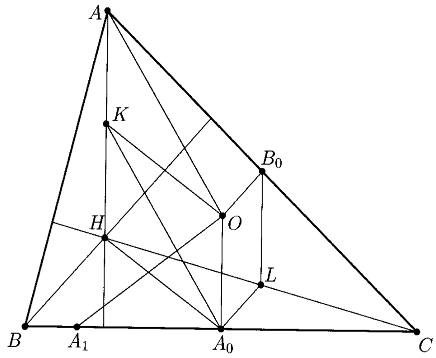
Kansainväliset matematiikkaolympialaiset 2008

Tehtävät ja ratkaisuhahmotelmat

1. Teräväkulmaisen kolmion ABC korkeusjanojen leikkauspiste on H. Pisteen H kautta kulkeva ympyrä, jonka keskipiste on sivun BC keskipiste, leikkaa suoran BC pisteissä A_1 ja A_2. Vastaavasti pisteen H kautta kulkeva ympyrä, jonka keskipiste on sivun CA keskipiste, leikkaa suoran CA pisteissä B_1 ja B_2, ja pisteen H kautta kulkeva ympyrä, jonka keskipiste on sivun AB keskipiste, leikkaa suoran AB pisteissä C_1 ja C_2. Osoita, että pisteet A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 ja C_2 ovat samalla ympyrällä.

Ratkaisu. Olkoon A_0 sivun BC keskipiste ja B_0 sivun AC keskipiste. Ainoa piste, joka voi olla tehtävässä vaaditun ympyrän keskipiste, on janojen A_1A_2, B_1B_2 ja C_1C_2 keskinormaalien leikkauspiste. Sanotut keskinormaalit ovat myös kolmion sivujen keskinormaaleja, ja ne leikkaavat kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipisteessä O. Olkoon kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän säde R. Koska $A_0H = A_0A_1$, Pythagoraan lauseesta saadaan



$$OA_1^2 = OA_0^2 + A_0A_1^2 = OA_0^2 + A_0H^2. \qquad (1)$$

Olkoot K ja L janojen AH ja CH keskipisteet. Kolmioista BCH ja CAH saadaan $A_0L \| BH$ ja $B_0L \| AH$. Koska $BH \perp AC$ ja $OB_0 \perp AC$, niin $A_0L \| OB_0$. Vastaavasti $B_0L \| OA_0$. Nelikulmio A_0LB_0O on siis suunnikas, joten $OA_0 = B_0L = KH$. Koska $KH \| OA_0$, HA_0OK on suunnikas. Samoin KA_0OA on suunnikas. Siis $A_0K = OA = R$. Sovelletaan suunnikaslausetta suunnikkaaseen HA_0OK; saadaan

$$2(OA_0^2 + A_0H^2) = OH^2 + A_0K^2 = OH^2 + R^2. \qquad (2)$$

Yhtälöistä (1) ja (2) saadaan heti $OA_1^2 = \frac{1}{2}(OH^2 + R^2)$. Tiedetään, että $OA_1 = OA_2$. Toisaalta sama lasku antaa saman arvon suureille OB_1^2 ja OC_1^2 ja $OB_1 = OB_2$, $OC_1 = OC_2$. Kysytyt pisteet ovat siis kaikki samalla O-keskisellä ympyrällä.

2. (a) Todista, että

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

kaikille reaaliluvuille x, y ja z, jotka ovat eri suuria kuin 1 ja joille pätee $xyz = 1$.

(b) Osoita, että äärettömän monella rationaalilukukolmikolla x, y, z, missä kaikki luvut ovat eri suuria kuin 1 ja $xyz = 1$, edellisessä epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus.

Ratkaisu. (a) Tehdään muuttujanvaihto

$$\frac{x}{x-1} = a, \quad \frac{y}{y-1} = b, \quad \frac{z}{z-1} = c$$

eli

$$x = \frac{a}{a-1}, \quad y = \frac{b}{b-1}, \quad z = \frac{c}{c-1}.$$

On siis todistettava, että $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$, kun $abc = (a-1)(b-1)(c-1)$, kun a, b, $c \neq 1$. Mutta viimeinen yhtälö on yhtäpitävä yhtälöiden

$$\begin{aligned} a + b + c - 1 &= ab + bc + ca, \\ 2(a + b + c - 1) &= (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2), \\ a^2 + b^2 + c^2 - 2 &= (a + b + c)^2 - 2(a + b + c), \\ a^2 + b^2 + c^2 - 1 &= (a + b + c - 1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Väite on siis tosi.

