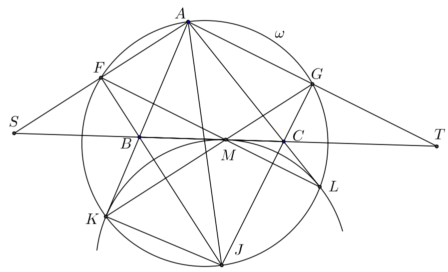
Kansainväliset matematiikkaolympialaiset 2012

Tehtävien ratkaisuja



1. Olkoot kolmion kulmat α, β ja γ ja olkoon ω ympyrä, jonka halkaisija on AJ. Koska kulmat $\angle JKA$ ja $\angle JLA$ ovat suoria, niin K ja L ovat tällä ympyrällä. Koska BM ja BK ovat sivuympyrän tangentteja, $BK = BM$ ja koska BJ on kulman $\angle KBM$ puolittaja, $BJ \perp KM$ ja $\angle MBJ = 90° - \dfrac{1}{2}\beta$ sekä $\angle BMK = \dfrac{1}{2}\beta$. Vastaavasti $\angle CML = \dfrac{1}{2}\gamma$. Siis $\angle MFB + \dfrac{1}{2}\gamma = 90° - \dfrac{1}{2}\beta$. Tästä seuraa, että $\angle LFJ = \angle MFB = 90° - \dfrac{1}{2}(\beta + \gamma) = \dfrac{1}{2}\alpha = \angle JAL$. Viimeinen yhtälö seuraa siitä, että AJ on kulman $\angle BAC$ puolittaja. Kehäkulmalauseen perusteella F on ympyrällä ω ja symmetrian vuoksi myös G. Koska AJ on ω:n halkaisija, $\angle AFJ = 90°$. Kolmiot AFB ja SFB ovat yhteneviä (ksk), joten $AK = SM$. Samoin osoitetaan, että $AL = TM$. Nyt sivuympyrän tangentteina AK ja AL ovat yhtä pitkät, joten $SM = TM$.

2. Valitaan positiivinen luku x_1 ja määritellään luvut $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ niin, että $a_k = \dfrac{x_k}{x_{k-1}}$, kun $k = 2, 3, \ldots, n-1$ ja $a_n = \dfrac{x_1}{x_{n-1}}$. Todistettava epäyhtälö saa muodon

$$(x_1 + x_2)^2 (x_2 + x_3)^2 \cdots (x_{n-1} + x_1)^n > n^n x_1^2 x_2^3 \cdots x_{n-1}^n. \tag{1}$$

Sovelletaan jokaiseen vasemman puolen tulon tekijään aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon epäyhtälöä seuraavasti:

$$\begin{aligned}
(x_1 + x_2)^2 &\ge 2^2 x_1 x_2 \\
(x_2 + x_3)^2 = \left(2\left(\frac{x_2}{2}\right) + x_3\right)^3 &\ge 3^3 \left(\frac{x_2}{2}\right)^2 x_3 \\
(x_3 + x_4)^2 = \left(3\left(\frac{x_2}{3}\right) + x_4\right)^4 &\ge 4^4 \left(\frac{x_3}{3}\right)^3 x_4 \\
&\cdots \\
(x_{n-1} + x_1)^n = \left((n-1)\left(\frac{x_{n-1}}{n-1}\right) + x_1\right)^n &\ge n^n \left(\frac{x_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} x_1.
\end{aligned}$$

Kun edelliset epäyhtälöt kerrotaan puolittain keskenään, saadaan (1), kuitenkin niin, että yhtäsuuruuskin olisi mahdollinen. Yhtäsuuruus toteutuu kuitenkin vain, jos $x_1 = x_2$, $x_2 = 2x_3$, $\ldots$, $x_{n-1} = (n-1)x_1$ eli $x_1 = (n-1)!x_1$. Koska $x_1 > 0$ ja $n \ge 3$, tämä ei ole mahdollista. Epäyhtälö on aito.

