Kansainväliset matematiikkaolympialaiset 2009

Tehtävien ratkaisuja

1. Tehtävän oletuksen perusteella

$$a_i a_{i+1} \equiv a_i \bmod n,$$

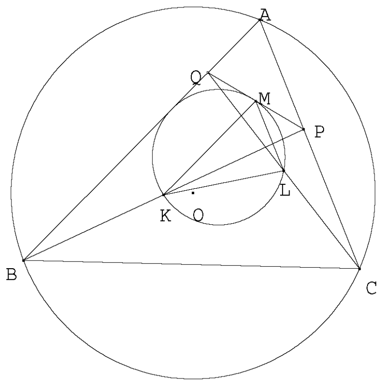
kun $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Siis

$$a_1 \cdots a_{k-1} a_k \equiv a_1 \cdots a_{k-1} \equiv \cdots \equiv a_1 \bmod n.$$

Tehdään vastaoletus $a_k a_1 \equiv a_k \bmod n$. Silloin

$$a_1 \equiv a_1 \cdots a_{k-1} a_k = a_k a_1 \cdots a_{k-1} \equiv a_k a_1 \cdots a_{k-2} \equiv \cdots \equiv a_k a_1 \equiv a_k \bmod n.$$

Mutta a_1, $a_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, joten on oltava $a_1 = a_k$. Oletuksen mukaan a_1 ja a_k ovat eri lukuja. Vastaoletus johti ristiriitaan, joten se on väärä.



2. Koska M ja L ovat kolmion CQP sivujen keskipisteet, $ML \| PC$. Siis $\angle LMP = \angle MPA$. Koska QP on ympyrän Γ tangentti, $\angle LMP = \angle MKL$. Siis $\angle MKL = \angle QPA$. Vastaavasti osoitetaan, että $\angle MLK = \angle AQP$. Kolmiot AQP ja MLK ovat siis yhdenmuotoiset. Siis

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{MK}{ML} = \frac{QB}{PC}.$$

Mutta tämä merkitsee, että $AP \cdot PC = AQ \cdot QB$. Pisteiden P ja Q potenssit kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän suhteen on siis samat. Molemmat pisteet ovat näin ollen samalla etäisyydellä ympyrän keskipisteestä O.

3. Olkoon aritmeettisen jonon (s_{s_n}) peräkkäisten termien erotus D. Merkitään $d_n = s_{n+1} - s_n$. Osoitetaan, että d_n on vakio. Osoitetaan ensin, että luvut d_n ovat rajoitettuja. Koska (s_n) on kasvava kokonaislukujono, $d_n \geq 1$ kaikilla n. Siis

$$d_n = s_{n+1} - s_n \leq d_{s_n} + d_{s_n+1} + \cdots + d_{s_{n+1}-1} = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = D.$$

Siitä, että jono (d_n) on rajoitettu, seuraa, että on olemassa

$$m = \min\{d_n \mid n = 1, 2, \ldots\}, \quad M = \max\{d_n \mid n = 1, 2, \ldots\}.$$

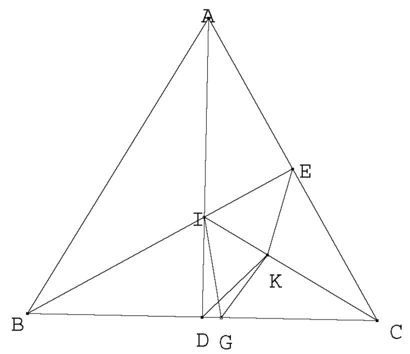
Väite tulee todistetuksi, jos osoitetaan, että $m = M$. Tehdään vastaoletus $m < M$. Jollain n on $m = d_n = s_{n+1} - s_n$. Nyt

$$D = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = s_{s_n+m} - s_{s_n} = d_{s_n} + d_{s_n+1} + \cdots + d_{s_n+m-1} \le nM, \tag{1}$$

koska summassa on m termiä ja niistä jokainen on $\le M$. Jollain n' on $d_{n'} = M$. Samoin kuin edellä saadaan

$$D = s_{s_{n'}+M} - s_{s_{n'}} = d_{s_{n'}} + d_{s_{n'}+1} + \cdots + d_{s_{n'}+M-1} \ge Mm. \tag{2}$$