(b) Edellisen yhtälöketjun viimeinen yhtälö osoittaa, että alkuperäisessä yhtälössä vallitsee yhtäsuuruus jos ja vain jos $a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c = 1$. Koska $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$, yhtäsuuruuden ehto on yhtälöiden $a + b + c = 1$ ja $ab + bc + ca = 0$ yhtäaikainen voimassaolo, sekä a, b, $c \neq 1$. Kun yhtälöistä eliminoidaan c, saadaan $a^2 + ab + b^2 = a + b$. Tulkitaan tämä b:n toisen asteen yhtälöksi. Yhtälön diskriminantti on $D = (a-1)^2 - 4a(a-1) = (1-a)(1+3a)$. Saamme rationaalisia ratkaisuja, jos valitsemme a:n niin, että $1-a$ ja $1+3a$ ovat rationaaliluvun neliöitä; tällöin diskriminantti ja b ovat myös rationaalisia ja samoin $c = 1 - a - b$. Asetetaan $a = \dfrac{k}{m}$, missä k ja m ovat kokonaislukuja. Jos $m = k^2 - k + 1$, niin $m - k = (k-1)^2$ ja $m + 3k = (k+1)^2$. Tällöin $D = \dfrac{(k^2-1)^2}{m^2}$ ja $b = \dfrac{1}{2m}(m - k \pm (k^2 - 1))$ ja $c = \dfrac{1-k}{m}$. Kun $k \neq 1$, niin a, b, $c \neq 1$. Kun k käy läpi luonnolliset luvut > 1, saadaan tällä tavoin äärettömän monta yhtälön $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ toteuttavaa rationaalilukukolmikkoa (a, b, c) ja samoin äärettömän monta tehtävän yhtälön toteuttavaa rationaalilukukolmikkoa (x, y, z).

3. Osoita, että on olemassa äärettömän monta sellaista positiivista kokonaislukua n, jolle luvulla $n^2 + 1$ on lukua $2n + \sqrt{2n}$ suurempi alkutekijä.

Ratkaisu. Tarkastellaan kokonaislukua $k \geq 20$. Olkoon p jokin luvun $(k!)^2 + 1$ alkutekijä. Silloin $p > 20$ ja luvuilla p ja $k!$ ei ole yhteisiä tekijöitä. Olkoon $x \equiv k! \bmod p$ ja $0 < x < p$. Jos $p/2 > x$, niin $p - x < p/2$ ja $p - x \equiv -k! \bmod p$. Joka tapauksessa on olemassa n, $0 < n < p/2$ niin, että $n^2 \equiv (k!)^2 \equiv -1 \bmod p$. p on siis luvun $n^2 + 1$ tekijä. Tästä seuraa edelleen $(p - 2n)^2 = p^2 - 4pn + 4n^2 \equiv 4n^2 \equiv -4 \bmod p$. Siis $(p - 2n)^2 \geq p - 4$ eli $p \geq 2n + \sqrt{p-4} > 2n + \sqrt{2n}$, jos $p > 20$, sillä tällöin $p - 4 \geq 2n + \sqrt{p-4} - 4 > 2n$. On vielä osoitettava, että ehdon täyttäviä lukuja n on äärettömän monta. Olkoon n ja p edellä tuotetut luvut. Olkoon q jokin luvun $(p^2)! + 1$ alkutekijä. Samoin kuin edellä löydetään n', $n' < q/2$, niin että q on $n'^2 + 1$:n tekijä ja $q > 2n' + \sqrt{2n'}$. Toisaalta $n'^2 + 1 > q > p^2 > 4n^2 > n^2 + 1$, joten $n' > n$. Jokaista ehdon täyttävää kokonaislukua kohden löytyy siis suurempi ehdon täyttävä kokonaisluku, joten ehdon täyttäviä kokonaislukuja on äärettömän monta.

4. Määritä kaikki funktiot $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ (f on siis positiivisten reaalilukujen joukossa määritelty funktio, jonka arvot ovat positiivisia reaalilukuja), joille pätee

$$\frac{\big(f(w)\big)^2 + \big(f(x)\big)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla w, x, y ja z, jotka toteuttavat ehdon $wx = yz$.

Ratkaisu. Olkoon f jokin ehdon toteuttava funktio. Asettamalla $w = x = y = z = 1$ saadaan

$$\frac{2f(1)^2}{2f(1)} = 1,$$

josta seuraa $f(1) = 1$. Olkoon sitten $w > 0$, $x = 1$, $y = z = \sqrt{w}$. Nyt

$$\frac{f(w)^2 + 1}{2f(w)} = \frac{w^2 + 1}{2w}.$$

Yhtälö sievenee muotoon

$$(wf(w) - 1)(f(w) - w) = 0.$$

Siis joko $f(w) = w$ tai $f(w) = \dfrac{1}{w}$. On ilmeistä, että funktiot $f(x) = x$ ja $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (kaikilla $x > 0$) toteuttavat yhtälön. Osoitetaan, että muita yhtälön toteuttavia funktioita ei ole. Tehdään vastaoletus, jonka mukaan tällainen funktio f olisi olemassa. Silloin olisi olemassa positiiviset luvut a ja b, a, $b \neq 1$, niin että $f(a) = \dfrac{1}{a}$ ja $f(b) = b$. Asetetaan $w = a$, $x = b$, $y = z = \sqrt{ab}$. Saadaan

