

Ensimmäinen päivä, 25. heinäkuuta 2007

1. tehtävä. On annettu reaaliluvut a_1, a_2, \dots, a_n . Jokaiselle $i, 1 \leq i \leq n$, määritellään

$$d_i = \max\{a_j \mid 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j \mid i \leq j \leq n\}.$$

Olkoon

$$d = \max\{d_i \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Osoita, että mielivaltaisille reaaliluvuille $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ pätee

$$\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \quad (*)$$

(b) Osoita, että on olemassa reaaliluvut $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, joille epäyhtälössä (*) vallitsee yhtäsuuruus.

2. tehtävä. Pisteet A, B, C, D ja E sijaitsevat niin, että $ABCD$ on suunnikas ja $BCED$ on jännelikulmio. Suora ℓ kulkee pisteen A kautta. Oletetaan, että ℓ leikkaa janan DC sen sisäpisteessä F ja suoran BC pisteessä G . Oletetaan, että $EF = EG = EC$. Todista, että ℓ on kulman DAB puolittaja.

3. tehtävä. Matematiikkakilpailun osallistujista jotkut ovat toistensa ystäviä; ystävyys on aina molemminpuolista. Sanomme, että jokin kilpailijoiden joukko on *klikki*, jos kaikki sen jäsenet ovat toistensa ystäviä. (Eryityisesti joukot, joissa on vähemmän kuin kaksi alkioita ovat klikkejä.) Sanomme klikin jäsenten lukumäärää klikin *kooksi*.

Tiedetään, että tässä kilpailussa klikkien suurin koko on parillinen. Todista, että kilpailijat voidaan jakaa kahteen huoneeseen niin, että suurikokoisin toisessa huoneessa oleva klikki on samankokoinen kuin suurikokoisin toisessa huoneessa oleva klikki.

Työaika $4 \frac{1}{2}$ tuntia.

Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on 7.

Toinen päivä, 26. heinäkuuta 2007

4. tehtävä. Kolmion ABC kulman BCA puolittaja leikkaa kolmion ympäri piirretyn ympyrän myös pisteessä R , kolmion sivun BC keskinormaalilin pisteessä P ja sivun AC keskinormaalilin pisteessä Q . Sivun BC keskipiste on K ja sivun AC keskipiste on L . Osoita, että kolmioilla RPK ja RQL on sama ala.

5. tehtävä. Olkoot a ja b positiivisia kokonaislukuja. Todista, että jos luku $4ab - 1$ on luvun $(4a^2 - 1)^2$ tekijä, niin $a = b$.

6. tehtävä. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Tarkastellaan kolmiulotteisen avaruuden $(n + 1)^3 - 1$ pistettä sisältävää joukkoa

$$S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}.$$

Mikä on pienin määrä tasoja, joiden yhdiste sisältää joukon S pisteet, muttei pistettä $(0, 0, 0)$?

Työaika $4\frac{1}{2}$ tuntia.

Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on 7.