muodot $a \ge -b-c$, $-b \ge a+c$ eli $a+b+c \ge 0$ ja $a+b+c \le 0$. Siis $a+b+c = 0$. Oletetaan sitten, että $a < 0$. Samoin kuin edellä päätellään, että b ja c ovat positiivisia. Kaksi ensimäistä epäyhtälöä saa nyt muodon $-a \ge b+c$ ja $b \ge -a-c$ eli $a+b+c \le 0$ ja $a+b+c \ge 0$. Siis $a+b+c = 0$. Jos $a = 0$, niin $b = c = 0$, ja $a+b+c = 0$.

95.9. Todistettavan identiteetin vasen puoli on

$$\sum_{k=1}^{1996}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1996-k}{k+1} = \sum_{k=1}^{1996}(-1)^{k+1}\left(\frac{1997}{k+1}-1\right) = 1997\cdot\sum_{k=1}^{1996}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{k+1}$$
$$= 1997\cdot\sum_{k=1}^{1996}(-1)^{k}\cdot\frac{1}{k} + 1996.$$

Oikea puoli taas on

$$\sum_{k=1}^{998}\frac{2k-1}{998+k}=\sum_{k=1}^{998}\left(\frac{2k+1996}{998+k}-\frac{1997}{998+k}\right)=1996-1997\cdot\sum_{k=1}^{998}\frac{1}{k+998}.$$

Oikean ja vasemman puolen samuus seuraa nyt havainnosta

$$\sum_{k=1}^{1996}(-1)^{k-1}\cdot\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{1996}\frac{1}{k}-2\cdot\sum_{k=1}^{998}\frac{1}{2k}=\sum_{k=1}^{998}\frac{1}{k+998}.$$

95.10. Osoitetaan, että $f(x)\neq 0$ kaikilla $x\neq 0$. Jos olisi $f(x)=0$, niin $x\neq 1$ ja $f(1)=(x+1-x)f(x+1-x)=x(1-x)f(x)f(1-x)=0$, toisin kuin ehto (a) määrää. Ehdon (b) perusteella

$$f(x)=f\left(\frac{1}{\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2x}}\right)=f(2x)+f(2x)=2f(2x),$$

niin $f(2x)=\dfrac{1}{2}f(x)$ kaikilla $x\neq 0$. Ehdosta (c) saadaan $2xf(2x)=x^2f(x)^2$ eli $xf(x)=x^2f(x)^2$. Koska $f(x)\neq 0$, on oltava $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Helppo tarkistus osoittaa, etä $f(x)=\dfrac{1}{x}$ todella täyttää ehdot (a), (b) ja (c).

95.11. Sijoitetaan luku yksi mihin hyvänsä kolmesta joukosta. Tämän jälkeen jokainen seuraava luku voidaan sijoittaa jompaan kumpaan kahdesta muusta joukosta kuin mihin edellinen luku sijoitettiin. Sijoitusmahdollisuuksia on siis $3\cdot 2^{1994}$. Koska joukkojen järjestyksellä ei ole väliä, eri tapoja jakaa annettu joukko kolmeksi osajoukoksi, joista yhdessäkään ei ole peräkkäisiä lukuja, on $\dfrac{1}{3!}\cdot 3\cdot 2^{1994}=2^{1993}$. Nyt on kuitenkin laskettu mukaan tapaus, jossa yksi osajoukoista on tyhjä (kaksi ei voi olla tyhjää; jos yksi osajoukko on tyhjä kaksi muuta ovat pelkästään parittomien lukujen joukko ja pelkästään parillisten lukujen joukko). Kysyttyjä tapoja on siis $2^{1993}-1$.

95.12. Alkuaan laatikossa, jossa on eniten palloja, on enintään 19 palloa enemmän kuin laatikossa, jossa on vähiten palloja. Koska $95=6\cdot 16-1$, voidaan 16 6:n pallon sijoitusta järjestää niin, että laatikkoon, jossa ei ole maksimimäärää palloja tulee sijoitetuksi kaksi palloa ja muihin laatikoihin vain yksi. Toistamalla kierros enintään $19\cdot 94$ kertaa saadaan ”kaikki kuopat täytetyiksi”.

95.13. Todistetaan ensin, että olipa pöydällä mikä määrä kiviä tahansa, niin jommalla kummalla pelaajalla on voittostrategia. Jos kivien määrä on 1, aloittajalla on voittostrategia, jos kiviä on 2, toisella pelaajalla on voittostrategia. Oletetaan, että väite on tosi, kun kiviä on enintään k kappaletta. Olkoon pöydällä $k+1$ kiveä. Jos jossakin sellaisessa tilanteessa, jossa aloitettaessa $k+1-m^2$ kivestä on toisella pelaajalla voittostrategia, niin aloittaja voittaa nostamalla ensin m^2 kiveä. Jos kaikissa $k+1-m^2$:n kiven alkutilanteissa aloittajalla on voittostrategia, niin toisella pelaajalla on voittostrategia $k + 1$:n kiven tilanteessa. Oletetaan sitten, että olisi vain äärellinen määrä alkutilanteita, joissa toisella pelaajalla on voittostrategia. Olkoon n suurin näihin tilanteisiin liittyvä kivien määrä. Kun kiviä on $n^2 + n + 1 < (n + 1)^2$, niin aloittaja voi ottaa ensi siirrollaan enintään n^2 kiveä, jolloin toinen pelaaja voisi tehdä ensimmäisen siirtonsa tilanteesta, johon liittyy aloittajan voittostrategia. Näin ollen $n^2 + n + 1$ olisi myös toisen pelaajan voittostrategian mukainen tilanne, vastoin oletusta n:n maksimaalisuudesta.

95.14. Pikkukolmiot voidaan varustaa kahdeksalla erilaisella nimilapulla, esim. A_0, B_0, C_0, D_0, A_1, B_1, C_1 ja D_1 seuraavasti. Nimetään mielivaltainen pikkukolmio kolmioksi A_0. Nimetään pikkukolmiot, joilla on yhteinen sivu A_0:n kanssa kolmioiksi B_0, C_0 ja D_0. Nimetään tämän jälkeen jokainen pikkukolmio, jolla on yhteinen kärki kolmion x_i kanssa kolmioksi x_{1-i}, $x = A, B, C, D$. Jatkamalla prosessia saadaan kaikki tason pikkukolmiot nimettyä. Kirpun hyppy kolmiosta x_i tapahtuu aina kolmioon x_{i-1}, kirput, jotka ovat kolmioissa x_i ja y_j, $x \neq y$, eivät voi päästä samaan ruutuun. Koska kaikki kirput hyppäävät samaan aikaan, eivät kirput, jotka ovat kolmioissa x_0 ja x_1 voi päästä samaan pikkukolmioon. Toisaalta x_i-nimisissä kolmioissa olevat kirput voivat kaikki päästä mihin tahansa x_i-kolmioon. "Aikaisemmin perille tulleet" voivat hyppiä edestakaisin ruudun ja sen naapuriruudun välillä sillä aikaa kun kaukaisempi kirppu on vielä tulossa. Jos kolmion n^2:sta ruudusta ainakin n on varustettu samalla nimilapulla, tehtävä ratkeaa. Jos $n \geq 8$, näin on varmasti laita. Käymällä läpi muut tapaukset nähdään, että suotuisa asetelma löytyy aina, kun $n \neq 2$ ja $n \neq 4$.

95.15. Numeroidaan ensin sivujen keskipisteet myötäpäivään numeroin $1, 2, \ldots, 2n + 1$. Liitetään sitten numeroin 1 ja 2 numeroitujen sivujen yhteiseen kärkeen $4n+2$ ja sen jälkeen myötäpäivään $4n + 1$, $4n$, $\ldots$, $2n + 2$ joka toiseen kärkeen. Täten, jos sivun keskipisteen numero on $2k+1$, sen (myötäpäivään) päätepisteessä on luku $4n+2-k$, ja jos sivun numero on $2k$, sen vastaavassa päätepisteessä on $3n + 2 - k$. Jokaiseen janaan liittyvien kolmen luvun summa on $2k+1+4n+2-k+3n+2-k = 7n+5$ tai $2k+3n+2-k+4n+2-(k-1) = 7n + 5$.

95.16. Tunnetun lauseen mukaan kolmion kulman vieruskulman puolittaja jakaa vastaisen sivun ulkopuolisesti viereisten sivujen suhteessa. Olkoon F suoran AB ja kulman ACB vieruskulman puolittajan leikkauspiste. Silloin

$$\frac{AF}{AB} = \frac{7}{4}.$$

Merkitään $AO = x$, $BF = y$, $EC = z$. Näillä merkinnöillä

$$\frac{7}{z} = \frac{2x + y}{x + y} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{y}{x}}$$

ja

$$\frac{7}{4} = \frac{2x + y}{y} = 1 + 2\frac{x}{y}.$$

Kun jälkimmäisestä yhtälöstä ratkaistu

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{8}$$

sijoitetaan edelliseen yhtälöön, voidaan helposti ratkaista $z = \frac{11}{2}$.

95.17. Piirretään kolmion ABC kärkien kautta sivujen suuntaiset suorat, jotka leikkaavat pisteissä A', B' ja C'. Silloin $AA' = 2m_A$, $BB' = 2m_b$ ja $CC' = 2m_C$. Voidaan olettaa, että $h_A = \max\{h_A,\, h_B,\, h_C\}$. Koska h_A on suorien BC ja $B'C'$ etäisyys, on $2m_B \geq h_A$ ja $2m_C \geq h_A$. Varmasti $2m_A > m_A \geq h_A$. Luvuksi α kelpaa siis 2. Mikään $\alpha < 2$ ei tule kysymykseen; tämä nähdään tarkastelemalla tasakylkisiä kolmioita ABC, joille $BC = 2$ ja $\angle ABC = \angle ACB = x$. Tällaisen kolmion suurin korkeusjana on $2\sin x$ ja pienin mediaani $\tan x$; näiden suhde on $2\cos x$, joka tarpeeksi pienillä x:n arvolla suurempi mitä hyvänsä lukua $\alpha < 2$.

95.18. Jana BC halkaisijana piirretty ympyrä kulkee pisteiden Q ja H kautta. Kehäkulmalauseen perusteella $\angle CHQ = \angle CBQ$. Jana AB halkaisijana piirretty ympyrä kulkee pisteiden P ja H kautta. $\angle CHP = 180^\circ - (180^\circ - \angle PBA) = \angle PBA = \angle CBQ$. Piste M on siis kolmion PQH kulman PHQ puolittajalla. Olkoon D M:n kohtisuora projektio BQ:lla. Koska MD puolittaa AC:n, se puolittaa myös PQ:n. Siis M on janan PQ keskinormaalilla. Kolmion QHP ympäri piirretyn ympyrän kaaren PQ keskipiste on myös kulman PHQ puolittajalla ja jänteen PQ keskinormaalilla. Kyseinen piste on siis M. Näin ollen M on samalla ympyrällä kuin P, Q ja H.

95.19. Jos ympyrä C_2 vierii pitkin ympyrän C_1 sisäpuolta vastapäivään, niin avaruuslentäjä kiertää myötäpäivään. Avataan ympyrä C_1 $2n\pi R$-pituiseksi janaksi. Jos ympyrä C_2 vierii tätä janaa pitkin, se tekee kaikkiaan $\frac{n}{2}$ kierrosta. Jokaisella C_2:n puolikerroksella C_3 tekee täyden kierroksen. Täten, jos C_2 vierisi pitkin janaa, se avaruuslentäjä kiertäisi n kierrosta myötäpäivään. Mutta koska C_1 on ympyrä ja C_2 vierii vastapäivään, tulee avaruuslentäjä tehneeksi vain $n-1$ kierrosta myötäpäivään.

95.20. Viisikulmion $ABCDE$ viiden kärjen joukossa on ainakin kaksi, joiden sekä x- että y- koordinaattien erotus on parillinen. Näitä kärkiä yhdistävän janan keskipisteen M molemmat koordinaatit ovat kokonaislukuja. Kaksi mahdollisuutta: M on viisikulmion sisäpiste (koska viisikulmio on kupera) tai viisikulmion sivun keskipiste. Edellisessä tapauksessa M on viiden sellaisen kolmion yhteinen kärki, joiden kaikki kärjet ovat kokonaislukukoordinaattisia. Kunkin tällaisen kolmion ala on vähintään $\frac{1}{2}$, joten kolmioiden yhteenlaskettu ala on ainakin $\frac{5}{2}$. (Mainitut alat ovat $\geq \frac{1}{2}$ siksi, että kolmion, jonka kaikki kärkipisteet ovat kokonaislukukoordinaattisia, ala saadaan vähentämällä koordinaattiakselien suuntaisen suorakulmion alasta sellaisten suorakulmaisten kolmioiden, joiden kateetit ovat koordinaattiakselien suuntaisia, aloja. Nämä alat ovat muotoa a tai $a + \frac{1}{2}$, missä a on kokonaisluku.) Jos M on viisikulmion erään sivun, esim. sivun AB keskipiste. Koska viisikulmio on kupera, AB on korkeintaan toisen sivuista CD, DE suuntainen. Oletetaan, että AB ja DE ovat erisuuntaiset. Silloin kolmioilla DEA, DEM ja DEB on kaikilla eri alat (sama kanta, eri korkeudet). Suurin kolmioista on silloin alaltaan ainakin $\frac{3}{2}$. Koska viisikulmio koostuu tämän kolmion lisäksi kahdesta kolmiosta, joilla kummallakin on ala ainakin $\frac{1}{2}$, viisikulmion ala on ainakin $\frac{5}{2}$.

