52. Kansainväliset matematiikkaolympialaiset

Tehtävien ratkaisuja

Tehtävä 1. *Olkoon $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ joukko, jonka alkioina on neljä eri suurta positiivista kokonaislukua. Joukon alkioiden summaa $a_1+a_2+a_3+a_4$ merkitään S_A:lla. Olkoon n_A niiden parien (i, j) lukumäärä, joille $1 \le i < j \le 4$ ja $a_i + a_j$ on S_A:n tekijä. Määritä kaikki sellaiset neljän eri suuren kokonaisluvun joukot A, joille n_A on mahdollisimman suuri.*

Ratkaisu. Joukolla $\{1, 2, 3, 4\}$ on 6 kaksialkioista osajoukkoa. Varmasti siis $n_A \le 6$. Mutta jos jokin A:n kahden eri alkion a_i, a_j summa on tekijänä luvussa S_A, se on tekijänä myös luvussa $S_A - (a_i + a_j)$, joka on A:n kahden muun alkion summa. Voidaan olettaa, että $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Koska $a_3 + a_4 > a_1 + a_2$ ja $a_2 + a_4 > a_1 + a_3$, summat $a_3 + a_4$ ja $a_2 + a_4$ eivät voi olla luvun S_A tekijöitä. Siis $n_A \le 4$.

Osoitetaan, että $n_A = 4$ on mahdollista. Katsotaan ensin välttämättömiä seurauksia oletuksesta $n_A = 4$. Jos $n_A = 4$, kaikki muut A:n kahden eri alkion sumat kuin summat kuin $a_3 + a_4$ ja $a_2 + a_4$ ovat S_A:n tekijöitä. Erityisesti silloin $a_1 + a_4$ on luvun $a_2 + a_3$ tekijä ja $a_2 + a_3$ on luvun $a_1 + a_4$ tekijä. Tämä on mahdollista vain, jos $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$ ja $S_A = 2(a_2 + a_3)$. Merkitään $a_1 + a_2 = x$ ja $a_1 + a_3 = y$. Silloin $S_A = 2(x + y - 2a_1)$. Koska y on S_A:n tekijä, se on luvun $2(x - 2a_1) = 2(a_2 - a_1) > 0$ tekijä. Koska $y > x$, $y > x - 2a_1$. Jos luku on toisen luvun tekijä ja enemmän kuin puolet tästä luvusta, luvut ovat yhtä suuret. Siis $y = 2(x - 2a_1) = 2(a_2 - a_1)$. Toisaalta $x = a_1 + a2$ on luvun $2(y - 2a_1) = 2(2a_2 - 4a_1) = 4(a_1 + a_2) - 12a_1$ tekijä, joten se on luvun $12a_1$ tekijä. Mutta tiedetään, että $x < y$ eli $a_1 + a_2 < 2(a_2 - a_1) = 2(a_1 + a_2) - 4a_1$, joten $a_1 + a_2 > 4a_1$. Tämä merkitsee, että vain yhtälöt $a_1 + a_2 = 6a_1$ ja $a_1 + a_2 = 12a_1$ eli $a_2 = 5a_1$ ja $a_2 = 11a_1$ ovat mahdollisia. Koska $a_3 = y - a_1 = 2a_2 - 3a_1$, edellinen vaihtoehto johtaa tilanteeseen $a_3 = 7a_1$ ja $a_4 = 11a_1$, jälkimmäinen tilanteeseen $a_3 = 19a_1$, $a_4 = 29a_1$. Välittömästi voidaan tarkastaa, että jos a on mielivaltainen positiivinen kokonaisluku, joukot $A = \{a, 5a, 7a, 11a\}$ ja $A = \{a, 11a, 19a, 29a\}$ toteuttavat tehtävän ehdon. Ne ovat siis tehtävässä kysytyt joukot.

Tehtävä 2. *Tason äärellisessä joukossa $\mathcal{S}$ on ainakin kaksi pistettä jä mitkään kolme $\mathcal{S}$:n pistettä eivät ole samalla suoralla. Seuraavaa prosessia kutsutaan tuulimyllyksi. Alkutilanteessa suora ℓ kulkee joukkoon yhden joukon $\mathcal{S}$ pisteen P kautta. Se kiertyy myötäpäivään kierron keskipisteen P ympäri, kunnes se kohtaa jonkin toisen joukkoon $\mathcal{S}$ kuuluvan pisteen Q. Pisteestä Q tulee nyt kierron koskipiste, ja suora kiertyy Q:n ympäri myötäpäivään, kunnes se jäleen kohtaa jonkin $CalS$:n pisteen. Prosessi jatkuu loputtomasti.*

Osoita, että on mahdollista valita $P \in \mathcal{S}$ ja P:n kautta kulkeva suora ℓ niin, että näistä aloitettu tuulimylly käyttää jokaista $\mathcal{S}$:n pistettä kierron keskipisteenä äärettömän monta kertaa.

