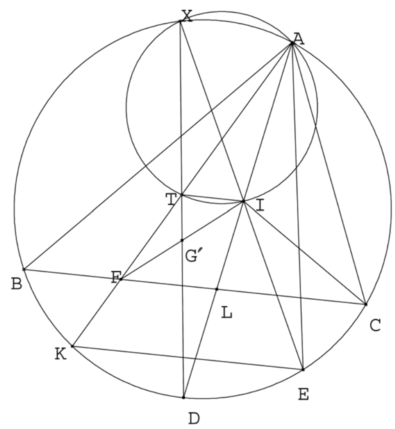
Kansainväliset matematiikkaolympialaiset 2010

Tehtävien ratkaisuja

2010.1. Osoitetaan, että ratkaisuja ovat kaikki funktiot $f(x) = C$, missä C on vakio ja $C = 0$ tai $1 \le C < 2$ ja vain ne. On helppo nähdä, että nämä funktiot toteuttavat tehtävän ehdon. Oletetaan sitten, että f on jokin tehtävän toteuttava funktio. Jos tehtävän ehtoon sijoitetaan $x = 0$, sadaan $f(0) = f(0)\lfloor f(y)\rfloor$. Jos $f(0) = C \ne 0$, on $\lfloor f(y)\rfloor = 1$ kaikilla y, joten tehtävän ehdoksi saadaan $f(\lfloor x\rfloor y) = f(x)$. Kun tähän sijoitetaan $y = 0$, saadaan $f(x) = C$ kaikilla x. Edelleen on oltava $\lfloor f(y)\rfloor = \lfloor C\rfloor = 1$, joten $1 \le C < 2$. Olkoon sitten että $f(0) = 0$. Osoitetaan, että nyt $f(x) = 0$ kaikilla x. Tehdään vastaoletus, että näin ei ole. Oletetaan ensin, että $f(t) \ne 0$ jollain t, $0 < t < 1$. Sijoitetaan tehtävän yhtälöön $x = t$. Saadaan $0 = f(0) = f(t)\lfloor f(y)\rfloor$, joten $\lfloor f(y)\rfloor = 0$ kaikilla y. Jos nyt sijoitetaan $x = 1$ ja $y = t$ tehtävän yhtälöön, saadaan $f(t) = 0$, eli ristiriita. Oletetaan sitten, että $f(z) \ne 0$ jollain z. On olemassa kokonaisluku N siten, että $0 < u = \dfrac{z}{N} < 1$. Nyt $f(z) = f(Nu) = f(\lfloor N\rfloor u) = f(N)f(u) = 0$. Oletus $f(z) \ne 0$ johti ristiriitaan. Siis $f(x) = 0$ kaikilla x, jos $f(0) = 0$.

2010.2. Leikatkoon EI Γ:n myös pisteessä X. Väite tulee todistetuksi, jos osoitetaan, että G on suoralla DX ja edelleen, jos osoitetaan, että suoran DX ja suoran IF leikkauspiste G' on samalla janan IF keskipiste. On siis osoitettava, että $IG' = G'F$. Kun sovelletaan Menelaoksen lausetta kolmioon AIF, nähdään, että

$$\frac{G'F}{G'I} \cdot \frac{DI}{AD} \cdot \frac{TA}{TF} = 1.$$



On siis osoitettava, että

$$\frac{FT}{AT} = \frac{ID}{AD}.$$

Olkoon AF:n ja Γ:n toinen leikkauspiste K. Tehtävän oletuksen nojalla kaaret BK ja CE ovat yhtä suuret. Siis $KE \| BC$. Tehtävän oletuksen nojalla $\angle KAD = \angle DAE$, joten kehäkulmalauseen perusteella $\angle DXE = \angle DAE = \angle KAD$. Tästä seuraa, että $TIAX$ on jännenelikulmio. Siis $\angle ITA = \angle IXA = \angle EKA$, joten $TI\|KE\|BC$. Tästä seuraa