96.1. Säännöllisen 1996-kulmion kärjestä A kahteen vierekkäiseen kärkeen B ja C piirrettyjen lävistäjien välinen kulma on puolet kaarta BC vastaavasta keskuskulmasta eli $\phi = \frac{\pi}{1996}$. Kahden kärjestä A piirretyn lävistäjän välinen kulma on siten $k\phi$ jollakin k. Jos lävistäjien AB ja CD määräämät suorat leikkaavat pisteessä P ympyrän sisällä, niin $\angle APC = \angle BAD + \angle CDA = k\phi + m\phi$. Jos suorat leikkaavat ympyrän ulkopuolella niin, että (esimerkiksi) A ja C ovat lähempänä leikkauspistettä P, niin $\angle APC = \angle BCD - \angle ABC = n\phi - p\phi$. Kaikissa tapauksissa lävistäjien väliset kulmat ovat ϕ:n monikertoja, joten niiden suhde on rationaaliluku.

96.2. Olkoot janojen AP ja BP pituudet $2r$ ja $2s$. Silloin $39\pi = \frac{\pi}{2}((r+s)^2 - r^2 - s^2 - 9\pi$. Tästä ratkaistaan $rs = 48$. Olkoon M AB:n keskipiste, N PB:n keskipiste, O ympyrän C keskipiste ja F pisteen O kohtisuora projektio janalla AB. Ympyrän C säde on 3. Täten $|MO| = r + s - 3$, $|MF| = |MP| + 3 = r - s + 3$, $|FN| = s - 3$ ja $|ON| = s + 3$. Suorakulmaisista kolmioista MFO ja NFO saadaan $(r+s-3)^2 - (r-s+3)^2 = |OF|^2 = (s+3)^2 - (s-3)^2$. Tämä sievenee muotoon $r(s-3) = 3s$ eli $3(r+s) = rs = 48$. Siis $|AB| = 2(r+s) = 32$.

96.3. Piste Q on yhtä etäällä B:stä ja C:stä eli janan BC keskinormaalilla n. Toisaalta Q on D-keskisellä A:n kautta kulkevalla ympyrällä y. Q on siis jompi kumpi y:n ja s:n kahdesta leikkauspisteestä Q_1 (neliön sisällä) ja Q_2 (neliön ulkopuolella). Lisäksi $QP = QC$, joten riittää, kun määritetään janan QC pituus. Koska Q_1 on s:lä, $Q_1A = Q_1D$; lisäksi $Q_1D = AD = 1$. Kolmio AQ_1D on tasasivuinen, joten $\angle Q_1DC = 30°$. Siten $|Q_1C| = 2\sin 15°$. Lisäksi $\sin 15° = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$, joten $|Q_1C| = \sqrt{2-\sqrt{3}}$. Kehäkulma $\angle Q_1Q_2C$ ja keskuskulma Q_1DC vastaavat samaa y:n kaarta. Siis $\angle Q_1Q_2C = 15°$. Suorakulmaisesta kolmiosta, jonka kärjet ovat C, Q_2 ja BC:n keskipiste, saadaan $|Q_2C| = \frac{1}{2\sin 15°} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

96.4. Oletetaan, että $AD < BC$. Olkoon O suorien AB ja CD leikkauspiste. Tehtävässä mainittu kulmien maksimaalisuus merkitsee, että pisteiden A, Q ja B kautta piirretty ympyrä sivuaa suoraa OC ja pisteiden D, P ja C kautta piirretty ympyrä sivuaa suoraa OB. Peilataan kuvio kulman AOD puolittajassa ℓ. Pisteiden D ja C peilikuvat suoralla OB ovat D' ja C' ja pisteen P peilikuva suoralla OC on P'. Koska $OD' : OC' = OD : OC = OA : OB$, homotetia, jonka keskus on O ja kerroin $\frac{OA}{OD'}$ kuvaa janan $D'C'$ janalle AB. Ympyrä $D'C'P'$ kuvautuu ympyrälle ABQ ja $\angle CPD = \angle C'P'D' = \angle BQA$.

96.5. Tarkastetaan ensin mielivaltaista kolmiota ABC, jonka sivut ovat a, b ja c ja sisään- ja ynpäri piirrettyjen ympyröiden säteet ovat r ja R. Silloin pätee $\cos A + \cos B + \cos C =$

$1 + \dfrac{r}{R}$. Kosinilauseen nojalla yhtälön vasen puoli on nimittäin

$$\begin{aligned}
&\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2bc}\\
&= \frac{ab^2+ac^2+bc^2+a^2b+a^2c+b^2c-a^3-b^3-c^3}{2abc}\\
&= \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{2abc} + 1.
\end{aligned}$$

Merkitään vielä kolmion alaa T:llä ja piirin puolikasta p:llä. Silloin $pr = T = \dfrac{1}{2}bc\sin A$, ja koska $2R = \dfrac{a}{\sin A}$, saadaan

$$\frac{r}{R} = \frac{4T^2}{pabc} = \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{2abc}.$$

Siirrytään nyt nelikulmioon. Kaikilla neljällä kolmiolla on sama ympäripiirretyn ympyrän säde R. Jos kaarien AB, BC, CD ja DA suuruudet ovat 2α, 2β, 2γ ja 2δ, niin edellä sanotun perusteella $r_a = (\cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha+\delta) - 1)R$ ja $r_c = (\cos\alpha + \cos\delta + \cos(\beta + \delta) - 1)R$. Mutta koska $\alpha + \delta = 180^\circ - (\beta + \gamma)$, niin $\cos(\alpha + \beta) = -\cos(\gamma + \delta)$, ja $r_a + r_c = (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta - 2)R$. Mutta aivan samoin saadaan $r_b + r_d = (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta - 2)R$.

96.6. Ratkaisija *Matti Tuomi* Pirkkalasta. Koska $ab = cd$, niin $\dfrac{a}{c} = \dfrac{d}{b}$. Jos tässä yhtälössä esiintyvä murtoluku on supistetussa muodossa $\dfrac{x}{y}$, niin $a = kx$, $c = ky$, $d = rx$, $b = ry$, $k \ge 1$, $r \ge 1$. Mutta silloin $a+b+c+d = kx+ry+ky+rx = k(x+y)+r(x+y) = (k+r)(x+y)$. Tämän tulon kumpikaan tekijä ei ole 1, joten $a+b+c+d$ ei ole alkuluku.

96.7. Jonon alkupään luvut ovat 1, 2, 7, 29, 22, 23, 49, 26. Modulo 6 jono alkaa siis 1, 2, 1, 5, 4, 5, 1, 2. Se, mitä a_{n+2} on modulo 6, riippuu vain siitä, mitä a_{n+1} ja a_n ovat modulo 6. Näin ollen jono on jaksollinen modulo 6, eikä yksikään jonon luvuista ole 6:lla jaollinen. Erityisesti yksikään luvuista ei voi olla 0.

96.8. Osoitetaan induktiolla, että jonossa (x_n) kahden peräkkäisen termin x_k, x_{k+1} suurin yhteinen tekijä $(x_k,\, x_{k+1})$ on 19. Koska $x_2 = 95 = 5\cdot 19$, $(x_1,\, x_2) = 19$. Oletetaan sitten, että $x_k = 19a$ ja $x_{k+1} = 19b$, missä $(a,\, b) = 1$. x_k:n ja x_{k+1}:n pienin yhteinen monikerta on tällöin $19ab$, ja $x_{k+2} = 19ab + 19a = 19a(b+1)$. Koska luvuilla a ja b sekä $b+1$ ja b ei ole yhteisiä tekijöitä, $(x_{k+1},\, x_{k+2}) = (19b,\, 19a(b+1)) = 19$. Tehtävän vastaus on siis 19.

96.9. Rakennetaan joukko A seuraavasti. Olkoon $m = \dbinom{n}{k-1}$ n-alkioisen joukon $k-1$-alkioisten osajoukkojen lukumäärä. Tarkastellaan eri alkulukuja p_1, p_2, $\ldots$, p_m. Liitetään jokainen näistä luvuista p_j yhteen ja vain yhteen joukon $S = \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$ osajoukkoon S_j. Olkoon $b = p_1p_2\cdots p_m$. Olkoon nyt a_k kaikkien niiden p_j-lukujen tulo, joille k ei kuulu joukkoon S_j. Todetaan, että näin konstruoitu $A = \{a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n\}$ toteuttaa tehtävän ehdot. Valitaan $k-1$ eri lukua a_{i_1}, a_{i_2}, …, $a_{i_{k-1}}$. Olkoon $\{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}\} = S_j$. Tähän joukkoon liittyvä p_j ei konstruktion mukaan ole tekijänä yhdessäkään luvuista a_{i_l}, mutta kyllä luvussa b; b ei voi olla tulon $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{k-1}}$ tekijä. Olkoon sitten $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}$ mielivaltainen k-alkioinen A:n osajoukko. Lukuja a_i, joissa mielivaltainen p_j ei ole tekijänä, on $k-1$ kappaletta, joten jokainen p_j on tekijänä ainakin yhdessä tulon $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}$ tekijässä. Siten myös b on tämän tulon tekijä. Jos $i_1 \neq i_2$, on olemassa joukko S_j niin, että $i_1 \in S_j$, mutta $i_2 \notin S_j$. Tästä seuraa, että p_j on a_{i_2}:n tekijä, mutta ei ole a_{i_1}:n tekijä. Siten a_{i_1} ei ole a_{i_2}:n tekijä.

96.10. Tehtävän luku n on kakkosen potenssi: jos olisi $n = mp$, missä p on pariton alkuluku, niin $a^n + 1 = (a^m)^p + 1^p$ olisi jaollinen luvulla $a^m + 1$ ja olisi siis yhdistetty luku. Osoitetaan induktiolla, että $d\left(a^{2^k} - 1\right) \geq 2^k$. Asia on selvä, jos $k = 0$. Oletetaan, että $d\left(a^{2^k} - 1\right) \geq 2^k$. Havaitaan, että $a^{2^{k+1}} - 1 = (a^{2^k} - 1)(a^{2^k} + 1)$. Mielivaltaiselle luvun $a^{2^k} - 1$ tekijälle q sekä q että $q(a^{2^k} + 1)$ ovat $a^{2^{k+1}} - 1$:n tekijöitä. Jokainen $q(a^{2^k} + 1)$ on suurempi kuin $a^{2^k} - 1$. Näin ollen $d(a^{2^{k+1}} - 1) \geq 2d(a^{2^k} - 1) \geq 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.

96.11. Jokin luvuista x_i on pienin; voidaan olettaa, että se on x_1. Nyt $W(x) = (x - x_1)^2$ on toisen asteen polynomi, joka on aidosti kasvava, kun $x \geq x_1$. Tämä merkitsee, että jos $W(x_i) = W(x_j) = W(x_k)$, niin $x_i = x_j = x_k$.

96.12. Polynomin $P(x) = 1996x + 1996$ juuri on -1. Siis $-1 \in S$. Polynomin $Q(x) = 1996 - x - x^2 - \ldots - x^{1996}$ eräs juuri on 1; siis $1 \in S$. Jos $R(x) = -x^{10} + x^9 - x^8 + x^7 - x^6 + x^3 - x^2 + 1996$, niin $R(-2) = 0$. Siis $-2 \in S$.

96.13. a) Jos f on parillinen funktio, niin kaikilla $x \in \mathbb{Z}$ saadaan $f(x) = f(-x) = f((-x)^2 - x + 1) = f(x^2 - x + 1) = f((x-1)^2 + x) = f((x-1)^2 + (x-1) + 1) = f(x-1)$. Tämä on mahdollista vain, jos f on vakio; toisaalta on ilmeistä, että kaikki vakiofunktiot toteuttavat funktionaaliyhtälön. b) Jos f on pariton, niin sama päättely kuin edellä antaa kaikilla $x \in \mathbb{Z}$ $f(x) = -f(x-1) = f(1-x)$. Koska f on pariton, $f(0) = -f(0) = 0$. Edelleen $f(1) = f(1-1) = f(0) = 0$. Oletetaan, että $f(k) = 0$, $k \geq 0$. Silloin $f(k+1) = f(1-(k+1)) = f(-k) = -f(k) = 0$. Induktioperiaatteen nojalla $f(k) = 0$ kaikilla $k \geq 0$. Luonnollisesti $f(k) = -f(k) = 0$ myös kaikilla $k \leq 0$.