Ratkaisu. Oletetaan ensin, että joukossa $\mathcal{S}$ on $2n + 1$ pistettä. Valitaan pisteistä yksi, esimerkiksi A, ja asetetaan A:n kautta suora ℓ_0 niin, että suoran molemmilla puolilla on n A:n pistettä. Alkutilanteessa $\ell = \ell_0$. Kiinnitetään suoran ℓ suunta; silloin voidaan puhua ℓ:n oikeasta ja vasemmasta puolesta. Kun ℓ kiertyy A:n ympäri, se kohtaa ensin joko jonkin alkuaan ℓ:n oikealla puolella olevan pisteen B; kun ℓ on kiertynyt vielä vähän B:n ympäri, mutta ei ole vielä osunut mihinkään uuteen $\mathcal{S}$:n pisteeseen, A on muuttunut ℓ:n oikean puolen pisteeksi, mutta muut pisteet ovat edelleen sillä puolen ℓ:ää, missä olivat alkutilanteessa. Jos taas ℓ kohtaa ensin jonkin vasemmalla puolellaan olevan pisteen C, niin (kun on kierretty vielä vähän C:n ympäri) A on muuttunut ℓ:n vasemman puolen pisteeksi. Kaikkiaan siis aina silloin, kun ℓ koskettaa vain yhtä $\mathcal{S}$:n pistettä, ℓ:n molemmilla puolilla on yhtä monta $\mathcal{S}$:n pistettä. Piste siirtyy ℓ:n puolelta toiselle tasan silloin, kun se on kierron keskipisteenä. Koska S on äärellinen joukko, ℓ:n suunta (jonkin kiinteän referenssin, esimerkiksi kahden annetun $\mathcal{S}$:n pisteen kautta kulkevan suoran suhteen), muttuu kulmalla, jonka suuruudella on positiivinen alaraja. Tämä merkitsee, että äärellisen monen askeleen jälkeen ℓ on tehnyt $180°$ kierron. Voidaan että, tällöin ℓ koskee vain yhtä $\mathcal{S}$: pistettä (ellei näin ole, voidaan tarkastella alkutilannetta, jossa ℓ:naento hiukan muutetaan). Olkoon ℓ_1 se suora, jonka päällä $180°$ kiertynyt ℓ on. Silloin $\ell_1 \| \ell_0$. Kummankin suoran ℓ_0 ja ℓ_1 kummallakin puolella on n joukon $\mathcal{S}$ pistettä. Tästä seuraa, että suorien välissä ei ole yhtään $\mathcal{S}$ pistettä ja jokainen alussa ℓ:n vasemmalla puolella ollut piste on siirtynyt ℓ:n oikealle puolelle ja päin vastoin. Kierron keskipiste on jälleen A ja jokaisen $\mathcal{S}$:n on täytynyt olla ainakin kerran kierron keskipisteenä. Prosessi toistuu samana äärettömän monta kertaa, joten jokainen piste on ärettömän monta kertaa kierron keskipisteenä.

Olkoon sitten $\mathcal{S}$:ssä $2n$ pistettä. Olkoon $A \in \mathcal{S}$ ja olkoon ℓ_0 sellainen A:n kautta kulkeva (suunnalla varustettu) suora, että ℓ_0:n vasemmalla puolella on n ja oikealla puolella $n-1$ pistettä. Kun tilanteesta $\ell = \ell_0$ on edetty tilanteeseen $\ell = \ell_1$, missä ℓ_1 koskettaa joukkoa $\mathcal{S}$ pisteessä B, $\ell_1 \| \ell_0$, mutta ℓ_1 ja ℓ_0 ovat vastakkaissuuntaiset, niin ℓ_1:n vasemmalla puolella on edelleen n ja oikealla puolella $n-1$ pistettä. Tämä on mahdollista vain, jos B on ℓ_0:n vasemmalla puolella ja A on ℓ_1:n vasemmalla puolella ja jokainen muu ℓ_0:n vasemmalla puolella oleva piste on ℓ_1:n oikealla puolella sekä jokainen ℓ_0:n oikealla puolella oleva piste on ℓ_1:n vasemmalla puolella. Jokainen $\mathcal{S}$:n piste on ollut ainakin keran kierron keskipiste. Kun ℓ kiertyy seuraavat $180°$, se on taas ℓ_0:n päällä, ja kierros alkaa uudelleen; se voidaan toistaa äärettömän monta kertaa.