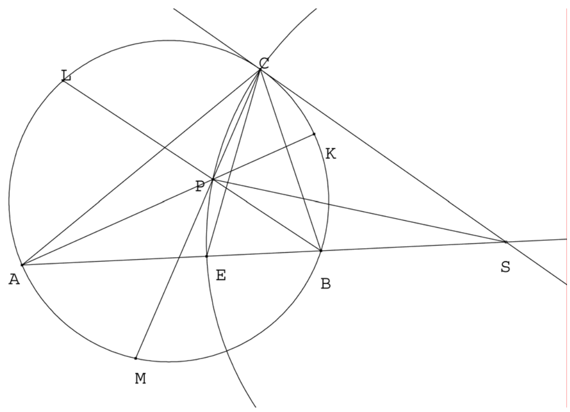
$$\frac{FT}{AT} = \frac{LI}{AI}.$$

Koska CI on kulman BCA puolittaja, $\dfrac{LI}{AI} = \dfrac{CL}{AC}$. Koska AD on kulman BAC puolittaja, $\angle DCB = \angle DAB = \angle DAC$, joten kolmiot ADC ja CDL ovat yhdenmuotoiset (kk). Yhdenmuotoisuudesta seuraa $\dfrac{CL}{AC} = \dfrac{CD}{AD}$. Väitteen todistus on valmis, kun kodetaan, että $CD = ID$. Tämä seuraa siitä, että kulmat DIC ja DCI ovat molemmat samoja kuin kolmion ABC kulmien A ja C puolikkaiden summa, joten DCI on tasakylkinen kolmio.

2010.3. Osoitetaan, että ratkaisuiksi käyvät ainoastaan ja vain funktiot $g(n) = n+c$, missä c on ei-negatiivinen kokonaisluku. On selvää, että nämä funktiot toteuttavat tehtävän ehdon, sillä $(g(m) + n)(g(n) + m) = (m + c + n)(n + c + m) = (m + n + c)^2$. Sen osoittamiseksi, että muita ratkaisuja ei ole, todistetaan ensin aputulos: jos $g(k) - g(\ell)$ on jaollinen alkuluvulla p, niin $k - \ell$ on jaollinen p:llä. Tämän todistamiseksi oletetaan ensin, että $g(k) - g(\ell)$ on jaollinen p^2:lla eli että $g(\ell) = g(k) + p^2a$ jollain kokonaisluvulla a. Valitaan jokin p:llä jaoton kokonaisluku D, joka on suurempi kuin suurempi luvuista $g(\ell)$ ja $g(k)$ ja asetetaan $n = pD - g(k)$. Nyt luvut $n + g(k) = pD$ ja $n + g(\ell) = pD + (g(\ell) - g(k)) = p(D + pa)$ ovat jaollisia p:llä mutteivät p^2:lla. Jos nyt g toteuttaa tehtävän ehdon, $(g(k) + n)(g(n) + k)$ ja $(g(\ell) + n)(g(n) + \ell)$ ovat neliölukuja, jotka ovat jaollisia p:llä ja siis myös p^2:lla. Koska $g(k) + n$ ja $g(\ell) + n$ eivät ole jaollisia p^2:lla, on lukujen $g(n)+k$ ja $g(n)+\ell$ oltava jaollisia p:llä. Silloin myös niiden erotus $k-\ell$ on jaollinen p:llä. Jos taas $g(k) - g(\ell)$ on jaollinen p:llä muttei p^2:lla, valitaan D niin muin edellä ja asetetaan $n = p^3D - g(k)$. Silloin $g(k) + n = p^3D$ on jaollinen p^3:lla, muttei p^4:llä ja $g(\ell) + n = p^3D + (g(\ell) - g(k)$ on jaollinen p:llä muttei p^2:lla. Samoin kuin edellä, tästä päätellään, että $g(n)+\ell$ ja $g(n)+k$ ovat p:llä jaollisia, joten niiden erotus $k-\ell$ on jaollinen p:llä. Aputulos on todistettu.

Palataan varsinaiseen todistukseen. Oletetaan, että $g(k) = g(\ell)$ joillain k, ℓ. Silloin $k - \ell$ on jaollinen jokaisella alkuluvulla p. Tämä on mahdollista vain, jos $k - \ell = 0$. g on siis injektio. Tarkastellaan sitten lukuja $g(k)$ ja $g(k + 1)$. Jos olisi $|g(k + 1) - g(k)| \geq 2$, luvulla $(k + 1) - k = 1$ olisi alkutekijä $p \geq 2$. On siis oltava $|g(k + 1) - g(k)| = 1$. Olkoon $f(2) - f(1) = q = \pm 1$. Osoitetaan induktiolla, että $g(n) = g(1) + q(n - 1)$. Tämä pitää paikkansa, kun $n = 1$ ja $n = 2$. Jos $g(k) = g(1) + q(k - 1)$, kun $k \leq n$, niin $g(n + 1) = g(1) + q(k - 1) \pm 1$. Koska $g(n + 1) \neq g(n - 1) = g(1) + q(n - 2)$, on oltava $g(n + 1) = g(1) + nq$, ja induktiotodistus on valmis. Koska $0 < g(n) = g(1) + (n - 1)q$ kaikilla n, ei voi olla $q = -1$. Siis $g(n) = g(1) + (n - 1) = n + g(1) - 1$. g on siis välttämättä tehtävässä esitettyä muotoa.