96.14. Olkoot pisteiden B_i ja C_i koordinaatit (b_i, b) ja (c_i, c), $i = 1, 2, \ldots, n$. Silloin

$$\cot(\angle B_iC_iP) = \frac{b_i - c_i}{b - c},$$

ja kysytty kotangenttien summa on

$$\frac{1}{b-c}\sum_{i=1}^{n}(b_i - c_i).$$

Mutta luvut b_i ja c_i ovat n:nnen asteen yhtälöiden $f(x) - b = 0$ ja $f(x) - c = 0$ kaikki juuret. Koska $n > 1$, molemmilla yhtälöillä on sama x^{n-1}:n kerroin, joka on sama kun juurien summan vastaluku. Siis $\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} c_i$, joten kysytty kotangenttisumma on 0.

96.15. Jos $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$, niin tehtävän epäyhtälö on $nx^2 \geq nx^{2a+b}$. Jotta tämä olisi voimassa, kun $x < 1$ ja kun $x > 1$, on oltava $2a + b = 2$. Tarkastellaan sitten tapausta $n = 4$ ja $x_1 = x_3 = 1$, $x_2 = x_4 = x$. Epäyhtälö saa muodon $4x \geq 2(x^{2a} + x^b)$. Tämä epäyhtälö voi toteutua suurilla x:n arvoilla vain, jos $2a \leq 1$ ja $b \leq 1$. Onkin siis oltava $2a = 1$, $b = 1$. On vielä todistettava, että tehtävän epäyhtälö todella pätee, kun $a = \dfrac{1}{2}$ ja $b = 1$. Tämä nähdään käyttämällä hyväksi Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä $\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$. Kun nimittäin tähän epäyhtälöön sijoitetaan $a_i = (x_ix_{i+1})^{1/2}$ ja $b_i = (x_{i+1}x_{i+2})^{1/2}$ ($x_j = x_{n-j}$, jos $j > n$), saadaan täsmälleen tehtävän epäyhtälö (toiseen potenssiin korotettuna).

96.16. Numeroidaan vaakarivit ja jaetaan taso 2×1- laatoiksi, "dominoiksi", esim. niin, että vaakarivit, joiden järjestysnumero on kolmella jaollinen, jaetaan kyljellään makaaviksi dominoiksi ja näiden rivien väliin jäävät kaksi vaakariviä pystyssä seisoviksi dominoiksi. Silloin jokaiseen 2×2-neliöön sisältyy ainakin yksi kokonainen domino. Toinen pelaaja voi estää aloittajan voiton täyttämällä aina toisen ruudun siitä dominosta, johon aloittaja on jo tehnyt merkinnän. Tässä prosessissa aloittaja joutuu aina tekemään merkinnän dominoon, jossa ei vielä ole merkintää.

96.17. Koska $A = 143 - D$ ja $1 \leq D \leq 9$, niin $134 \leq A \leq 142$. A:n ensimmäinen numero on 1 ja toinen joko 3 tai 4. Jos A:n toinen numero olisi 4, olisi $140 \leq A \leq 142$ ja $1 \leq D \leq 2$. Mutta 0 ja 2 eivät ole sallittuja numeroita, eikä A voi olla 141, joten A: toinen numero on välttämättä 3. A:n kolmannen numeron ja D:n summan on oltava 13. Tämä voi tapahtua kuudella eri tavalla: $13 = 4 + 9 = 5 + 8 = 6 + 7 = 7 + 6 = 8 + 5 = 9 + 4$. B:n ja C:n viimeisten numeroiden summan on oltava 13. Silloin B:n ja C ensimmäistenkin numeroiden summa on 13. Kun A ja D on valittu, jää jäljelle 4 numeroa, joista voidaan muodostaa kaksi paria, joiden summa on 13. Näistä kumpi hyvänsä voi muodostaa B:n ja C:n ensimmäiset numerot. Toiset numerot voidaan sitten vielä valita kahdella eri tavalla. Kaikkiaan mahdollisuuksia on $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ kappaletta.

96.18. Jos joka istunnossa erotetaan ainakin 2 jäsentä, niin 15 istunnon jälkeen koko tuomaristo on erotettu. Jos jossain istunnossa ketään ei eroteta, ei niin tapahdu tulevissakaan istunnoissa. Jotta erottamisistuntoja voisi olla enemmän kuin 15, on joissain istunnoissa erotettava vain yksi jäsen. Olkoon ensimmäinen istunto, jossa näin tapahtuu, k:s istunto. Oletamme, että tuossa istunnossa oli $2n + 1$ äänestäjää ja että erotettu henkilö oli hra K. Silloin ainakin $n + 1$ henkilöä piti herra K:ta epäpätevänä, mutta enintään n jäsentä piti ketään muuta epäpätevänä. Seuraavassa istunnossa on silloin $2n$ äänestäjää, eikä yksikään jäsen saa epäpätevyysääntä yli puolelta äänestäjistä. Jos $k \geq 16$, niin jurysta on poistettu ainakin $2 \cdot 15 + 1$ edustajaa. Siis $k \leq 15$. Oletamme sitten, että istunnossa, jossa K poistettiin, äänesti $2n$ edustajaa. Seuraavassa istunnossa on silloin pariton määrä äänestäjiä. Sama tilanne jatkuu, kunnes poistettavia on taas pariton määrä, joko 1 tai ainakin 3. Tapahtukoon tämä m:nnessä istunnossa. Jos poistettavia on tuolloin 1, poisto on samalla viimeinen samasta syystä kuin edellä. Samoin kuin edellä, jos $m \geq 16$, niin poistettavien määrä on ainakin $14 \cdot 2 + 1 + 1 = 30$. Tämä on mahdotonta, koska viimeisessä istunnossa on ollut vain 1 jäsen, joka ei ole voinut poistaa itseään. Jos taas m:nnessä istunnossa poistetaan yli kolme jäsentä, on m:nnen istunnon jälkeen äänestäjien määrä taas parillinen. Voidaan palata odottamaan kierrosta, jolla erotetaan yksi jäsen; tätä kierrosta ennen erotettujen jäsenten määrä on tässä tapauksessa ainakin 2 kertaa kierrosten määrä.

96.19. Ensimmäinen pelaaja voittaa: hän voi valita tikkuja kahdesta kasasta niin, että tikkujen lukumäärät ovat 38, 38, 38 ja 70. Mitä tahansa toinen tekeekin, ensimmäinen pelaaja voi palauttaa tilanteen muotoon a, a, a, b; $a \le b$. Äärellisen vuoromäärän jälkeen ollaan ensimmäisen pelaajan tekemän noston jälkeen tilanteessa 0, 0, 0, c; $c \ge 0$, jolloin toinen pelaaja ei voi enää tehdä siirtoaan.

96.20. Koska aritmeettisen jonon määrittää kaksi lukua, sen ensimmäinen termi a ja peräkkäisten lukujen erotus d, on mahdollista asettaa kaikki positiivisista kokonaisluvuista koostuvat aritmeettiset jonot numerojärjestykseen A_1, A_2, ... (Parit (a, d) voidaan panna esim. jonoon (1, 1), (2, 1), (1, 2), (3, 1), (2, 2), (1, 3), ...). Määritellään jono (a_n) asettamalla $a_1 = a_2 = 1$ ja määritellään a_{n+1} on A_{n-1}:n pienimmäksi $2a_n$:ää suuremmaksi termiksi. Väitetään, että joukossa $A = \{a_2, a_3, \ldots\}$ ei ole kolmea termiä, jotka olisivat aritmeettisessa jonossa. Oletetaan, että a_j, a_k ja a_m olisivat tällaisia. Silloin a_k olisi a_j:n ja a_m:n keskiarvo, mutta koska $a_j \ge 1$ ja $a_k \le a_{m-1} < \frac{1}{2}a_m$, $a_k < \frac{1}{2}(a_j + a_k)$. Osoitetaan vielä, että joukon $B = \mathbb{N} \setminus A$ luvuista ei voi muodostaa päättymätöntä aritmeettista jonoa: jos sellainen olisi, se olisi jokin jonoista A_n. Mutta jokaisesta jonosta A_n on jo valittu jokin alkio joukkoon A.

97.1. Koska ratkaisuksi ei sallita identtistä nollafunktiota, voidaan olettaa, että $f(a) \ne 0$ jollain a. Silloin $f(a)f(0) = f(a-0) = f(a)$, joten $f(0) = 1$. Edelleen $f(x)^2 = f(x-x) = 1$, joten $|f(x)| = 1$ kaikilla x. Mutta $f(2x)f(x) = f(2x - x) = f(x)$, joten $f(2x) = 1$ kaikilla x. Siis $f(x) = 1$ kaikilla x.

97.2. Olkoon l pienin indeksi, jolle $a_l > a1$. Silloin $2a_l - a_1$ on positiivinen, a_1:tä suurempi luku. Se on jonossa, joten $2a_l - a_1 = a_m$ jollain m. Todistus on valmis.

97.3. Havaitaan, että jos $x_n = an + b$, missä $0 \le b < n$, niin $x_{n+1} = x_n + a + 2 = a(n + 1) + b + 2$. Jos erityisesti $x_n = an$, niin $x_{n+1} = a(n + 1) + 2$, $x_{n+2} = a(n + 2) + 4$, $x_{n+3} = a(n + 3) + 6$, ..., $x_{n+(n-1)} = a(2n - 1) + 2(n - 1)$ ja $x_{2n} = 2na + 2n = 2n(a + 1)$. Nyt $x_1 = 1 \cdot 1$, joten $x_2 = 2 \cdot 2$, $x_4 = 4 \cdot 3$, ..., $x_{2^k} = 2^k(k + 1)$. Siis $x_{1024} = 11 \cdot 1024$ ja koska $1997 = 1024 + 973$, $x_{1997} = 11 \cdot 1024 + 2 \cdot 973 = 23913$.

97.4. Merkitään $y_i = x_i - a$. Voidaan olettaa, että luvut y_1, y_2, ..., y_k ovat ei-positiivisia ja luvut y_{k+1}, y_{k+2}, ..., y_n ovat ei-negatiivisia. Koska kaikkien lukujen y_i summa on 0, on $y_1 + \cdots + y_k = -z = -(y_{k+1} + \cdots + y_n)$ ja $|y_i| + \cdots + |y_k| = |y_{k+1}| + \cdots + |y_n| = z$. Selvästi

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{k} y_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n} y_i^2 \le \left(\sum_{i=1}^{k} y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=k+1}^{n} y_i\right)^2 = 2z^2 = \frac{1}{2}(2z)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|\right)^2.$$

97.5. Oletetaan, että jollain n on $u_n > a$. Jos u_n on parillinen, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n < u_n$. Jos u_n on pariton, niin $u_{n+1} = a + u_n < 2u_n$ ja u_{n+1} on parillinen luku. Siis $u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} < u_n$. Siten jokaista sellaista indeksiä, jolle $u_n > a$ kohden on suurempi indeksi n', jolle $u_{n'} \le a$.

Näin ollen jonossa on äärettömän monta termiä u_m, joille $u_m \le a$. Tämä merkitsee, että jonossa on ainakin kaksi eri indeksistä mutta yhtä suurta termiä. Jos $u_m = u_k$, $m < k$, jonon on oltava jaksollinen ja jakson pituuden on oltava luvun $k - m$ tekijä.

97.6. Koska $a^3 \le 1990$, $a \le 12$ ($12^3 = 1728$, $13^3 = 2197$). Koska $1990 \equiv 1 \bmod 9$, on oltava $a^3 \equiv 1 \bmod 9$. Kokonaisluvut $a \le 12$, joille $a^3 \equiv 1 \bmod 9$ ovat $a = 1$, $a = 4$ ja $a = 10$. Koska $9(b^2 + c) \le 9 \cdot (12^2 + 12) = 1404$, $a^3 \ge 1990 - 1404 = 586$, joten $a \ge 9$. Luvuista 9^3, 10^3, 11^3 ja 12^3 vain $10^3 \equiv 1 \bmod 9$. Siis on oltava $a = 10$.Nyt $9(b^2 + c) = 990$, $c \le b \le 10$. Heti nähdään, että $b = c = 10$ on ainoa ratkaisu.