3. Oletamme, että B on määrittänyt joukon T, jossa on m alkiota ja johon x kuuluu. Pelin alussa $T = \{1, 2, \ldots, N\}$. Osoitetaan, että jos $m > 2^k$, B löytää alkion $y \in T$ siten, että $y \neq x$. Näin B:llä on yhtä alkiota pienempi joukko. B voi toistaa menettelyn, kunnes $m \leq 2^k \leq n$ ja siten voittaa pelin. Koska vain T:n koko on olennainen, voidaan olettaa, että $T = \{0, 1, \ldots, 2^k, \ldots m-1\}$. B kysyy nyt $k+1$ kertaa, onko $x = 2^k$. Jos A vastaa joka kerran *ei*, vastauksista ainakin yksi on tosi, joten $x \neq 2^k$. Ellei tapahdu, niin kuin edellä on kuvattu, B lopettaa kysymyksen "$x = 2^k$?" esittämisen silloin, kun A vastaa ensimmäisen kerran "kyllä". Sen sijaan B esittää seuraavat k kysymystä: "onko x:n binaariesityksen i:s numero 0" $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Muodostetaan luku y, $0 \leq y \leq 2^{k-1}$, jonka binaariesitys muodostuu niistä luvuista, jotka ovat A:n vastausten komplementeista (mukaan lukien se *kyllä*, joka laukaisi kysymyssarjan. Jos olisi $x = y$, A olisi valehdellut $k+1$ kertaa peräkkäin. Siis $y \neq x$, ja T:tä voidaan pienentää.

Osoitetaan että jos $1 < c < 2$ ja $n = \lfloor (2-c)c^{k+1} \rfloor - 1$, niin A voi pelata niin, että B ei pysty takaamaan voittoa. Huomataan, että jos $1{,}99 < c < 2$, niin $\lfloor (2-c)c^{k+1} \rfloor - 1 \geq 1{,}99^k$ tarpeeksi suurilla k:n arvoilla (koska $\lim_{k\to\infty} \dfrac{1{,}99^k}{c^k} = 0$). A:n strategia on seuraava. Hän valitsee luvun $N = n+1$ ja luvun x, $1 \leq x \leq N$, mielivaltaisesti. A kutsuu B:n kysymykseen antamaansa vastausta i-yhteensopimattomaksi, jos se on ollut *kyllä*, mutta $i \neq S$ tai jos se on ollut *ei*, mutta $i \in S$. Jokaisen vastauksensa kohdalla A laskee, kuinka monta peräkkäistä i-yhteensopimatonta vastausta hän on antanut kullakin arvolla $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Olkoon tämä lukumäärä m_i. A tarkastelee suuretta

$$C = \sum_{i=1}^{n+1} c^{m_i}.$$

Kuhunkin B:n kysymykseen A vastaa niin, että C saa mahdollisimman pienen arvon. Osoitetaan, että tällöin aina $C < c^{k+1}$. Jos näin on, mikään eksponentti m_i ei saa suurempaa arvoa kuin k. A ei siis anna minkään i:n suhteen i-yhteensopimatonta vastausta enempää kuin k kertaa peräkkäin. Erityisesti tämä pätee, kun $i = x$, joten A ei valehtele kysymyksen $x \in S$ kohdalla useammin kuin k kertaa peräkkäin. Strategia ei riipu luvusta x, joten B ei saa sitä koskevaa informaatiota lainkaan, eikä näin ollen omista voittostrategiaa.

On vielä todistettava, että $C < c^{k+1}$ on aina voimassa. Alussa $m_i = 0$ kaikilla i, joten summa on $n+1$; kosta $1 < c < 2$ ja $n = \lfloor (2-c)c^{k+1} \rfloor - 1$, väite pätee. Oletetaan, että $C < c^{k+1}$ jonkin kysymyksen jälkeen ja että B:n kysymys on "$x \in S$?" jollekin joukolle S. Sen mukaan vastaako A *kyllä* tai *ei*, C saa joko arvon

$$C_1 = \sum_{i\in S} 1 + \sum_{i\notin S} c^{m_1+1}$$

tai arvon

$$C_2 = \sum_{i\notin S} 1 + \sum_{i\in S} c^{m_1+1}$$

Nyt luvuista C_1 ja C_2 pienempi on enintään yhtä suuri kuin lukujen keskiarvo

$$\frac{1}{2}(C_1 + C_2) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i\in S}(1 + c^{m_i+1}) + \sum_{i\notin S}(c^{m_i+1} + 1)\right) = \frac{1}{2}(cC + n + 1)$$