Tehtävä 3. *Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdon*

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y. Osoita, että $f(x) = 0$ kaikilla $x \leq 0$.

Ratkaisu. Sijoitetaan $x = 0$ tehtävän epäyhtälöön. Saadaan $f(y) \leq yf(0) + f(f(0))$ kaikilla y. Valitaan x ja y niin, että $x + y = f(0)$. Kun sovelletaan tehtävän epäyhtälöä ja juuri johdettua epäyhtälöä, saadaan

$$f(f(0)) \leq (f(0) - x)f(x) + f(f(x)) \leq (f(0) - x)f(x) + f(x)f(0) + f(f(0)),$$

mikä sievenee muotoon $0 \leq (2f(0)-x)f(x)$. Tästä seuraa, että $f(x) \geq 0$ kaikilla $x < 2f(0)$. Osoitetaan, että $f(x) \leq 0$ kaikilla x. Ellei näin olisi, olisi jollain a $f(a) > 0$. Silloin olisi $f(y+a) \leq yf(a) + f(f(a))$ eli $f(y+a) < 0$, kun $y < -f(f(a))/f(a)$. Molemmat kaksi edellistä väittämää eivät selvästikään voi toteutua. Siis $f(x) \leq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Koksa silloin myös $f(f(x)) \leq 0$ kaikilla x, saadaan tehtävän epäyhtälöstä

$$f(x+y) \leq yf(x). \tag{1}$$

Koska $f(x) \geq 0$ tarpeeksi pienillä x ja toisaalta $f(x) \leq 0$ kaikilla x, on olemassa lukuja x, joille $f(x) = 0$. Olkoon x tällainen ja olkoon $y = 0$. Tehtävän epäyhtälö antaa nyt $0 = f(x) \leq f(f(x)) = f(0)$. Koska $f(0) \leq 0$, on oltava $f(0) = 0$. Olkoon nyt $x < 0$, joloin $-x > 0$. Epäyhtälöstä (1) saadaan $0 = f(0) = f(x - x) \leq -xf(x)$. Tämä merkitsee, että $f(x) \geq 0$, eli koska $f(x) \leq 0$, $f(x) = 0$. Väite on todistettu.

Tehtävä 4. *Olkoon $n > 0$ kokonaisluku. Käytössä on kaksivartinen vaaka ja n punnusta, joiden massat ovat 2^0, 2^1, ..., 2^{n-1}. Punnukset on asetettava yksitellen vaa'alle niin, että oikea vaakakuppi ei koskaan paina enempää kuin vasen vaakakuppi. Joka vaiheessa valitaan yksi jäljellä olevista punnuksista ja se asetetaan joko vasempaan tai oikeaan vaakakuppiin, kunnes kaikki punnukset ovat vaa'alla.*

Määritä, kuinka monella eri tavalla tämä voidaan tehdä.

Ratkaisu. Olkoon x_n sijoittelujen määrä. Selvästi $x_1 = 1$: ainoa punnus voidaan asettaa vain vasempaan kuppiin. Olkoon sitten käytössä n punnusta. Punnukset, joiden paino on $2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$, voidaan sijoitella x_{n-1}:llä eri tavalla. Kevein punnus voidaan sijoittaa ennen muita punnuksia, minkä tahansa kahden muun punnuksen välissä tai kaikkien muiden punnusten jälkeen. Jos kevein sijoitetaan ensimmäisenä, se voidaan asettaa vain vasempaan vaakakuppiin. Jos se sijoitetaan missä muussa tahansa vaiheessa, vasen vaakakuppi painaa ainakin kaksi yksikköä enemmän kuin oikea, ja yhden painoinen punnus voidaan sijoittaa kumpaan tahansa kuppiin. Jokaista painavampien punnusten sijoittelua kohden keveimmällä punnuksella on siten $1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$ eri mahdollisuutta. Tämä merkitsee, että $x_n = (2n-1)x_{n-1}$. Kun otetaan huomioon $x_1 = 1$, saadaan $x_n = (2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1$. (Tätä lukua merkitään joskus symbolilla $(2n-1)!!$.)