97.7. Tehdään vastaoletus: $Q(P(b)) = 1$ jollain kokonaisluvulla b. Koska a ja $a+1997$ ovat P:n nollakohtia, $P(x) = (x - a)(x - a - 1997)R(x)$, missä R on kokonaislukukertoiminen polynomi. Nyt luvuista $b - a$ ja $b - a + 1997$ toinen on parillinen, joten $P(b)$ on parillinen luku. Koska $Q(1998)$ on parillinen, polynomin Q vakiotermi on parillinen. Muta tästä seuraa, että $Q(x)$ on kaikilla parillisilla x parillinen luku. Siis myös $Q(P(b))$ on parillinen ja on tultu risitiriitaan. Vastaoletus on siis väärä.

97.8. Jos kahden positiivisen luvun yhteenlasku tuottaa luvun, joka kirjoitetaan pelkillä yhdeksiköillä, yhteenlaskussa ei ole tarvittu muistinumeroita: allekkaisten numeroiden summa voi olla 19 ja tuottaa muistinumeron vain, jos summassa on mukana muistinumero; oikeanpuoleisin numero 9 ei voi olla summan 19 yhdeksikkö eikä tuota muistinumeroa, joten mihinkään vasemmalla puolella tehtyyn yhteenlaskuun ei voi sisältyä muistinumeroa. Tehtävä tulee ratkaistua, jos osoitetaan, että jokin tulo $(1996+1997)k = 3993k$ on muotoa $999\ldots99$. Päättely on standardi 3994 lukua 9, 99, 999, $\ldots$, $999\ldots99$, missä viimeisessä luvussa on 3994 yhdeksikköä antavat 3993:lla jaettuina 3994 jakojäänöstä, joista jodenkin kahden on oltava samat. Luku, joka saadaan näiden kahden luvun erotuksena, on muotoa $999\ldots900\ldots0$ ja jaollinen 3993:lla. Koska 10^k:llä ja 3993:lla ei ole yhteisiä tekijöitä, luvun alkuyhdeksikköjen muodostama luku on jalinen 3993:lla, ja ratkaisu on valmis.

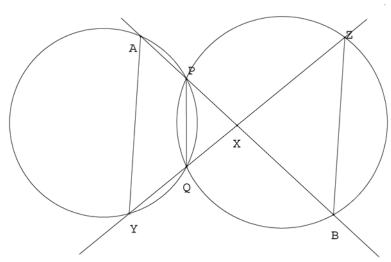
97.9. Jos maailmat tulkitaan verkon solmuiksi ja Gandalfin siirtymismahdollisuudet verkon särmiksi, kahden solmun välisen särmäketjun olemassaolon todistamiseksi riittää osoittaa, että molemmat solmut on yhdistettävissä solmuun 1. Riittää, kun osoitetaan, että Gandalf voi aina siirtyä maailmasta n johonkin maailmaan m, missä $m < n$. Äärellisen siirtymismäärän jälkeen hänen on pädyttävä maailmaan 1. Tarkastellaan kolmea eri tapausta: $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$ ja $n = 3k$. Ensimmäisessä tapauksessa Gandalf voi siirtyä maailmaan $k < 3k + 1$. Toisessa tapauksessa Gandalf voi siirtyä ensin maaimaan $2n = 6k + 4 = 3(2k + 1) + 1$ ja sitten maailmaan $2k + 1$; $2k + 1 < 3k + 2$. Kolmannessa Gandalf voi sirtyä ensin maailmaan $3n+1 = 9k+1$, siten maailmaan $2\cdot(9k+1) = 18k+2$, sitten maailmaan $2\cdot(18k+2) = 36k+4 = 3(12k+1)+1$, sitten maailmaan $12k+1$, sitten maailmaan $4k$ ja sitten maailmaan $2k$; $2k < 3k$.

97.10. Tarkastellaan jonon 40 ensimmäistä lukua. Näistä 4 on jaollisia 10:llä ja ainakin yhden toinen numero oikealta on enintään 6. Olkoon tämä luku a ja olkoon x sen numeroiden summa. Nyt luvut a, $a+1$, $\ldots$, $a+39$ kuuluvat kaikki jonoon. Lukujen a, $a+1$, $\ldots$, $a+9$ numeroiden summat ovat x, $x + 1$, $\ldots$, $x + 9$, luvun $a + 10$ numeroiden summa on $x + 1$, joten luvun $a+19$ numeroiden summa on $x+10$. Vastaavasti nähdään, että lukujen $a+29$ ja $a + 39$ numeroiden summat ovat $x + 11$ ja $x + 12$. Luvuista x, $x + 1$, $\ldots$, $x + 12$ tasan yksi on jaollinen 13:lla.

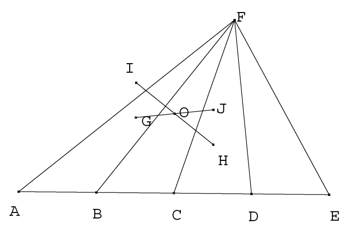
97.11. Olkoot pisteet A_i suoralla ℓ_1 ja pisteet B_i suoralla ℓ_2. Valitaan suoralta ℓ_2 pisteet $C_1, C_2, \ldots$ niin, että $C_{2i} = B_i$ ja C_{2i+1} on janan B_iB_{i+1} keskipiste. Silloin kolmiot $A_1C_{i+1}A_2$, $A_iC_{2i}A_{i+1}$ ja $C_{i+1}A_2C_{i+2}$ ovat yhteneviä. Siis

$$\sum_i \angle A_iB_iA_{i+1} = \sum_i \angle A_iC_{2i}A_{i+1} = \sum_i \angle C_{i+1}A_2C_{i+2} = 180^\circ - \alpha.$$

97.12. Ympyröiden säteiden, niiden keskipisteiden etäisyyden ja suoran AB valinnan mukaan tehtävässä on useita mahdollisia konfiguraatiota. Jokaisessa tapauksessa kuitenkin kolmiot AXY ja BXZ ovat yhteneviä, ja koska $AX = BX$, on myös $XY = XZ$. Esitetään todistus kuvan tapauksessa. Kolmioissa ovat $\angle AXY$ ja $\angle BXZ$ ristikulmina yhtä suuret. Jännenelikulmiosta $AYQP$ saadaan $\angle AYQ = \angle XPQ$. Mutta kehäkulmalauseen nojalla $\angle XPQ = \angle BPQ = \angle BZQ$. Siis $\angle AYX = \angle BZX$, ja kolmiot AXY ja BXZ ovat yhtenevät (kks).



97.13. Olkoot O, I ja J kolmioiden BDF, BCF ja CDF sivujen keskinormaalien leikkauspisteet. Janoilla AD ja BC on sama keskinormaali ja pisteet G ja I ovat molemmat tällä keskinormaalilla. Samoin pisteet H ja J ovat molemmat janan CD keskinormaalilla. Sis $IG \| JH$. Pisteet G, O ja J ovat samalla suoralla, nimittäin janan DF keskinormaalilla. Samoin pisteet I, O ja H ovat samalla suoralla, janan BF keskinormaalilla. Piste O on janan BD keskinormaalilla; tämä keskinormaali on samalla janojen BC ja CD keskipisteiden muodostaman janan keskinormaali. Tästä seuraa, että O puolittaa janat GJ ja IH ja edelleen kolmioiden GOI ja JOH yhtenevyys (sks). Siis $IG = JH$. Mutta tämä merkitsee, että $GHJI$ on sunnikas. Koska I ja J ovat janan CF keskinormaalilla ja $GH \| IJ$, on $GH \perp CF$



97.14. Merkitään $|BC| = a$, $|CA| = b$ ja $|AB| = c$. Olkoon R komion ABC ympäri piirretyn ympyrän säde. Oletus on $a^2 + c^2 = 2b^2$. Kosini- ja sinilauseiden avulla saadaan

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{2R}{a} = \frac{(R(b^2 + c^2 - a^2)}{abc}.$$

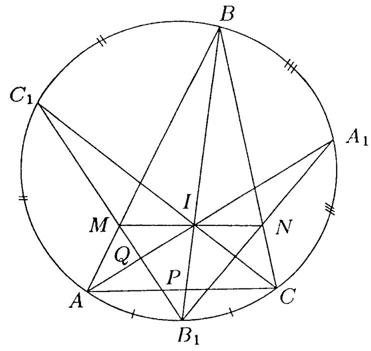
Vastaavasti

$$\cot B = \frac{R(a^2 + c^2 - b^2)}{abc}, \qquad \cot C = \frac{R(a^2 + b^2 - c^2)}{abc}.$$

Näin ollen osoitettavaksi jää epäyhtälö $(a^2 + c^2 - b^2)^2 \geq (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + b^2 - c^2)$. Mutta kun sovelletaan aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välistä epäyhtälöä ja oletusta, saadaan todellakin

$$\begin{aligned}(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + b^2 - c^2) &\leq \frac{1}{4}\left(b^2 + c^2 - a^2 + a^2 + b^2 - c^2\right)^2 \\ &= b^4 = (2b^2 - b^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2.\end{aligned}$$

97.15. Olkoon I kolmion ABC kulmanpuolittajien AA_1, BB_1 ja CC_1 leikkauspiste. Olkoot M ja Q suoran B_1C_1 ja AB sekä AA_1 leikkauspisteet. Kolmiossa AB_1Q on $\angle QAB_1 = \angle A_1AC + \angle CAB_1 = \angle A_1AC + \angle B_1BC$ ja $\angle AB_1Q = \angle ACC_1$. Koska $\angle AQC_1 = \angle AB_1Q + \angle QAB_1$, $\angle AQM$ on kolmion ABC kulmien puolikkaiden summa ja siis $90°$. Koska $\angle AC_1B_1 = \angle ABB_1 = \angle B_1BC = \angle B_1C_1C$, C_1B_1 on kulman $\angle AC_1I$ puolittaja. Koska $AI \perp C_1B_1$, suora C_1B_1 on myös kulman AMI puolittaja. Vastaavasti osoitetaan, että B_1C_1 puolittaa kulmat AB_1I ja API.



Nelikulmio, jonka lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja puolittavat nelikulmion kulmat, on neljäkäs. Siis $IM \| AB$. Vastaavasti todistetaan, että $IN \| AB$. M, N ja I ovat siis samalla suoralla, niin kuin väitettiin.

97.16. 5×5 -ruudukosta voidaan valita 24 ruutua ja nimetä ne 12:ksi ruutupariksi, joilla on se ominaisuus, että ruutujen välillä voi tehdä ratsun sirron. Eräs tapa valita parit on oheisen kaavion mukainen; sama numero viittaa rutupariin ja 25. ruutu on merkitty X:llä:

X	12	8	3	11
5	3	11	1	7
12	8	6	10	4
2	5	9	7	1
9	6	2	4	10

Pelaajalla A on voittostrategia. Hän asettaa ratsun ruutuun X. Pelaaja B siirtää ratsun jollakin numerolla merkittyyn ruutuun, ja A siirtää sen samalla numerolla merkittyyn ruutuun. Nyt B:n on jälleen sirettävä ratsu ruutuun, jonka pari on vielä vapaa. A voi siis aina sirtää B:n siirron jälkeen.

97.17. Olkoot a ja b sekä c ja d suorakaiteen sivuilla olevien neliöiden lukumäärät tehtävän jaoissa. Silloin $ab = n$ ja $cd = n + 76$. Toisaalta $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ eli $ad = bc$. Olkoon u lukujen a ja c suurin yhteinen tekijä ja v lukujen b ja d surin yhteinen tekijä. Silloin $a = ux$, $c = uy$, s.y.t.$(x, y) = 1$ ja $b = vz$, $d = vt$, s.y.t.$(z, t) = 1$. Koska $uxvt = uyvz$, x on z:n tekijä ja z on x:n tekijä. Siis $x = z$ ja samoin $y = t$. Näin ollen $2^2 \cdot 19 = 76 = cd - ab = uv(y^2 - x^2) = uv(x + y)(y - x)$. Koska $x + y$ ovat joko molemmat parittomia tai molemmat parillisia ja s.y.t.$(x, y) = 1$, vain $x + y = 19$, $y - x = 1$ on mahdollista. Siis $x = 9$, $y = 10$, $uv = 4$. Lopulta $n = x^2uv = 324$.

97.18. Yksi mahdollinen pari saadaan, jos joukkoon A otetaan kaikki ne ei-negatiiviset kokonaisluvut, joiden kymmenjärjestelmäesityksen nollasta eroavat numerot ovat vain oikealta laskettuna parittomissa paikoissa (kuten 3050002) ja joukkoon B kaikki ne ei-negatiiviset kokonaisluvut, joiden kymmenjärjestelmäesityksen nollasta eroavat numerot ovat vain oikealta laskettuna parillisissa paikoissa (kuten 206070). Tällöin kaikki joukon k luvut ovat luvun 10 monikertoja.

