

12. heinäkuuta 2006

Tehtävä 1. Kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste on I . Kolmion sisäpiste P toteuttaa ehdon

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Osoita, että $AP \geq AI$ ja että yhtäsuuruus vallitsee, jos ja vain jos $P = I$.

Tehtävä 2. Kutsumme säännöllisen 2006-kulmion P lävistäjää *hyväksi janaksi*, jos sen päätepisteet jakavat P :n piirin kahteen osaan, joista kumpikin koostuu parittomasta määrästä P :n sivuja. Myös P :n sivuja pidetään *hyvinä janoina*.

Monikulmio P jaetaan kolmioiksi 2003:lla lävistäjällä, jotka eivät leikkaa toisiaan P :n sisällä. Määritä sellaisten jaossa syntyvien tasakylkisten kolmioiden, joiden sivuista kaksi on hyviä janoja, suurin mahdollinen lukumäärä.

Tehtävä 3. Määritä pienin reaaliluku M , jolle epäyhtälö

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

toteutuu kaikilla reaaliluvuilla a , b ja c .

*Työaika 4 tuntia 30 minuuttia.
Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on 7.*

13. heinäkuuta 2006

Tehtävä 4. Määritä kaikki kokonaislukuparit (x, y) , jotka toteuttavat yhtälön

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Tehtävä 5. Kokonaislukukertoimisen polynomin P aste on n , $n > 1$. Olkoon k mielivaltainen positiivinen kokonaisluku. Tarkastellaan polynomia

$$Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots)),$$

missä P esiintyy k kertaa. Todista, että on olemassa enintään n kokonaislukua t , joille pätee $Q(t) = t$.

Tehtävä 6. Liitetään jokaiseen kuperan monikulmion P sivuun b suurimman sellaisen kolmion ala, joka on kokonaan P :n sisällä ja jonka yksi sivu on b . Osoita, että kaikkiin P :n sivuihin liitettyjen alojen summa on ainakin kaksi kertaa P :n ala.

*Työaika 4 tuntia 30 minuuttia.
Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on 7.*