$$\frac{\dfrac{1}{a^2} + b^2}{2f(ab)} = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$$

eli

$$f(ab) = \frac{ab(a^{-2} + b^2)}{a^2 + b^2}.$$

Mutta $f(ab)$ on joko ab tai $\dfrac{1}{ab}$. Edellisessä tapauksessa on oltava $a^{-2} = a^2$ eli $a = 1$. Jälkimmäisessä tapauksessa $a^2b^2(a^{-2} + b^2) = a^2 + b^2$, josta seuraa $b = 1$. Kumpikin vaihtoehto johti ristiriitaan, joten vastaoletus on väärä.

5. Olkoot n ja k, $k \geq n$, positiivisia kokonaislukuja, ja olkoon $k - n$ parillinen. Olkoon annettuna $2n$ lamppua, jotka on varustettu numeroin $1, 2, \ldots, 2n$ ja joista jokainen voi *palaa* tai olla *pimeänä*. Aluksi kaikki lamput ovat pimeinä. Tarkastellaan askelista koostuvia jonoja. Jokaisella askeleella jonkin lampun tila vaihdetaan päinvastaiseksi (lamppu sytytetään tai sammutetaan).

Olkoon N kaikkien sellaisten k:sta askeleesta muodostuvien jonojen lukumäärä, jotka johtavat tilaan, jossa lamput $1, \ldots, n$ palavat ja lamput $n + 1, \ldots, 2n$ ovat pimeinä.

Olkoon M kaikkien sellaisten k:sta askeleesta muodostuvien jonojen lukumäärä, jotka johtavat tilaan, jossa lamput $1, \ldots, n$ palavat ja lamput $n+1, \ldots, 2n$ ovat pimeinä, mutta lamppuja $n+1, \ldots, 2n$ ei ole kertaakaan sytytetty.

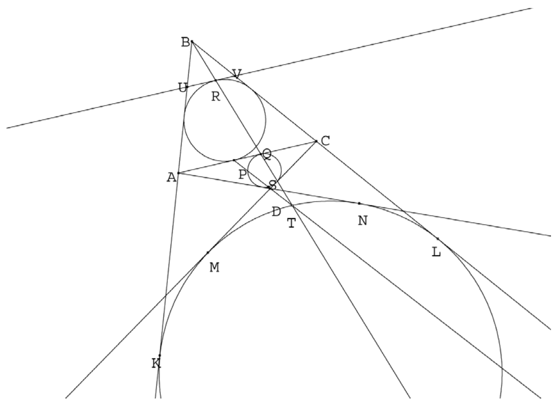
Määritä suhde N/M.

Ratkaisu. Sanomme, että jono, jolla päästään alkutilasta tehtävän lopputilaan, on sallittu jono, ja sallittu jono, jolla päästään lopputilaan niin, että minkään lampun $n+1, \ldots, 2n$ tilaa ei muuteta, on rajoitettu jono. Rajoitettuja jonoja on olemassa, koska on mahdollista sytyttää kukin lampuista $1, \ldots, n$ ja sen jälkeen sytyttää ja sammuttaa lamppua 1 $\frac{1}{2}(k-n)$ kertaa. Tarkastellaan nyt mielivaltaista rajoitettua jonoa X ja mielivaltaista lamppua p, $1 \leq p \leq n$. Oletetaan, että jonossa tämän lampun tilaa on muutettu k_p kertaa; k_p on pariton. Valitaan mielivaltainen parillinen määrä jonon sellaisia askelia, joissa lampun p tilaa vaihdetaan ja korvataan jokainen askeleella, jossa lampun $n+p$ tilaa vaihdetaan. Täten saadaan 2^{k_p-1} jonoa, joiden askeleet yhtyvät jonon X askeliin muuten kuin valittujen p:n tilaa muuttavien askelten kohdalla. (k_p-alkioisella joukolla on 2^{k_p-1} parillisalkioista osajoukkoa.) Samalla tavalla voidaan jokaiseen lamppuun $1, \ldots, n$ liittyvät tilanvaihdot siirtää lampun $n+1, \ldots 2n$ tilanvaihdoiksi. Rajoitettuun jonoon X liittyy tällä tavoin $2^{k_1-1} \cdot 2^{k_2-1} \cdots 2^{k_n-1} = 2^{k-n}$ erilaista sallittua jonoa.