Tehtävässä mainitun luvun k olemassaolo on kuitenkin todistettava yleisesti. Oletetaan siis, että $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\} = A \cup B$, missä A:lla ja B:llä on tehtävässä annetut ominaisuudet (ja $0 \in \mathbb{N}$). Koska luvun 0 ainoa summaesitys on $0+0$, on oltava $0 \in A \cap B$. Koska luvulla 1 on vain esitykset $1+0 = 0+1$, 1 on ainakin toisessa joukoista A ja B. Oletetaan, että $1 \in A$. Olkoon sitten k pienin positiivinen kokonaisluku, joka ei kuulu joukkoon A. Silloin $k > 1$. Jos jokin b, $0 < b < k$, kuuluisi joukkoon B, luvulla b olisi kaksi esitystä $b + 0$, $b \in A$, $0 \in B$ ja $0 + b$, $0 \in A$, $b \in B$. Siis $b \notin B$. Luvulla k on yksikäsitteinen esitys $k = a + b$, $a \in A$, $b \in B$. Tässä $b \neq 0$ (koska $k \notin A$), joten $a < k$. Jos olisi $a > 0$, olisi $b < k$. Siis $a = 0$, $b = k$. Siis $k \in B$.

Olkoon nyt $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ joukon A jako erillisiin joukkoihin, joista kukin koostuu peräkkäisistä kokonaisluvuista, ja jos $i < j$, niin A_i:ssä olevat luvut ovat pienempiä kuin A_j:ssä olevat. Erityisesti $A_1 = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Merkitään $A_n + b = \{a + b \mid a \in A_n\}$. Oletuksen mukaan

$$\mathbb{Z}^+ = \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ b \in B}} A_n + b.$$

Jos $a \in A$, ja $a \neq 0$, niin $a + nk \in A$ kaikilla n. Ellei näin olisi, olisi pienin $n \geq 1$, jolle $a + nk \in B$. Silloin $a + (n-1)k \in A$ ja luvulla $a + nk$ olisi kaksi esitystä $0 + (a + nk)$ ja $(a + (n-1)k) + k$. Erityisesti siis joukkojen $(A_1 \setminus \{0\}) + nk$ yhdiste eli kaikkien niiden lukujen joukko, jotka eivät ole k:n monikertoja, sisältyy A:han. Joukko B on siis joukon $\{nk | n \in \mathbb{N}\}$ osajoukko. Jos nyt jokin k:n monikerta mk kuuluisi A:han, kaikki luvut $mk + nk$ kuuluisivat myös A:han. Silloin B olisi äärellinen, vastoin oletusta. B muodostuu siis k:n kaikista monikerroista.

97.19. Polkuja on kaikkiaan $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Jokainen eläin käyttää n:ää polkua (jokaisen n:n eläimen luolaan johtavia polkuja). Kampanjoivien eläinten määrä ei siis voi olla enempää kuin $\frac{n-1}{2}$. Osoitetaan, että se voi olla $\frac{n-1}{2}$ konstruoimalla $\frac{n-1}{2}$ reittiä, joista millän kahdella ei ole yhteistä osaa. Numeroidaan luolat 1:stä n:ään. Tällainen reitistö on

$$\begin{aligned}
&0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \cdots \to n \to 0\\
&0 \to 2 \to 4 \to 6 \to \cdots \to n-1 \to 0\\
&0 \to 3 \to 6 \to 9 \to \cdots \to n-2 \to 0\\
&\vdots\\
&0 \to \frac{n-1}{2} \to n-1 \to \frac{3}{2}(n-1) \to \cdots \to \frac{n+1}{2} \to 0,
\end{aligned}$$

missä luolien numerot lasketaan $\mod n$. Koska n on alkuluku, jokaisessa reitissä ovat kaikki luolat.

Kun $n = 9$, kampanjoivia eläimiä on enintään $\frac{9-1}{2} = 4$. Reitit

$$\begin{aligned}
&0 \to 1 \to 2 \to 8 \to 3 \to 7 \to 4 \to 6 \to 5 \to 0\\
&0 \to 2 \to 3 \to 1 \to 4 \to 8 \to 5 \to 7 \to 6 \to 0\\
&0 \to 3 \to 4 \to 2 \to 5 \to 1 \to 6 \to 8 \to 7 \to 0\\
&0 \to 4 \to 5 \to 3 \to 6 \to 2 \to 7 \to 1 \to 8 \to 0
\end{aligned}$$

osoittavat, että 4 on myös mahdollinen kampanjoivien eläinten lukumäärä.

97.20. Luokitellaan kortit neljään luokkaan niiden lajin ja alkuperäisen asennon mukaan. Luokassa A ovat kortit, joissa on eriväriset puolet ja alussa musta päällä, luokassa B kortit, joissa puolet ovat eriväsiset ja alussa valkea päällä, luokassa C kokonaan valkeat ja luokassa D kokonaan mustat kortit. Kun kortit 1–6 käännetään, mustien yläpuolien määrä vähenee viidellä. Näiden korttien joukossa on oltava 5 luokkaan A kuuluvaa korttia ja yksi luokkaan C tai D kuuluva kortti (jos joukossa olisi luokkaan B kuuluva kortti, mustien yläpuolien määrä voisi lisääntyä enintään neljällä). Kun kaikki käännöt on tehty, kortit 7–12 on käännetty ympäri ja mustien korttien määrä on vähentynyt neljällä. Korttien 7–12 joukossa on silloin oltava neljä luokkaan A kuuluvaa korttia ja kaksi muuta ovat a) yksi luokasta A ja yksi luokasta B, b) yksi luokasta C ja yksi luokasta D, c) kaksi luokasta C tai d) kaksi luokasta D. Jos korttien 1–6 joukossa olisi luokan D kortti, alkuasetelmassa olisi ainakin 10 mustaa päällä. Korttien 1–6 joukossa on siis viisi A-luokan ja yksi C-luokan kortti. Luetellut vaihtoehdot a), b) ja d) johtavat myös jokainen tilanteeseen, jossa alkuasetelman musta päällä -kortteja olisi ainakin 10. Siis c) on ainoa mahdollisuus. Korteista on siis yhdeksän musta-valkoisia ja kolme kokonaan valkoista.

98.1. Osoitetaan ensin, että ehdon täyttäviä funktioita on vain yksi. Selvästi $f(1,\,1) = 1$. Olkoon $z \geq 2$. Osoitetaan induktiolla, että tehtävän ehdot määrittävät $f(x,\,y)$:n yksikäsitteisesti, kun $0 < x < z$ ja $0 < y < z$. Koska $zf(z-y,\,y) = yf(x,\,z)$, $f(x,\,z)$ on yksikäsitteisesti määritelty, kun $0 < x < z$. Koska $f(z,\,y) = f(y,\,z)$, $f(z,\,y)$ on yksikäsitteisesti määritelty, kun $0 < y < z$. Koska $f(z,\,z) = z$, $f(x,\,y)$ on yksikäsitteisesti määritelty, kun $0 < x < z+1$ ja $0 < y < z+1$. Olkoon $[x,\,y]$ lukujen x ja y pienin yhteinen monikerta eli pienin yhteinen jaettava ja $(x,\,y)$ lukujen x ja y suurin yhteinen tekijä. $(x,\,y)[x,\,y] = xy$. Osoitetaan, että $f(x,\,y) = [x,\,y]$. Ilmeisesti $f(x,\,y) = [x,\,y]$ toteuttaa tehtävän kaksi ensimmäistä yhtälöä. Koska $(x,\,x+y) = (x,\,y)$, on

$$(x+y)[x,\,y] = \frac{(x+y)xy}{(x,\,y)} = y\frac{x(x+y)}{(x,\,x+y)} = y[x,\,x+y].$$

Myös kolmas yhtälö toteutuu, joten tehtävän ainoa ratkaisu on $f(x,\,y) = [x,\,y]$.

98.2. Kosinilauseen perusteella kolmikko $(a,\,b,\,c)$ on kvasipythagoralainen, jos ja vain jos $c^2 = a^2+ab+b^2$. Jos d on lukujen a, b ja c yhteinen tekijä, niin myös kolmikko $\left(\frac{a}{d},\,\frac{b}{d},\,\frac{c}{d}\right)$ on kvasipythagoralainen. Voimme rajoittua tarkastelemaan sellaisia kolmikkoja $(a,\,b,\,c)$, joissa a:n, b:n ja c:n suurin yhteinen tekijä on 1. Silloin myöskin jokaiset kaksi luvuista a, b, c ovat yhteistekijättömiä. Osoitetaan epäsuorasti, että c ei ole jaollinen luvuilla 2, 3 eikä 5. Jos c olisi parillinen, luvut a ja b eivät molemmat voisi olla parittomia. Siis c ei ole jaollinen 2:lla. Oletetaan, että c on jaollinen kolmella. Silloin a ei ole jaollinen 3:lla. Koska

$$4c^2 = 3a^2 + (a+2b)^2\} \tag{1}$$

ja a ei ole jaollinen 3:lla, niin $3a^2$ ei ole jaollinen 9:llä. Toisaalta $(a+2b)^2$ on jaollinen 3:lla, joten neliönä se on jaollinen myös 9:llä. Siten $3a^2$ on jaollinen 9:llä ja a on jaollinen kolmella. Ristiriita osoittaa, että c ei ole jaollinen kolmella. Oletetaan viimein, että c on jaollinen 5:llä. Silloin a ei ole jaollinen 5:llä, ja $a^2 \equiv \pm 1 \bmod 5$. Edelleen $4c^2 - 3a^2 \equiv$

$\pm 2 \bmod 5$. Mutta yhtälön (2) perusteella neliö $(a+2b)^2$ on silloin $\equiv \pm 2 \bmod 5$, mikä on mahdotonta. c:n kaikki alkutekijät, ja tietysti suurinkin, ovat suurempia kuin 5.

98.3. Tehtävän yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $2x^2 - xy + 5y^2 - 10xy = -121$ ja jakaa tekujöihin muodossa $(2x - y)(5y - x) = 11^2$. Tekijöiden on oltava molempien negatiivisia tai molempien positiivisia. Jos molemmat tekijät olisivat negatiivisia, olisi $2x < y$ ja $5y < x$; koska x ja y ovat positiivisia, tämä on mahdotonta. Siis pari $(2x - y, 5y - x)$ voi olla vain jokin pareista $(1, 121)$, $(11, 11)$, $(121, 1)$. Vain ensimmäinen pari voi liittyä kokonaislukuihin x, y. Tällöin $(x, y) = (14, 27)$.

98.4. Oletetaan, että $P(n) = 0$ jollakin kokonaisluvulla n. Silloin $P(n) \equiv 0 \bmod 1998$. Olkoon $m \in \{1, 2, \ldots, 1998\}$ sellainen luku, että $m \equiv n \bmod 1998$. Silloin $P(m) \equiv P(n) \bmod 1998$. Nyt $1 \le P(m) \le 999$. Ei voi olla $P(m) = 0$.

98.5. Jos $b = 0$, luku $10^n a$ täyttää asetetun vaatimuksen. Oletetaan, että $b \neq 0$. Olkoon n kinteä. Osoitetaan, että jokaisella k, $1 \le k < n$ on olemassa sellainen luku $m_k < 5^k$, että luvun $2^n m_k$ viimeisistä k:sta numerosta jokainen on a tai b. Koska 2^n päättyy johonkin numeroista 2, 4, 6, on olemassa jokaista mahdollista b:tä kohden olemassa m_1, $1 \le m_1 \le 4$, niin että $2^n m_1$ päättyy b:hen. Väite on siis tosi, kun $k = 1$. Oletetaan sitten, että jollekin k, $1 \le k < n$ on olemassa m_k niin, että $2^n m_k$:n k viimeistä numeroa ovat a tai b. Olkoon c $2^n m_k$:n $(k+1)$. numero oiekalta laskettuna. Tarkastellaan lukua $5^k 2^n$. Se loppuu tasan k:hon nollaan ja näitä nollia edeltävä numero on parillinen; olkoon se d. Nyt oli r mikä luku hyvänsä, luvun $m_k 2^n + r5^k 2^n$ $(k+1)$. numero oikealta on $\equiv c + rd \bmod 10$ (yhteenlaskun jälkimmäinen luku päättyy nolliin, joten se ei tuota muistinimeroa). Samoin kuin tapauksessa $k = 1$ voidaan valita sopiva r, $1 \le r \le 4$ niin, että $(k+1)$. numero oikealta on joko a (jos c on pariton) tai b (jos c on parillinen). Valitaan nyt $m_{k+1} = m_k + r5^k$. Luvun $2^n m_{k+1}$ $k+1$ viimeistä numeroa kuuluvat kaikki joukkoon $\{a, b\}$. Lisäksi $m_{k+1} < 5^k + 4 \cdot 5^k = 5^{k+1}$. Prosessia voidaan jatkaa, kunnes saadaan luku m_n, jolle luvun $2^n m_n$ kaikki viimeiset n numeroa ovat joukossa $\{a, b\}$. Koska $m^n < 5^n$, luvussa $2^n m_n$ on enintään n numeroa. Ne kuuluvat siis kaikki joukkoon $\{a, b\}$.