Tehtävä 5. *Funktio f on määritelty kokonaislukujen joukossa, ja sen arvot ovat positiivisia kokonaislukuja. Oletetaan, että jokaisella kahdella kokonaisluvulla m ja n erotus $f(m) - f(n)$ on jaollinen luvulla $f(m-n)$. Osoita, että kaikilla sellaisilla kokonaisluvuilla m ja n, joilla $f(m) \leq f(n)$, $f(n)$ on jaollinen luvulla $f(m)$.*

Ratkaisu. Todistettavaa on vain niissä tapauksissa, joissa $f(m) \neq f(n)$. Oletetaan, että $f(m) < f(n)$. Oletuksen mukaan positiivinen luku $f(n) - f(m)$ on jaollinen luvulla $f(n - m)$. Koska $f(m) > 0$, $f(n-m) \leq f(n) - f(m) < f(n)$. Siis

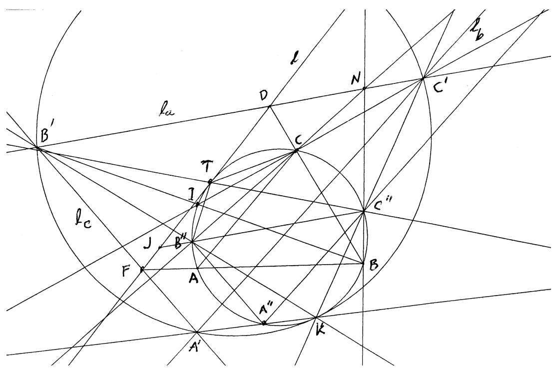
$$-f(n) < -f(m-n) < f(m) - f(m-n) < f(m) < f(n). \qquad (1)$$

Koska $f(n) = f(m-(m-n))$, tehtävän oletuksesta seuraa, että $f(m)-f(m-n)$ on jaollinen $f(n)$:llä. Epäyhtälöiden (1) mukaan tämä on mahdollista vain, jos $f(m) - f(m-n) = 0$ eli $f(m-n) = f(m)$. Mutta tehtävän oletuksesta seuraa nyt, että $f(n) - f(m)$ on jaollinen $f(m)$:llä. Tästä taas seuraa, että $f(n)$ on jaollinen $f(m)$:llä.

Tehtävä 6. *Teräväkulmaisen kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä on Γ. Suora ℓ on ympyrän Γ tangentti ja suorat ℓ_a, ℓ_b ja ℓ_c ovat suoran ℓ kuvat peilauksissa yli suorien BC, CA ja AB, tässä järjestyksessä. Osoita, että suorien ℓ_a, ℓ_b ja ℓ_c määrittelemän kolmion ympäri piirretty ympyrä sivuaa ympyrää Γ.*

Ratkaisu. Todistus on varsin mutkikas ja siinä nojaudutaan tunnettuun, muttei ihan alkeelliseen *Pascalin lauseeseen*. Pascalin lause kertoo, että jos A, B, C, D, E ja F ovat saman ympyrän pisteitä missä tahansa järjestyksessä, niin suorien BC ja EF leikkauspiste

Q, suorien CD ja FA leikkauspiste P ja suorien DE ja AB leikkauspiste R ovat samalla suoralla.



Olkoon A' ℓ_b:n ja ℓ_c:n leikkauspiste, B' ℓ_c:n ja ℓ_a:n leikkauspiste ja C' ℓ_b:n ja ℓ_a:n leikkauspiste ja olkoon Γ' kolmion $A'B'C'$ ympäri piirretty ympyrä. Olkoon T Γ:n ja ℓ:n sivuamispiste. Olkoot A'', B'' ja C'' ne Γ:n pisteet, joille A, B ja C ovat kaarien TA'', TB'' ja TC'' keskipisteet. Tehtävän väite tulee todistetuksi, kun osoitetaan, että kolmiot $A'B'C'$ ja $A''B''C''$ ovat homoteettiset ja että homotetiakeskus on ympyrällä Γ.