2010.4. Voidaan olettaa, että $AC > BC$, jolloin S on puolisuoralla AB. Kehäkulmia tarkastelemalla huomataan, että kolmiot PKM ja PCA ovat yhdenmuotoiset. Siis $\dfrac{PM}{MK} = \dfrac{PA}{AC}$. Samoin kolmiot PLM ja PCB ovat yhdenmuotoiset, joten $\dfrac{PM}{ML} = \dfrac{PB}{BC}$. Väitteen todistamiseksi riittää, että osoitetaan $\dfrac{PA}{AC} = \dfrac{PB}{BC}$ eli



$$\frac{PA}{PB} = \frac{CA}{CB}. \tag{1}$$

Olkoon E kulman ACB puolittajan ja sivun AB leikkauspiste. Ne pisteet X, joille $\dfrac{XA}{XB} = \dfrac{CA}{CB}$ ovat tunnetusti *Apolloniuksen ympyrällä* eli ympyrällä, joka kulkee pisteiden C ja E kautta ja jonka keskipiste on suoralla AB. Osoitetaan, että S on tämän ympyrän keskipiste. Koska $\angle CAB = \angle BCS$ (kehäkulma ja jänteen ja tangentin välinen kulma) ja $\angle ACE = \angle ECB$, niin $\angle CES = \angle CAE + \angle ACE = \angle BCS + \angle ECB = \angle ECS$ eli kolmio SCE on tasakylkinen. Siis S on Apolloniuksen ympyrän keskipiste. Koska $SP = SC$, P on Apolloniuksen ympyrällä ja (1) toteutuu.

Osoitetaan, että vaadittu siirtosarja on olemassa. Merkintä $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \to (a_1', a_2', \ldots, a_n')$ tarkoittaa, että jos joissakin vierekkäisissä laatikoissa on $a_1, \ldots, a_n$ kolikkoa, niin jollakin sallittujen siirtojen äärellisellä jonolla on mahdollista päästä tilanteeseen, jossa näissä laatikoissa on $a_1', \ldots a_n'$ kolikkoa, ja muiden laatikkojen sisältö on pysynyt samana.

Osoitetaan ensin, että $(a, 0, 0) \to (0, 2^a, 0)$ kaikilla $a > 0$. Tätä varten osoitetaan induktiolla, että $(a, 0, 0) \to (a-k, 2^k, 0)$ kaikilla k, $1 \le k \le a$. Kun $k = 1$, käytetään siirtoa 1: $(a, 0, 0) \to (a-1, 2, 0)$. Olkoon sitten $k < a$; oletetaan, että $(a, 0, 0) \to (a-k, 2^k, 0)$. Siirron 1 tekeminen laatikkoon, jossa on 2^k kolikkoa 2^k kertaa (parillinen määrä!) osoittaa, että $(a-k, 2^k, 0) \to (a-k, 0, 2^{k+1})$. Kun nyt sovelletaan siirtoa 2 ensimmäiseen laatikkoon, saadaan $(a-k, 0, 2^{k+1}) \to (a-(k+1), 2^{k+1}, 0)$. Väite on todistettu.

Merkitään $P_n = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$, kun potenssitornissa on n kakkosta. Osoitetaan, että $(a, 0, 0, 0) \to (0, P_a, 0, 0)$ kaikilla $a > 0$. Tämä tulee osoitetuksi, kun näytetään induktiolla, että $(a, 0, 0, 0) \to (a-k, P_k, 0, 0)$ kaikilla k, $1 \le k \le a$. Induktion aluksi kelpaa siirron 1 avulla saatava $(a, 0, 0, 0) \to (a-1, 2, 0, 0)$. Oletetaan, että väite on tosi jollain $k < a$. Samoin kuin ensimmäisen väitteen todistuksessa ja käyttämällä sitä hyväksi saadaan $(a-k, P_k, 0, 0) \to (a-k, 0, 2^{P_k}, 0) = (a-k, 0, P_{k+1}, 0) \to (a-(k+1), P_{k+1}, 0, 0)$, ja väite on todistettu.