98.6. Polynomin $Q(x) = P(x) - P(-x)$ aste on enintään 5. Q:lla on nollakohdat a, b, 0, $-a$, $-b$. Koska $Q'(0) = 0$, 0 on ainakin kaksinkertainen Q:n nollakohta. Mutta silloin Q:n on oltava vakio 0; siis $P(x) = P(-x)$ kaikilla x.

98.7. Selvästi funktio $f(x) = 0$ kaikilla x toteuttaa tehtävän yhtälön. Osoitetaan, että se on ainoa ehdon toteuttava funktio. Olkoon x_0 mielivaltainen ja $f(x_0) = a$. Sijoitetaan yhtälööön $x = y = x_0$. Saadaan $f(a^2) = 2a$. Sijoitetaan nyt $x = y = a^2$. Saadaan $f(4a^2) = 4a$. Toisaalta, jos sijoitetaan $x = x_0$ ja $y = 4a^2$, saadaan $5a = a + 4a = f(x_0) + f((2a)^2) = f(f(f(x_0)f((2a)^2) = f(a \cdot 2 \cdot 2a) = f(4a^2)$. Siis $4a = 5a$, joten $a = 0$.

98.8. Kerrotaan väitetyn yhtälön vasen puoli A ja oikea puoli B polynomilla $1 - x$. Koska $(1 - x)P_k(x) = 1 - x^k$ ja $1 - x^0 = 0$, niin binomikaavan perusteella saadaan

$$(1-x)A = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(1 - x^k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(1 - x^k) = 2^n - (1+x)^n.$$

Toisaalta $1-x = 2\left(1-\dfrac{1+x}{2}\right)$, joten

$$(1-x)B = 2\left(1-\frac{1+x}{2}\right)\cdot 2^{n-1}P_n\left(\frac{1+x}{2}\right) = 2^n\left(1-\left(\frac{1+x}{2}\right)^n\right) = 2^n-(1+x)^n.$$

Siis $A = B$ aina. kun $x \neq 1$. Koska molemmat puolet ovat polynomeja (tai jatkuvia funktioita), yhtälö $A = B$ pätee myös, kun $x = 1$.

98.9. Tunnetusti

$$\frac{1}{\cos x} = \sqrt{1+\tan^2 x},$$

kun $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Koska kosinifunktio on välillä $\left[0,\, \dfrac{\pi}{2}\right]$ positiivinen ja vähenevä, väitteen todistamiseksi riittää osoittaa, että $\dfrac{1}{\cos\gamma} < \dfrac{1}{\cos\delta}$. Olkoon $f(t) = \sqrt{1+t^2}$. Nyt

$$\frac{1}{\cos\gamma} = f(\tan\gamma) = f\left(\frac{1}{2}(\tan\alpha+\tan\beta)\right)$$

ja

$$\frac{1}{\cos\delta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}\right) = \frac{1}{2}(f(\tan\alpha)+f(\tan\beta)).$$

Väitteen todistamiseksi riittää, että osoitetaan

$$\sqrt{1+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2} < \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}\right),$$

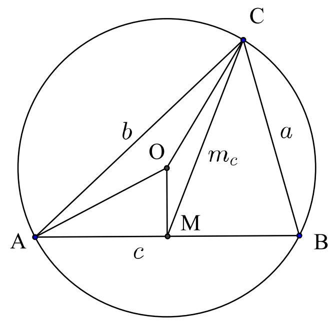
kun x ja y ovat positiivisia ja $x \neq y$. Mutta tämä viimeksi todistettava epäyhtälö osoittautuu kahden neliöön korottamisen jälkeen yhtäpitäväksi epäyhtälön $(x-y)^2 > 0$ kanssa. [Viimeiset tarkastelut voi sivuuttaa, jos toteaa funktion f alaspäin kuperaksi esimerkiksi havainnosta $f''(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} > 0$.]

98.10. Olkoon $(n-1)$-kulmio $A_0A_1\ldots A_{n-2}$ ja n-kulmio $B_0B_1\ldots B_{n-1}$. Sovitaan mukavuussyistä, että sen ympyrän, jonka sisään monikulmiot on piirretty, kehän pituus on $2n(n-1)$ (eikä 2π). Kierretään kehä auki x-akselin välille $[0,\, 2n(n-1)]$ niin, että yksi pisteistä A_i on origossa ja pisteessä $x = 2n(n-1)$. Nyt jokaisen A_j-pisteen koordinaatti on jokin luvuista $2kn$, $0 \le k \le n-2$. Koska välejä $[2kn,\, 2kn+2n]$, $0 \le k \le n-2$ on $n-1$ kappaletta, jotkin kaksi vierekkäistä B_j-kärkeä ovat samalla välillä. Numerointi voidaan tehdäö niin, että tämä väli on $[0,\, 2n]$ ja että sanottujen B_j pisteiden koordinaatit ovat x_0 ja $x_1 = x_0 + 2(n-1)$, $0 \le x_0$, $x_1 < 2n$. Erityisesti pätee $x_1 < 1$. Jos pisteen B_k koordinaatti on x_k, niin $x_k = x_0 + k\cdot(2(n-1))$, $1 \le k \le n-1$. Heti nähdään, että jos $1 \le k \le \dfrac{n}{2}$, niin $(2k-1)n \le x_k \le 2kn$ ja jos $\dfrac{n}{2} < k \le n-1$, niin $(2k-2)n \le x_k \le (2k-1)n$. Jos siis $1 \le k \le \dfrac{n}{2}$, niin B_k on A_{k-1}:n ja A_k:n välissä, lähempänä A_k:ta, ja jos $\frac{n}{2} < k \le n-1$, niin B_k on A_{k-1}:n ja A_k:n välissä, mutta lähempänä A_{k-1}:tä. Edellisessä tapauksessa B_k:n ja lähimmän A_j:n välinen etäisyys on $2kn - x_k = 2k - x_0$, jälkimmäisessä $x_k - (2k-2)n = x_0 - 2k + 2n$. Lyhimpien etäisyyksien summa on siis

$$x_0 + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(2k - x_0) + \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n-1}(x_0 - 2k + 2n).$$

Summassa on tasan yhtä monta x_0:aa ja $(-x_0)$:aa, joten se ei riipu x_0:sta. Tämä todistaa väitteen.

98.11. Olkoon tehtävän kolmio ABC, M sivun AB keskipiste, O ympärysympyrän keskipiste ja keskijana $CM = m_c$. Esimerkiksi ns. suunnikaslauseesta seuraa heti kolmion keskijanalle (tunnettu) lauseke



$$m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2).$$

Todistettava epäyhtälö voidaan kirjoittaa muotoihin $4Rm_c \ge a^2 + b^2$ ja $8Rm_c \ge 4m_c^2 + c^2$ ja $|OM|^2 = R^2 - \frac{1}{4}c^2 \ge R^2 - 2Rm_c + m_c^2 = (R - m_c)^2 = |OC - CM|^2$. Epäyhtälö on siis kolmion COM kolmioepäyhtälö.

Epäyhtälössä on yhtäsuuruus, jos kolmio surkastuu; näin käy, jos kolmio on tasakylkinen ($a = b$) tai suorakulmainen ($\angle BCA = 90°$), jolloin M ja O yhtyvät.

98.12. Olkoon $\angle BAD = x$ ja $\angle DAC = y$; siis $x + y = 90°$ ja $\sin y = \cos x$. Silloin $\angle BDA = 2x$ ja $\angle ADC = 2y$. Nyt $\angle ABD = 180° - 3x$ ja $\angle ACB = 180° - 3y$. Sovelletaan sinilausetta kolmioon ABD. Saadaan

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\sin(3x)}{\sin x}.$$

Mutta $\sin(3x) = \sin(2x + x) = \sin(2x)\cos x + \cos(2x)\sin x = \sin x(2\cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x) = \sin x(3\cos^2 x - \sin^2 x)$, joten

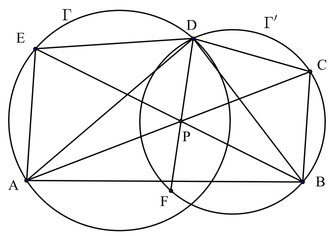
$$\frac{AD}{BD} = 3\cos^2 x - \cos^2 x.$$

Kolmiosta ADC saadaan analogisesti

$$\frac{AD}{DC} = 3\cos^y - \sin^2 y = 3\sin^2 y - \cos^2 x.$$

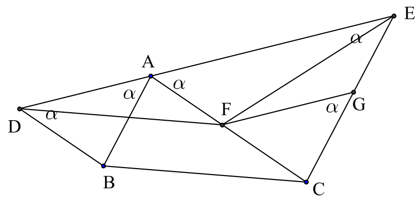
Koska $3\cos^2 x - \cos^2 x + 3\sin^2 y - \cos^2 x = 2$, saadaan väite.

98.13. Olkoot Γ ja Γ' kolmioiden ADE ja BCD ympärysympyrät. Olkoon F suoran DP ja Γ':n toinen leikkauspiste. Koska $AE \| BC$, kolmioiden APE ja CPB kulmat ovat pareittain yhtä suuret, joten $APE \sim CPB$. P-keskinen homotetia vie AE:n janaksi CB. Koska AE ja CB vastavat Γ:n ja Γ':n yhtä suuria kehäkulmia, on Γ:n ja Γ':n säteiden suhde sama kun $AE : CB$. Mutta tämä merkitsee sitä, että Γ' on Γ:n kuva mainitussa homotetiassa. Tämä homotetia



kuvaa kaaren $\overset{\frown}{DE}$ kaareksi $\overset{\frown}{BF}$. Siis $\angle EAD = \angle BDF = \angle BDP$. Toinen yhtälö todistetaan samalla tavalla.

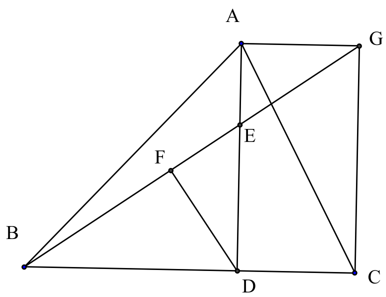
98.14. Piirretään F:n kautta DE:n suuntainen suora. Se leikkaa CE:n pisteessä G. Koska DE on kulman $\angle CAB$ vieruskulman puolittaja, $\angle DAB = \angle EAC = \alpha$. Yhdensuuntaisuuksista seuraa $\angle ADB = \angle AEC = \angle GFC = \angle FGC = \alpha$. Kolmiot BAD, CEA ja CGF ovat yhdenmuotoisia tasakylkisiä kolmioita. Koska $AB = FC$, BAD ja CGF ovat yhteneviä, joten $AD = FG$. Selvästi $AF = EG$. Kulmien $\angle FAD$ ja $\angle FGE$ vieruskulmat ovat yhtä suria, joten $\angle FAD = \angle FGE$. Kolmiot FAD ja EGF ovat siis yhteneviä (sks), joten $FD = FE$.



98.15. Täydennetään suorakulmainen kolmio ADC suorakaiteeksi $ADCG$. Koska

$$\frac{AE}{ED} = \frac{DC}{BD} = \frac{AG}{BD},$$

suorakulmaiset kolmiot EBD ja EAG ovat yhdenmuotoiset. Siis $\angle DEB = \angle AEG$. Mutta tästä seuraa, että B, E ja G ovat samalla suoralla. Koska $\angle FDG = \angle FDE = 90°$, F on suorakaiteen $ADCG$ ympärysympyrällä. Koska AC on tämän ympyrän halkaisija, $\angle AFC = 90°$.



98.16. Väritetään ruudukko neljällä värillä A, B, C ja D niin, että ylimmän rivin väri on A, toiseksi ylimmän B, seuraavan C, seuraavan D, seraavan A jne. Keskimmäinen ruutu jätetään värittämättä. Nyt värillä B vöritettyjä rutuja on $3 \cdot 13 = 39$ ja cärillä C väritettyjä $13 \cdot 39 - 1 = 38$. Jos vaadittu laudan peitto 1×4-laatoilla onnistuisi, niin jokainen laatta peittäisi neljä samanväristä ruutua tai neljä uutua, jotka kaikki olisivat erivärisiä. Tämä merkitsee, että mustien ja valkoisten ruutujen lukumäärän erotuksen pitäsi olla neljällä jaollinen. Koska 1 ei ole jaollinen 4:llä, vaadittua peittoa ei ole.