Siis $D = mM$ ja jos $d_n = m$, niin $d_{s_n} = d_{s_n+1} = \cdots = d_{s_{n+1}-1} = M$ ja vastaavasti jos $d_n = M$, niin $d_{s_n} = d_{s_n+1} = \cdots = d_{s_{n+1}-1} = m$. Kaikille n pätee $s_n \ge s_1 + (n-1) \ge n$. Jos $d_n = m$, on oltava $s_n > n$. Jos nimittäin olisi $s_n = n$, olisi $m = d_n = d_{s_n} = M$, mikä olisi ristiriidassa oletuksen $m < M$ kanssa. Samoin, jos $d_n = M$, niin $d_{s_n} = m$ ja $s_n > n$. On siis olemassa aidosti kasvava jono n_1, n_2, ..., jolle $d_{s_{n_1}} = M$, $d_{s_{n_2}} = m$, $d_{s_{n_3}} = M$, $d_{s_{n_4}} = m$ jne. Mutta jono d_{s_1}, d_{s_2}, ... on aritmeettisten jonojen s_{s_1+1}, s_{s_2}, ... ja s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, ... termien erotusjono ja siis myös aritmeettinen jono. Sillä voi olla ei-kasvava ja ei-vähenevä osajono vain, jos se on vakiojono. Ei siis voi olla $m < M$, ja todistus on valmis.



4. Olkoon I kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Koska kolmio ABC on tasakylkinen, $AD \perp BC$. Siis $\angle IDK = 45°$. Olkoon G pisteen E peilikuva peilauksessa yli suoran CI. Koska CI on kulman BCA puolittaja, G on puolisuoralla CB. Jos $G = D$, jana EI on peilautunut janaksi DI, joten $\angle IEC = 90°$. Mutta silloin kolmion ABC B:stä piirretyt korkeusjana ja kulmanpuolittaja yhtyvät, ja $BC = BA$. Kolmio on tasasivuinen ja $\angle BAC = 60°$. Oletetaan sitten, että $G \ne D$ ja että G on D:n ja C:n välissä. Nyt $\angle IGK = \angle IEK = \angle BEK$. Jos $\angle BEK = 45°$, niin $\angle IGK = \angle IDK$. Pisteet I, D, G ja K ovat samalla ympyrällä. Tällöin $\angle EIK = \angle GIK = \angle GDK = 45°$, $\angle BIC = 180° - \angle EIK = 135°$, $2 \cdot \angle BCI = 45°$, $2 \cdot \angle BCA = 90°$ ja $\angle BAC = 90°$. Jos G olisi B:n ja D:n välissä, olisi samoin $\angle EIK = \angle GIK = 180° - \angle GDK = 180° - 135° = 45°$, ja saataisiin $\angle BAC = 90°$. (Voidaan kuitenkin helposti osoittaa, että G ei voi olla janalla BD.) Kulman $\angle BAC$ ainoat mahdolliset arvot ovat siis $60°$ ja $90°$. On vielä varmimstettava, että näillä arvoilla todellakin $\angle BEK = 45°$. Olkoon $\angle BAC = 60°$. Silloin $BE \perp AC$ ja peilaus yli IC:n kuvaa D:n E:lle. Koska $\angle IDK = 45°$, on $\angle IEK = 45°$. Olkoon $\angle BAC = 90°$. Silloin $\angle AIE = \angle BID = \angle BEA = 90° - 22{,}5°$ ja $\angle EIK = 180° - 2 \cdot \angle BID = 45°$. Kolmio AIE on tasakylkinen, joten peilauksessa yli AK:n I ja E vastaavat toisiaan. Siis $\angle IEK = \angle EIK = 45°$.

5. Osoitetaan, että tehtävän ainoa ratkaisu on funktio $f(x) = x$. Varmistutaan ensin, että tämä funktio kelpaa. Olkoon siis $f(x) = x$ ja olkoot a ja b positiivisia kokonaislukuja.

Kolmion sivujen pituuksiksi ovat tarjolla a, b ja $c = a + b - 1$. Nyt $c < a + b$, mutta $c \geq a \geq 1$ ja $c \geq b \geq 1$. Silloin $c > |a - b|$, joten kolmio, jonka sivut ovat a, b ja c on olemassa.

Osoitetaan sitten, että $f(x) = x$ on ainoa ratkaisu. Tähän päästään soveltamalla toistuvasti kolmioepäyhtälöä, jonka mukaan kolmion kahden sivun pituuksien summa on aidosti suurempi kuin kolmas sivu. Osoitetaan ensin epäsuorasti, että $f(1) = 1$. Jos olisi $f(1) = 1+m > 1$, muodostaisi kaikilla a kolmikko 1, $f(a)$, $f(a+m)$ kolmion sivujen pituudet. Silloin olisi $f(a)-1 < f(a+f(1)-1) < f(a)+1$. Koska f:n arvot ovat kokonaislukuja, on välttämättä $f(a+f(1)-1) = f(a)$ kaikilla a. Jos olisi $f(1)-1 = m > 0$, f voisi saada enintään m eri arvoa $f(1)$, $f(2)$, $\ldots$, $f(m)$, ja jokin niistä olisi suurin; olkoon tämä suurin M. Mutta silloin ei olisi kolmiota, jonka sivut olisivat $2M$, $f(b)$ ja $f(b+f(2M)-1)$. Onkin oltava $m = 0$ eli $f(1) = 1$.