Osoitetaan kääntäen, että jokainen sallittu jono Y saadaan rajoitetusta jonosta kuvatulla tavalla: korvataan jokainen lampun $q > n$ tilan muuttava Y:n askel lampun $q-n$ tilan muuttavalla askeleella. Näin saadaan eräs rajoitettu jono X. Koska jonossa Y lamppujen $q > n$ tilaa on muutettu parillinen määrä kertoja, jonon Y ja jonon X lopputilat ovat samat. Selvästi Y saadaan X:stä edellä kuvatulla menetelmällä. Jokaista rajoitettua jonoa kohden on siis tasan 2^{k-n} samaan lopputilaan johtavaa sallittua jonoa. Siis $N/M = 2^{k-n}$.

6. Kuperassa nelikulmiossa $ABCD$ on $BA \neq BC$. Kolmioiden ABC ja ADC sisään piirretyt ympyrät ovat ω_1 ja ω_2. Oletetaan, että on olemassa ympyrä ω, joka sivuaa puolisuoraa BA eri puolella A:ta kuin B ja puolisuoraa BC eri puolella C:tä kuin B ja joka myös sivuaa suoria AD ja CD. Osoita, että ympyröiden ω_1 ja ω_2 yhteisten ulkopuolisten tangenttien leikkauspiste on ympyrällä ω.

Ratkaisu. Väitteen todistamiseksi riittää osoittaa, että ympyröiden ω_1 ja ω_2 välisen homotetiakuvauksen homotetiakeskus on ympyrällä ω. Osoitetaan ensin, että ympyrän ω olemassa olo asettaa rajoituksen nelikulmion $ABCD$ muodolle. Olkoot ympyrän ω ja suorien BA, BC, CD ja AD sivuamispisteet K. L, M ja N. Nyt $AB + AD = (BK - AK) + (AN - DN) = BL - AN + AN - DM = BL - (CM - CD) = BL - CL + CD = BC + CD$.



Olkoon nyt P ympyrän ω_1 ja sivun AC yhteinen piste; olkoon R ympyrän ω_1 P:n kautta piirretyn halkaisijan toinen päätepiste ja Q BR:n ja AC:n leikkauspiste. Olkoot vielä U ja V R:n kautta piirretyn ω_1:n tangentin ja suorien BA ja BC leikkauspisteet. B-keskinen homotetia, joka kuvaa UV:n janaksi AC, kuvaa ympyrän ω_1, joka on kolmion BUV sivuun UV liittyvä sivuympyrä, kolmion BAC sivuun AC liittyväksi sivuympyräksi. Q on näin ollen viimemainitun sivuympyrän ja sivun AC yhteinen piste. On helppo nähdä (ja tunnettua), että kolmion XYZ sisään piirretyn ympyrän sivuamispisteen etäisyys kolmion kärjestä X on sama kuin sivuun XY liittyvän sivuympyrän sivuamispisteen etäisyys kärjestä Y. Näin ollen $AP = CQ$.

Kolmion sisään piirretyn ympyrän sivuamispisteen ja kolmion kärjen etäisyys on laskettavissa tunnetun (ja helposti johdettavan) kaavan avulla. Sen mukaan $AP = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$. Vastaavasti kolmion ADC sisään piirretyn ympyrän ja sivun AC yhteiselle pisteelle Q' saadaan $CQ' = \frac{1}{2}(AC + CD - AD)$. Koska edellä sanotun mukaan tehtävän nelikulmiolle pätee $AB - BC = CD - AD$, on $CQ' = AP = CQ$. Q on siis ympyrän ω_2 ja suoran AC yhteinen piste. Vastaavalla tavalla nähdään, että ympyrän ω_2 pisteeseen Q piirretyn halkaisijan toinen päätepiste S , D ja P ovat samalla suoralla.

Olkoon sitten T ympyrän ω AC:n suuntaisen tangentin sivuamispiste (tarkemmin sanoen se niistä, joka on lähempänä suoraa AC). Homotetia, jonka keskus on B ja homotetiasuhde $\frac{BT}{PR}$ kuvaa ympyrän ω_1 ympyräksi ω. B, R, Q ja T ovat siis samalla suoralla. Vastaavasti homotetia, jonka keskus on D ja homotetiasuhde $-\frac{DT}{DS}$ kuvaa ympyrän ω_2 ympyräksi ω. P, S, D ja T ovat siis samalla suoralla. Mutta koska ympyröiden ω_1 ja ω_2 halkaisijat PR ja SQ ovat yhdensuuntaiset, ne kuvautuvat toisilleen T-keskisessä homotetiassa. Tästä seuraa, että itse ympyrät ω_1 ja ω_2 kuvautuvat toisilleen tässä homotetiassa. Mutta tällöin T:n on oltava ympyröiden yhteisten ulkopuolisten tangenttien leikkauspiste, ja todistus on valmis.