98.17. Jos $k = 1$, pakkaus voidaan tehdä. Oletetaan, että se voidaan tehdä, kun $k = j$. Olkoon sitten esineitä $(j + 1)n$, jokainen väritettynä jollain $j + 1$:stä eri väristä, ja laatikoita $j+1$. Silloin jotakin väriä, esimerkiksi vihreää, on enintään n kappaletta ja jotakin väriä, esimerkiksi sinistä, on enemmän kun n kappaletta. Otetaan kaikki vihreat, pannaan ne laatikkoon, ja täytetään laatikko (jos tarpeen) sinisillä esineillä. Nyt jäljellä on jn esinettä, kukin väritettyinä jollakin j:stä eri väristä (kun vihreät ovat kaikki yhdessä laatikossa). Induktio-oletuksen mukaan nämä jn esinettä voidaan pakata vaaditulla tavalla j:hin laatikkoon; $(j+1)$:ssä laatikossa on myös vain kahdenvärisiä esineitä. Väitteen totuus seuraa induktioperiaatteesta.

98.18. Tarkastelemalla mahdollisuuksia nähdään, että vaadittuja joukkoja ei ole, kun $n = 1, 2, 3$. Kun $n = 4$, joukko $\{3, 5, 6, 7\}$ kelpaa. Jos $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ on kelvollinen joukko, sellainen on myös $\{1, 2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_n\}$. Kysyttyjä joukkoja on sis kaikilla $n \geq 4$.

98.19. Jos tarkastellaan kahden ei välttämättä samanakokoisen joukkueen jäsenten välisiä pelejä, niin ainakin toisessa joukkueessa on ainakin yksi pelaaja, joka on voittanut ainakin uolet toisen joukkueen pelaajista. Jos nimittäin joukkueessa A on m ja joukkueessa B n pelaajaa, niin oteluita on yhtensä mn; ellei kukaan A-joukkueesta ole voittanut ainakin puolta B-joukkueen pelaajista, A-joukkueen voittamien ottelujen määrä on $< m \cdot \dfrac{n}{2}$ ja ellei kukaan B-joukkueen jäsen ole voittanut ainakin puolta A-joukkueen jäsenistä, B-joukkueen voittaminen ottelujen määrä on $< n \cdot \dfrac{m}{2}$; näin ollen ottelujen määrä olisikin $< mn$. Tarkastellaan nyt kahden 1000-henkisen joukkueen pelejä. Toisessa joukkueessa, esimerkiksi A:ssa, on pelaaja a_1, joka on voitanut ainakin 500 B-joukkueen pelaajaa. Annetaan hänelle mitali, ja poistetaan B-joukkueesta kaikki a_1:lle hävinneet. Tarkastellaan tilannetta uudelleen. Jommassakummassa joukkueista on jälleen joku pelaaja, joka on voittanut ainakin puolet toisen joukkueen pelaajista. Annetaan hänellekin mitali, poistetaan hänet ja hänelle hävinneet. Prosessia voidaan jatkaa, kunnes toisessa joukkueessa ei enää ole yhtään pelaajaa jäljellä. Oletetaan, että tämä joiukkue on B. Joka kerta, kun B:stä on poistettu hävinneitä, nätä on ollut ainakin puolet B:n silloisesta vahvuudesta. Koska aluksi B:ssä oli alle 2^{10} pelaajaa, poistoja on ollut enintään 10. A:ssa on enintään 10 mitalinsaajaa. Nyt jokainen B:ssä ollut on hävinnyt jollekin A:n mitalinsaajalle. Jos heitä on alle 10, voidaan ryhmä täydentää millä hyvänsä A:n pelaajilla.

98.20. Olkoot $1 \leq g < h < i < j \leq n$ kiinnteitä kokonaislukuja. Tarkastellaan kaikkia sellaisa n-numeroisia lukuja $a = \overline{a_1a_2\ldots a_n}$, joiden kaikki numerot ovat nollaa suurempia, joille $a_g = 1$, $a_h = a_i = 9$ ja $a_j = 8$ ja joille "1998" on mahdollisimman alussa, eli joille $a_p \neq 1$, kun $p < g$, $a_p \neq 9$, kun $g < p < h$ ja $h < p < i$ ja $a_p \neq 8$, kun $i < p < j$. Tällaisia lukuja on $k_{ghij} = 8^{g-1} \cdot 8^{h-g-1} \cdot 8^{i-h-1} \cdot 8^{j-i-1} \cdot 9^{n-j}$ kappaletta. Nyt $k_{ghij} \equiv 1 \bmod 8$ jos ja vain jos $g = 1$, $h = 2$, $i = 3$ ja $j = 4$ ja $k_{ghij} \equiv 0 \bmod 8$ kaikissa muissa tapauksissa. Koska $k(n)$ on kaikkien lukujen k_{ghij} summa, kysytty jakojäännös on 1.

99.1. Sijoittamalla tehtävän yhtälöihin $A = a+1$, $B = b+1$, $C = c+1$ ja $D = d+1$ saadaan

$$ABC = 2 \tag{1}$$

$$BCD = 10 \tag{2}$$

$$CDA = 10 \tag{3}$$

ja

$$DAB = 10. \tag{4}$$

Kertomalla keskenään (1), (2) ja (3) saadaan $C^3(DAB)^2 = 200$, josta yhtälön (4) mukaan seuraa $C^3 = 2$. Vastaavasti $A^3 = B^3 = 2$ ja $D^3 = 250$. Alkuperäisen yhtälöryhmän ainoa ratkaisu on $a = b = c = \sqrt[3]{2} - 1$, $d = 5\sqrt[3]{2} - 1$.

99.2. Yksi ratkaisu on $32^3 = 32\,768$. Osoitetaan, että muita ratkaisuja ei ole. Jos n3 on ratkaisu, tehtävän ehtojen mukaan pätee $1000n \le n^3 < 1000(n+1)$. Vasemmanpuoleisesta epäyhtälöstä $n^2 \ge 1000$, eli $n \ge 32$. Oikeanpuoleisesta epäyhtälöstä $n^2 < 1000\left(1 + \frac{1}{n}\right) \le 1000\left(1 + \frac{1}{32}\right) < 1032$, eli $n \le 32$.

99.3. Kun $n = 3$, voidaan kirjoittaa

$$0 = (a_1 + a_2 + a_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 \ge 2(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1).$$

Kun $n = 4$, voidaan kirjoittaa

$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_1 = (a_1 + a_3)(a_2 + a_4) \le \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 = 0.$$

Jos $n \ge 5$, valitaan $a_1 = -1$, $a_2 = -2$, $a_3 = a_4 = \ldots = a_{n-2} = 0$, $a_{n-1} = 2$ ja $a_n = 1$. Tällöin

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 3.$$

Ratkaisu on siis $n = 3$ tai $n = 4$.

99.4. Funktion määritelmästä

$$f(x, y) \le x \tag{5}$$

ja aritmeettis-geometrisesta epäyhtälöstä

$$f(x, y) \le \frac{y}{x^2 + y^2} \le \frac{y}{2xy} = \frac{1}{2x}. \tag{6}$$

Kerrotaan epäyhtälöt (5) ja (6) keskenään. Saadaan $f(x, y)^2 \le \frac{1}{2}$ eli $f(x, y) \le \frac{1}{\sqrt{2}}$. Toisaalta $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Funktiolla f on siis maksimiarvo $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

99.5. Mahdollisia pisteitä on viisi: $(0, 1)$, $\left(\pm\frac{\sqrt{24}}{5}, -\frac{1}{5}\right)$, ja $(\pm 1, 0)$. Tarkastellaan y-akselia leikkaavia suoria $y = kx+l$. Suora on ympyrän tangentti jos toisen asteen yhtälöllä $x^2 + (kx + l)^2 = 1$ on vain yksi ratkaisu, eli jos diskriminantti on nolla, eli $k^2 - l^2 + 1 = 0$. Suora kohtaa paraabelin vain yhdessä pisteessä, jos toisen asteen yhtälöllä $kx + l = x2^+1$ on vain yksi ratkaisu, eli jos diskriminantti on nolla, eli $k^2 + 4l - 4 = 0$. Näistä kahdesta ehdosta saadaan kolme ratkaisua $k = 0$ ja $l = 1$, $k = \sqrt{24}$ ja $l = -5$ sekä $k = -\sqrt{24}$ ja $l = -5$. Ratkaisut vastaavat pisteitä $(0, 1)$ ja $\left(\frac{\sqrt{24}}{5}, -\frac{1}{5}\right)$. Tarkastellaan y-akselin suuntaisia suoria. Suora $x = 1$ toteuttaa tehtävän ehdot, samoin $x = -1$. Näistä suorista pisteet $(\pm 1, 0)$.

99.6. Merkitään šakkilaudan ruutuja koordinaateilla (x, y), jossa $x, y = 1, 2, \ldots, n$. Matkalla ruudusta $(1, 1)$ ruutuun (n, n) koordinaattien muutosten summa on $2(n-1)$. Yhdellä siirrolla koordinaattien yhteinen lisäys on korkeintaan 3. Koordinaattien summan parillisuus muuttuu joka siirrolla. Lisäksi $1+1$ ja $n+n$ ovat parillisia. Näistä päätellään, että tarvittavien siirtojen lukumäärä on parillinen ja suurempi kuin $\frac{2(n-1}{3}$. Jos $n = 4$, ratsu pääsee vastakkaiseen kulmaan kahdella siirrolla. Helposti löytyvät myös siirrot tapauksille $n = 5$ (neljällä siirrolla) ja $n = 6$ (neljällä siirrolla). Ruudusta (i, i) ratsu pääsee ruutuun $(i+4, i+4)$ kahdella siirrolla. Näillä siirroilla ratsu pääsee kulmasta kulmaan siirtomäärällä, joka on parillinen ja suurempi kuin $\frac{2(n-1)}{3}$. Tämä on pienin mahdollinen siirtojen määrä.

99.7. Ei voi. Olkoon S kaikkien sellaisten ruutuparien joukko, jotka ovat toistensa naapureita. Kutsutaan joukon S ruutuparia vanhaksi, jos molemmissa parin ruuduissa on jo käyty. Ensimmäisen siirron jälkeen on yksi vanha pari. Jokainen seuraava siirto luo parillisen määrän vanhoja pareja. Eli vanhojen parien lukumäärä on jokaisen siirron jälkeen pariton. Kuitenkin joukossa S on parillinen määrä pareja, eli kuningas ei voi käydä kaikissa ruuduissa. Miksi joukossa S on parillinen määrä ruutupareja? Kierretään shakkilautaa 180° keskipisteensä ympäri. Nyt lähes jokainen joukon S alkio kuvautuu jollekin toiselle joukon S alkiolle. Paitsi kaksi ruutuparia keskellä; ne, joiden ainut yhteinen piste on laudan keskipiste. Jokaiselle joukon S alkiolle löytyy siis pari, eli alkioita on parillinen määrä.

99.8. Valitaan jotkin kolme kolikkoa ensimmäiseen punnitukseen ja vaihdetaan painoltaan keskimmäinen pois. Toistetaan tämä kaikille punnitus 1996 kertaa. Kun viimeisen operaation jälkeen painoltaan keskimmäinen on otettu pois, koneeseen jää painavin ja kevein kolikoista. Siirretään nämä syrjään. Toistetaan sama operaatio jäljellä oleville 1997 kolikolle ja siirretään näistä painavin ja kevein syrjään. Jatketaan tätä kunnes vain yksi kolikko on jäljellä. Se on painoltaan tuhannes. Yhteensä punnituksien määrä

$$1997 + 1995 + \cdots + 1 = 999^2 < 1000000.$$

Tehdään vastaoletus, että painoltaan r:s, $r \neq 1000$, voidaan löytää koneen avulla. Nimetään kolikot jossain järjestyksessä $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Kolikkoa r etsitään tekemällä sarja punnituksia $(a_{i_1}, a_{j_1}, a_{k_i})$, $(a_{i_2}, a_{i_2}, a_{k_2})$, $\ldots$, joista tuloksena tiedetään keskimmäiset kolikot $a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots$ Tulosten perusteella voidaan nyt löytää, että a_s on painojärjestyksessa r:s. Nyt joku (joka tietää kolikoiden painojärjestyksen) vaihtaakin kolikkoihin merkityt nimet niin, että painavimman ja keveimmän nimet vaihdetaan keskenään, toiseksi painavimman ja toiseksi keveimmän nimet vaihdetaan keskenään jne. kaikille nimille, paitsi painojärjestyksessä tuhannennelle kolikolle. Kun toistetaan punnitukset $(a_{i_1}, a_{j_1}, a_{k_i})$, $(a_{i_2}, a_{i_2}, a_{k_2})$, $\ldots$ (samat nimet, eri kolikot), saadaan (samat) tulokset $a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots$ Tämä siksi, että kolikoista painoltaan keskimmäinen ei riipu siitä, tarkastellaanko painoja kasvavassa vai pienenevässä järjestyksessä. Lopputulos on myös muuttumaton: painoltaan r:s on kolikko a_s. Tämä on ristiriita, sillä edellisessä punnituksessa valittiin kolikko a_{2000-s}.

