

**Toinen päivä, 26. heinäkuuta 2007**

**4. tehtävä.** Kolmion  $ABC$  kulman  $BCA$  puolittaja leikkaa kolmion ympäri piirretyn ympyrän myös pisteessä  $R$ , kolmion sivun  $BC$  keskinormaalilin pisteessä  $P$  ja sivun  $AC$  keskinormaalilin pisteessä  $Q$ . Sivun  $BC$  keskipiste on  $K$  ja sivun  $AC$  keskipiste on  $L$ . Osoita, että kolmioilla  $RPK$  ja  $RQL$  on sama ala.

**5. tehtävä.** Olkoot  $a$  ja  $b$  positiivisia kokonaislukuja. Todista, että jos luku  $4ab - 1$  on luvun  $(4a^2 - 1)^2$  tekijä, niin  $a = b$ .

**6. tehtävä.** Olkoon  $n$  positiivinen kokonaisluku. Tarkastellaan kolmiulotteisen avaruuden  $(n + 1)^3 - 1$  pistettä sisältävää joukkoa

$$S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}.$$

Mikä on pienin määrä tasoja, joiden yhdiste sisältää joukon  $S$  pisteet, muttei pistettä  $(0, 0, 0)$ ?

Työaika  $4\frac{1}{2}$  tuntia.

Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on 7.