Osoitetaan seuraavaksi, että f on niin sanottu *involuutio* eli että $f(f(a)) = a$ kaikilla a. Tämä seuraa siitä, että a, $1 = f(1)$ ja $f(1 + f(a) - 1) = f(f(a))$ ovat kolmion sivut. Involuutiokuvaukset ovat niin sanottuja injektioita: ne saavat eri pisteissä eri arvot. Jos nimittäin $f(a) = f(b)$, niin $a = f(f(a)) = f(f(b)) = b$. Käytretään hyväksi tätä ominaisuutta.

Koska f on injektio, $f(2) \neq 1$, joten $f(2) = 1 + c$, missä $c \geq 1$. Jos b on mielivaltainen positiivinen kokonaisluku, niin 2, $f(b)$ ja $f(b + f(2) - 1) = f(b + c)$ ovat kolmion sivut, joten $f(b)-2 < f(b+c) < f(b)+2$ tai $f(b)-1 \leq f(b+c) \leq f(b)+1$. Koska $f(b+c) \neq f(b)$, niin $f(b + c) = f(b) \pm 1$. Koska $f(1 + c) = f(f(2)) = 2$, $f(1 + 2c) = f(1 + c) \pm 1 = 2 \pm 1$. Injektiivisyyden vuoksi ei voi olla $f(1 + 2c) = 1$. Siis $f(1 + 2c) = 3$. Induktiolla nähdään helposti, että $f(1 + kc) = k + 1$ kaikilla luonnollisilla luvuilla k. Jos olisi $c > 1$, olisi $f(c) = f(1 + kc)$ jollain luonnollisella luvulla k. Tämä on mahdotonta, joten on oltava $c = 1$. Tästä seuraa, että $f(1 + k) = 1 + k$ kaikilla $k \geq 0$.

6. Olkoon heinäsirkan hyppyjärjestys $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, jos sen peräkkäisten hyppyjen pituudet ovat a_{i_1}, a_{i_2}, $\ldots$, a_{i_n}. Todistetaan väite induktiolla. Väite on ilmeisen tosi, kun $n = 1$. Olkoon $n > 1$ ja olkoon väite tosi kaikilla n:ää pienemmillä kokonaisluvuilla. Voidaan olettaa, että annetut luvut toteuttavat ehdon $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Olkoon $d = \min M$. Tarkastellan tilannetta sen mukaan, onko $d < a_n$ vai $d \geq a_n$. Oletetaan ensin, että $d < a_n$. Induktio-oletuksen mukaan heinäsirkka pystyy hyppimään $n - 1$:llä hypyllä pisteestä a_n pisteeseen s. Kun sarjaan liitetään hyppy origosta a_n:ään, saadaan vaadittu hyppysarja. Olkoon sitten $a_n = d$. Tarkastellaan n:ää joukkoa, joista jokaisella kahdella on epätyhjä leikkaus: $\{a_n\}$, $\{a_1, a_1 + a_n\}$, $\{a_2, a_2 + a_n\}$, $\ldots$, $\{a_{n-1}, a_{n-1} + a_n\}$. Koska M:ssä on $n - 1$ alkiota, ainakin yksi joukoista ei sisällä yhtään M:n alkiota. Olkoon se $\{a_i, a_i + a_n\}$. Joukossa $M \cap [a_i + a_n, s]$ on enintään $n - 3$ alkiota, koska d, $a_n < a_i + a_n$. Induktio-oletuksen perusteella heinäsirkka voi hypellä pisteestä $a_i + a_n$ (joka ei kuulu joukkoon M) pisteeseen s käyttäen kaikkia muita hypyn pituuksia kuin a_i ja a_n. Jos nyt ensimmäinen hyppy on a_i ja toinen a_n ja sitten tehdään mainitut $n - 3$ hyppyä, saadan vaadittu sarja. Oletetaan sitten, että $d > a_n$. Olkoon $M' = M \setminus \{d\}$. Induktio-oletuksen perusteella heinäsirkka voi hyppiä pisteestä a_n pisteeseen s käymättä joukon M' pisteissä. Olkoon hyppyjärjestys $(i_1, \ldots, i_{n-1})$. Jos tämä reitti ei käy pisteessä d (tällöin on $d > a_n$), niin $(n, i_1, \ldots, i_{n-1})$ on kelvollinen hyppyjärjestys. Muussa tapauksessa voidaan olettaa, että heinäsirkka osuu d:hen hypyllä i_j. Nyt $(i_1, i_2, \ldots, i_j, n, i_{j+1}, \ldots, i_{n-1})$ on myös hyppyjärjestys, joka välttää muut M:n pisteet kuin d:n. Koska $a_{j+1} < a_n$, järjestys $(i_1, i_2, \ldots, i_j, i_{j+1}, n, \ldots, i_{n-1})$ välttää myös d:n. Todistus on valmis.