Sovelletaan nyt siirtoa 1 laatikkoon B_5 ja sitten siirtoa 2 laatikkoihin B_4, B_3, B_2 ja B_1 ja sovelletaan sitten kahdesti edellä todistettua toista aputulosta. Saadaan $(1, 1, 1, 1, 1, 1) \to (1, 1, 1, 1, 0, 3) \to (1, 1, 1, 0, 3, 0) \to (1, 1, 0, 3, 0, 0) \to (1, 0, 3, 0, 0, 0) \to (0, 3, 0, 0, 0) \to (0, 0, P_3, 0, 0, 0) \to (0, 0, 0, P_{16}, 0, 0)$, sillä $P_3 = 2^{2^2} = 16$. Nyt laatikossa B_4 on jo liikaakin kolikkoja, koska $2010^{2010^{2010}} < (2^{11})^{2010^{2010}} < 2^{2010^{2011}} < 2^{(2^{11})^{2011}} < 2^{2^{2^{15}}} < P_{16}$. Nyt laatikon B_4 sisältöä voi pienentää siirron 2 avulla, kunnes se on yksi neljäsosa vaaditusta. Soveltamalla siirtoa 1 toistuvasti B_4:ään päästään tilanteeseen, jossa muut rasiat ovat tyhjiä, mutta B_5:ssä on puolet vaaditusta määrästä, ja soveltamalla siirtoa 1 riittävän monta kertaa rasiaan B_5 viimein tilanteeseen, jossa B_6:ssa on vaadittava määrä kolikkoja ja muut rasiat ovat tyhjiä.

2010.6. Olkoon $n > s$. Silloin $a_n = a_{j_1} + a_{j_2}$, missä $j_1 + j_2 = n$. Jos esimerkiksi $j_1 > s$, päättely voidaan toistaa. Lopulta a_n voidaan purkaa muotoon $a_n = a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_k}$, missä $i_1 + i_2 + \cdots + i_k = n$, $1 \le i_j \le s$. Voidaan lisäksi olettaa, että joidenkin kahden indeksin, esimerkiksi i_1:n ja i_2:n summa on $> s$ (viimeinen hajotus). Oletetaan sitten, että indeksit $i_1, \ldots i_k$ toteuttavat ehdot $1 \le i_j \le s$, $i_1 + \cdots + i_k = n$, $i_1 + i_2 > s$. Sanomme nämä ehdot toteuttavaa indeksijoukkoa kelvolliseksi. Merkitään $s_j = i_1 + i_2 + \ldots + i_j$.

Silloin $a_n = a_{s_k} \geq a_{s_{k-1}} + a_{i_k} \geq a_{s_{k-2}} + a_{i_{k-1}} + a_{i_k} \geq \ldots \geq a_{i_1} + \cdots + a_{i_k}$. Kaikkiaan siis on todistettu, että $a_n = \max\{a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} \mid i_1, \ldots, i_k \text{ on kelvollinen}\}$.

Olkoon sitten $m = \max_{1 \leq i \leq s} \dfrac{a_i}{i}$. Olkoon $\ell < s$ jokin indeksi, jolle $m = \dfrac{a_\ell}{\ell}$. Olkoon $n > s^2\ell + 2s$. Puretaan a_n summaksi $a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_k}$ kuten edellä. Koska $i_j \leq s$, $n = i_1 + \cdots + i_k \leq ks$. Siis $k \geq \dfrac{n}{s} \geq s\ell + 2$. Oletetaan, että mikään indekseistä $i_3, \ldots i_k$ ei ole ℓ. Laatikkoperiaatteen nojalla ainakin jokin indeksi $j \neq \ell$ esiintyy indeksien $i_3, \ldots,$ i_k joukossa ainakin ℓ kertaa. Poistetaan jonosta $(i_1, \ldots, i_k)$ ℓ j:n esiintymää ja laiteaan tilalle j ℓ:n esiintymää. Saadaan uusi kelvollinen indeksijoukko $(i_1, i_2, i_3', \ldots, i_{k'}')$. Edellä todistetun maksimaalisuusominaisuuden perusteella

$$a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} \geq a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3'} + \cdots + a_{i_{k'}}'.$$

Kun epäyhtälöstä sievennetään pois samat yhteenlaskettavat, jää jäljelle epäyhtälö $\ell a_j \geq ja_\ell$. Koska $\dfrac{a_\ell}{\ell} \geq \dfrac{a_j}{j}$, on oltava $\ell a_j = ja_\ell$. Siis itse asiassa

$$a_n = a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3'} + \cdots + a_{i_{k'}}'.$$

Kun $n > s^2\ell + 2s$, a_n voidaan siis purkaa summaksi $a_{i_1} + \cdots + a_{i_k}$, jossa ainakin yksi yhteenlaskettava on a_ℓ. Voidaan olettaa, että tämä on viimeinen. Mutta nyt $(i_1, \ldots, i_{k-1})$ on kelvollinen indeksijoukko, kun n korvataan $n - \ell$:llä. Edellä todisteun maksimaalisuusominaisuuden nojalla $a_{n-\ell} + a_\ell \geq (a_{i_1} + \cdots + a_{i_{k-1}}) + a_\ell = a_n$. a_n:n perusominaisuuden mukaan $a_n \geq a_{n-\ell} + a_\ell$. Siis todellakin $a_n = a_{n-\ell} + a_\ell$ kaikilla $n \geq s^2\ell + 2s$.