Osoitetaan ensin, että kolmioiden $A'B'C'$ ja $A''B''C''$ sivut ovat pareittain yhdensuuntaiset. Osoitetaan, että $B'C' \| B''C''$; muilla sivupareilla todistus menee periaatteessa samoin. Olkoon J $B''C''$:n ja ℓ:n leikkauspiste, F AB:n ja ℓ:n leikkauspiste ja D BC:n ja ℓ:n leikkauspiste. Jos, kuten kuvassa, J on janalla TF, niin kehäkulmalauseseen ja pisteiden B'' ja C'' määritelmään sekä siihen, että ℓ_a on ℓ:n kuva peilauksessa yli suoran BC nojautuen saadaan $\angle FJC'' = \angle JTC'' + \angle JC''T = \angle JTC'' + \angle B''BT = (180^\circ - \angle DTC'') + (180^\circ - 2 \cdot \angle TB''B) = 360^\circ - 2 \cdot (\angle DTC + \angle TB''B) = 2 \cdot (180^\circ - \angle TB''B) - 2\angle DTC = 2 \cdot \angle TCB - 2 \cdot \angle DTC = 2 \cdot \angle TDC = \angle TDC'$. Siis $B''C'' \| B'C'$. Kolmiot, joiden sivut ovat pareittain yhdensuuntaiset, ovat homoteettisia.

Osoitetaan seuraavaksi, että suorien BC'' ja CB'' leikkauspiste N on suoralla ℓ_a. Koska C on kaaren TC'' keskipiste, BC on kulman TBN puolittaja, joten BC'' ja BT ovat toistensa kuvia peilauksessa yli BC:n. Koska B on kaaren TBB'' keskipiste, $\angle B''CB = \angle TB''B = 180^\circ - \angle TCB = \angle TCD$. Suorat TC ja $B''C$ ovat toistensa kuvia peilauksessa yli BC:n. Suorien BT ja $B''T$ leikkauspiste T, joka on suoralla ℓ, kuvautuu siis peilauksessa suorien BC'' ja CB'' leikkauspisteeksi N, jonka on oltava ℓ:n kuvasuoralla ℓ_a.

Olkoon sitten I suorien BB' ja CC' leikkauspiste. Osoitetaan, että I on ympyrällä Γ. Tätä varten pyritään osoittamaan, että $\angle CIB = \angle CAB$. Tähän taas riittää, jos osoitetaan, että $\angle BB'C' + \angle CC'B = \angle CAB$. Osoitetaan tämä. Koska FB on kulman TFA' puolittaja ja DB on kulman TDC' puolittaja (suorien ℓ_c ja ℓ_a määrittelyn mukaan), B on kolmion $B'FD$ kahden kulman vieruskulman puolittajilla ja siten kolmion kolmannen kulman puolittajalla. Kolmion kulmien summan kaavasta saadaan nyt $\angle BDF + \angle BFD - \angle DB'B = 90^\circ$. Tästä seuraa $\angle C'B'B = \angle DB'B = \angle BDF + \angle BFD - 90^\circ = 90^\circ - \angle ABC$. Vastaavasti, jos G on CC':n ja ℓ:n leikkauspiste, C on kolmion CDG kulmanpuolittajien leikkauspiste, ja $\angle CDG + \angle DGC + \angle DC'C = 90^\circ$. Silloin $\angle B'C'C = 90^\circ - (\angle CDG + \angle DGC) = 90^\circ - \angle ACB$. Kaikkiaan siis $\angle C'BB + \angle B'C'C = 180^\circ - (\angle ABC + \angle ACB) = \angle CAB$. I on siis ympyrällä Γ. – (Edellisen päättelyn yksityiskohdat voivat muuttua T:n sijainnin mukaan.)

Olkoon nyt K suoran $B'B''$ ja Γ:n leikkauspiste. Pyritään osoittamaan, että K on sen homotetian keskus, joka kuvaa kolmion $A''B''C''$ kolmiolle $A'B'C'$. Sovelletaan Pascalin lausetta ympyrän Γ pisteisiin K, I, B, C, B'' ja C''. Pascalin lauseen mukaan suorien $B''K$ ja BI leikkauspiste B', suorien $B''C$ ja BC'' leikkauspiste N sekä suorien IC ja

KC'' leikkauspiste ovat samalla suoralla. Mutta suora $B'N$ on suora ℓ_a, ja ℓ_a:n ja IC:n leikkauspiste on C'. Siis K on suoralla $C'C''$. Mutta tämä merkitsee, että K on todellakin kolmiot $A'B'C'$ ja $A''B''C''$ yhdistävän homotetian homotetiakeskus, ja väite on todistettu.