99.9. Kirjoitetaan 27 rivisummaa

$$\begin{gathered}1+2+4=7\\3+5+7=15\\\vdots\end{gathered}.$$

Jos oikealla puolella on pelkästään parittomia lukuja, täytyy vasemmalla puolella olla parillisia lukuja jokaisella rivillä nolla tai kaksi kappaletta- yhteensä vasemmalla puolella parillinen määrä parillisia lukuja. Tämä ei ole mahdollista, koska parillisia lukuja on vasemmalla puolella yhteensä $3 \cdot 13 = 39$ kappaletta. (Jokainen luvuista 1, 2, ..., 27 käytetään vasemmalla puolella tasan kolme kertaa ja parillisia lukuja on kolmetoista erilaista.) Oikealla puolella on siis ainakin yksi parillinen luku. Tarkastellaan sellaista 3×3-tasoa, jossa jokin rivisumma on parillinen. Valitaan, että ylimmän rivin rivisumma on parillinen. Oletetaan, että kaikki muut rivisummat ovat parittomia. Siis toisen ja kolmannen rivin rivisummat ovat parittornia ja kaikkien kolmen sarakkeiden rivisummat ovat parittomia. Tästä seuraa ristiriita, sillä sarakkeista laskettuna koko tason numeroiden summa on pariton ja riveistä laskettuna parillinen. Parillisia rivisummia on siis ainakin kaksi. Oletetaan, että oikealla puolella on vain kaksi parillista lukua. Parittomia lukuja on 25, eli yhtälöiden oikeiden puolien summa on pariton. Vasemalla puolella on kolme kertaa summa $1 + 2 + \cdots + 27$, joka on parillinen. Tämä on ristiriita. Parillisia rivisummia on ainakin kolme. Parittomia rivisummia saadaan korkeintaan 24. Osoitetaan esimerkin avulla, että tämä yläraja saavutetaan. Ensimmäiseen tasoon laitetaan luvut

$$\begin{matrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{matrix}$$

(vain jakojäännös on merkitty), toiseen tasoon

$$\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}$$

ja kolmanteen tasoon

$$\begin{matrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{matrix}$$

99.10. Olkoon piste 0 kiekon keskipiste ja pisteet P_1, ..., P_6 säännöllisen kuusikulmion kärjet kiekon kehällä. Ajatellaan tehtävän osajoukkoihin jakoa punaiseksi, siniseksi ja vihreäksi värittämisenä. Oletetaan, että 0 on punainen ja P_1, P_3 ja P_5 sinisiä ja P_2, P_4 ja P_6 vihreitä. Tarkastellaan P_1-keskistä ympyränkaarta pisteiden 0 ja P_2 kautta. Koska P_1 on sininen, ovat kaaren pisteet joko punaisia tai vihreitä. Vastaavasti P_3- ja P_5-keskisille ympyränkaarille. Tarkastellaan sitten 0-keskistä ympyrää, jonka säde on $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Tämän ympyrän ja kolmen ympyränkaaren leikkauspisteet ovat kaikki punaisia tai vihreitä ja etäisyyden yksi päässä toisistaan. Tämä on ristiriita. Tehtävässä esitettyä jakoa ei voi tehdä.

99.11. Piirretään niin iso ympyrä, että kaikki neljä pistettä ovat sen sisäpuolella. Pienennetään ympyrän sädettä ja siirretään sen keskipistettä kunnes ainakin kolme pisteistä on ympyrän kehällä. Neljäs piste on välttämättä ympyrän sisällä tai kehällä.

99.12. Olkoon O kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste, piste I kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste ja pisteet M ja N sivujen AC ja BC keskipisteet. Osoitetaan, että M, N ja I ovat ympyrällä, jonka halkaisija on OC. Suorien kulmien $\angle CMO$ ja $\angle ONC$ takia M ja N ovat tällä ympyrällä. Vielä täytyy osoittaa, että $\angle CIO = 90°$. Olkoot sisään piirretyn ympyrän ja kolmion sivujen AB, BC ja CA sivuamispisteet K, F ja E. Nyt $BF + AE = BK + AK = AB$ ja $AB = \frac{1}{2}(BC + AC) = BN + AM$. Tästä $NF = ME$. Huomaa, että janat NF ja ME ovat janan OI projektiota sivuilla BC ja AC. Olkoon $\overrightarrow{e_1}$ vektorin $\overrightarrow{CA}$ suuntainen yksikkövektori ja $\overrightarrow{e_2}$ vektorin $\overrightarrow{CB}$ suuntainen yksikkövektori. Projektioiden pituuksien $NF = ME$ avulla voidaan kirjoittaa $|\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{OI}| = |\overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{OI}|$, eli $\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{OI} = \pm\overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{OI}$ tai $(\overrightarrow{e_1} \pm \overrightarrow{e_2}) \cdot \overrightarrow{OI} = 0$. Tällä yhtälöllä on kolme ratkaisua: 1. $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{0}$ eli $0 = I$. 2. $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} \perp \overrightarrow{OI}$ eli $CI \perp IO$. 3. $\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} \perp \overrightarrow{OI}$ eli $CI \| IO$. Kun O on kulmanpuolittajalla, kolmio ABC on tasakylkinen, $AC = BC$. Nyt ABC on tasasivuinen, eli $0 = I$.

99.13. Valitaan piste F sivulta AB siten, että $AF = AE$ ja $BF = BD$. Jana AD on kulman A puolittaja. Siksi AD on tasasivuisen kolmion AFE kannan EF keskinormaali ja $DE = DF$. Vastaavasti $ED = EF$. Siis kolmio DEF on tasasivuinen. Lasketaan $\angle AFE + \angle BDF = 120°$ ja $\angle FEA + \angle BDF = 120°$. Nyt myös $\angle CED + \angle EDC = 120°$ ja $\angle BCA = 60°$.

99.14. Olkoon h_B pisteen B etäisyys suorasta AC ja h_C pisteen C etäisyys suorasta AB. Puolisuunnikaiden pinta-alojen mukaan

$$\frac{[DBCG]}{[FBCE]} = \frac{\frac{1}{2}(BD + CG)h_c}{\frac{1}{2}(CE + BF)h_B}.$$

Tasakylkisyyden takia $h_B = h_C$, eli tehtävän väite on yhtäpitävästi

$$\frac{BD + CG}{CE + BF} = \frac{AD}{AE}. \tag{7}$$

Olkoon M janan BC keskipiste. Olkoot F' ja G' pisteiden F ja G peilikuvia pisteen M suhteen. Tässä samassa peilauksessa CG kuvautuu janalle BG' ja BF kuvautuu janalle CF'. Nyt $DE \| G'F'$ ja

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AG'}{AF'} = \frac{DG'}{EF'} = \frac{DB + CG}{EC + BF}.$$

99.15. Olkoon $CD = a$ ja $CE = AC = BD = b$. Kosilauseen mukaan

$$AB = CA^2 + BC^2 - 2CA \cdot BC \cos 60° = b^2 + (a + b)^2 - 2b(a + b)\frac{1}{2} = a^2 + ab + b^2.$$

Edelleen kosinilauseen mukaan

$$ED = EC^2 + CD^2 - 2EC \cdot CD \cos 120° = b^2 + a^2 - 2ba\left(-\frac{1}{2}\right) = a^2 + ab + b^2.$$

99.16. Osoitetaan, että vastaus on $19^1 - 5^1 = 14$. Vastaoletus: Kokonaisluvuilla m ja n pätee $k = 19^n - 5^m < 14$. Tarkastellaan ensin tapausta n on parillinen. Koska $19 \equiv -1 \bmod 10$, pätee $19^n \equiv 1 \bmod 10$, eli k:n viimeinen numero on 6. Vastaoletuksen mukaan $19^n - 5^m = 6$. Oikea puoli on jaollinen kolmella. Tarkastellaan vasenta puolta modulo 3: $19 \equiv 1 \bmod 3$ ja $19^n \equiv 1 \bmod 3$. Vastaavasti $5^m \equiv 1 \bmod 3$ vain jos m on parillinen. Valitsemalla $m = 2m'$ ja $n = 2n'$ voidaan kirjoittaa $\left(19^{n'} + 5^{m'}\right)\left(19^{n'} - 5^{m'}\right) = 6$. Tällä yhtälöllä ei ole ratkaisuja sillä vasemman puolen tekijöiden erotus on $2 \cdot 5^{m'}$, eikä luvulla 6 ole sopivaa tekijöihin jakoa. Tarkastellaan tapausta n on pariton. Kuten edellä, $19^n \equiv -1 \bmod 10$, eli luvun k viimeinen numero on 4. Vastaoletuksen mukaan $19^n - 5^m = 4$. Mutta $19^n \equiv 1 \bmod 3$ ja $5^m \equiv \pm 1 \bmod 3$, eli $19^n - 5^m \equiv 11 \bmod 3$. Tämä johtaa ristiriitaan, sillä $4 \equiv 1 \bmod 3$.

99.17. Vastaus: kyllä. Esimerkiksi lukujono 0, 2, 8, 14, 26 täyttää tehtävän ehdot. Kun $a = 3$ tai $a = 5$, luvut $a + c_1, \ldots, a + c_5$ ovat alkulukuja. Lukujonon jäsenet kuuluvat eri jäännösluokkiin modulo 5. (Eli viidellä jaettaessa jakojäännös on jokaisella luvulla eri.) Kaikilla a:n arvoilla jokin luvuista $a + c_1, \ldots, a + c_5$ on viidellä jaollinen. Jotta luvut olisivat alkulukuja, on viidellä jaollinen luku 5. Tämä on mahdollista vain jos $a = 3$ tai $a = 5$.

99.18. Oikeanpuoleisen epäyhtälön neliöönkorottamisella saadaan

$$(a - b)^2 < 5 + 4\sqrt{4m + 1}$$

tai yhtäpitävästi

$$(a + b)^2 < 5 + 4\sqrt{4m + 1} + 4m = \left(\sqrt{4m + 1} + 2\right)^2,$$

eli

$$a + b < \sqrt{4m + 1} + 2.$$

Koska tarkastellaan vain tapauksia $a > b$, jokainen tekijöihinjako $m = ab$ johtaa eri summan $a + b$ arvoon. Koska $m \equiv 2 \bmod 4$, toinen luvuista a ja b on parillinen ja toinen pariton, eli $a + b$ on pariton. Lisäksi

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} = \sqrt{4m}.$$

Edelleen, koska $4m$ ei ole kokonaisluvun neliö (luku 4 ei ole luvun m tekijä), täytyy olla $a + b \geq \sqrt{4m + 1}$. Välillä $[\sqrt{4m + 1}, \sqrt{4m + 1} + 2[$ on tasan yksi pariton luku. Koska $a + b$ on pariton ja suurempi kuin $\sqrt{4m + 1}$, voi olla olemassa vain yksi tehtävän ehdot täyttävä ($a + b < \sqrt{4m + 1} + 2$) lukupari (a, b).

99.19. Etsitään parillisia lukuja, joita ei voida kirjoittaa muodossa $q - p^2$ minkään alkulukujen p ja q avulla. Jos $k = q - p^2$ ja p ja q ovat alkulukuja ja jos $k \equiv 2 \bmod 3$, täytyy olla joko $p^2 \equiv 1$ (ja $q \equiv 0$ ei voi olla alkuluku) tai $p^2 \equiv 3$ ($p = 3$ on ainoa mahdollisuus). Kokeillaan lukuja $k = 6n + 2$. Nämä ovat parillisia, $k \equiv 2$, ja yhtälöstä $k = q - p^2$ seuraa $p = 3$, eli $q = 6n + 11$. Nyt jos $n = 11m$, luku q ei voi olla alkuluku. Siis luvut, jotka ovat muotoa $k = 66n + 2$, ovat tehtävässä kysyttyjä lukuja.

99.20. Lauseke $a^2 - b^2 + c^2 - d^2$ on pariton, joten yhden alkuluvuista on oltava parillinen. Pienin luvuista on d, joten $d = 2$. Alaspäin arvioimalla $1749 = a^2 - b^2 + c^2 - d^2 > 9b^2 - b^2 + 4d^2 - d^2 = 8b^2 + 12$, eli $b^2 < \frac{1737}{8} < 218 < 15^2$, joten $b \leq 13$. Lisäksi epäyhtälöstä $4 = 2d < c < \frac{b}{2} = \frac{13}{2}$ saadaan $c = 5$. Mahdolliset vaihtoehdot ovat $b = 11$ tai $b = 13$. Kokeilemalla $b = 11$ saadaan $a^2 = 1849 = 43^2$. Jos $b = 13$, saadaan $a^2 = 1897$, joka ei ole kokonaisluvun neliö. Ainoat luvut, jotka toteuttavat yhtälön ovat $a = 43$, $b = 11$, $c = 5$ ja $d = 2$, joista $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1999$.