

45. Kansainväliset Matematiikkaolympialaiset

Toinen päivä

Tiistai, 13. heinäkuuta 2004

Tehtävä 4. Olkoon $n \geq 3$ kokonaisluku ja olkoot t_1, t_2, \dots, t_n positiivisia reaalilukuja, joille on voimassa

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \dots + t_n) \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} \right).$$

Osoita, että t_i, t_j, t_k ovat kaikilla $i, j, k, 1 \leq i < j < k \leq n$, kolmion sivujen pituuksia.

Tehtävä 5. Kuperan nelikulmion $ABCD$ lävistäjä BD ei ole kulman ABC eikä kulman CDA puolittaja. Piste P on nelikulmion $ABCD$ sisällä ja toteuttaa ehdot

$$\angle PBC = \angle DBA \quad \text{ja} \quad \angle PDC = \angle BDA.$$

Todista, että $ABCD$ on jännelikulmio, jos ja vain jos $AP = CP$.

Tehtävä 6. Positiivista kokonaislukua kutsutaan *vuorottelevaksi*, jos sen kymmenjärjestelmäesityksessä jokaisesta kahdesta peräkkäisestä numerosta toinen on parillinen ja toinen pariton.

Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut, joilla on vuorotteleva monikerta.

Kokeen kesto aika 4 tuntia 30 minuuttia.

Jokaisen tehtävän enimmäispistemäärä on 7.