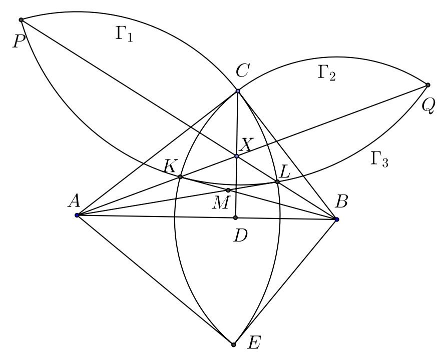
$$< \frac{1}{2}c^{k+2} + (2-c)c^{k+1} = c^{k+1}.$$

Induktioaskel on otettu ja todistus on valmis.

4. Jos tehtävän yhtälöön sijoitetaan $a = b = c = 0$, saadaan $3f(0)^2 = 6f(0)^2$. Siis $f(0) = 0$. Jos nyt yhtälöön sijoitetaan $b = -a$ ja $c = 0$, saadaan $(f(a) - f(-a))^2 = 0$. f on siis parillinen funktio. Sijoitetaan yhtälöön nyt $b = a$ ja $c = -2a$. Saadaan $2f(a)^2 + f(2a)^2 = 2f(a)^2 + 4f(a)f(2a)$. Siis joko $f(2a) = 0$ tai $f(2a) = 4f(a)$ kaikilla $a \in \mathbb{Z}$. Jos $f(r) = 0$ jollain $r \geq 1$, niin sijoitus $b = r$, $c = -a-r$ johtaa yhtälöön $(f(a+r) - f(a))^2 = 0$. Tällöin f on jaksollinen ja jakso on r. Jos erityisesti $f(1) = 0$, niin f on identtisesti 0. Oletetaan jatkossa, että $f(1) = k \neq 0$. Nyt edellä sanotun perusteella $f(2) = 0$ tai $f(2) = 4k$. Jos $f(2) = 0$, f on jaksollinen ja jaksona 2. Tällöin $f(a) = 0$, jos a on parillinen ja $f(a) = k$, jos a on pariton. Tällainen funktio selvästi toteuttaa tehtävän ehdon: jos a, b, c ovat kaikki parillisia, yhtälö on $0 = 0$ ja jos luvuista kaksi, esimerkiksi b ja c ovat parittomia, kolmas on parillinen, ja yhtälö on $k^2 + k^2 = 2k^2$. Oletetaan nyt, että $f(2) = 4k$. Nyt joko $f(4) = 0$ tai $f(4) = 16k$. Jos $f(4) = 0$, f on jaksollinen, jaksona 4. Siis $f(a) = 0$, kun $a \equiv 0 \bmod 4$, $f(a) = f(-1) = f(1) = k$, kun $a \equiv \pm 1 \bmod 4$ ja $f(a) = 4k$, kun $a \equiv 2 \bmod 4$. Osoitetaan, että tällainen funktio toteuttaa tehtävän ehdon. Jos $a + b + c = 0$ ja b ja c ovat parittomia, niin a voi olla neljällä jaollinen tai $\equiv 2 \bmod 4$. Edellisessä tapauksessa yhtälö on $0^2 + 2k^2 = 2k^2$, jälkimmäisessä $16k^2 + 2k^2 = 8k^2 + 2k^2 + 8k^2$. Jos a, b, c ovat kaikki parillisia, niin joko kaikki ovat neljällä jaollisia tai tasan yksi on. Kummassakin tapauksessa yhtälö toteutuu.

Jäljellä on vielä tapaus $f(4) = 16$. Osoitetaan, että tällöin $f(3) = 9k$. Tämä seuraa tehtävän yhtälöstä sijoituksilla $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$ ja $a = 1$, $b = 3$, $c = -4$. Edellinen johtaa yhtälöön $f(3)^2 - 10kf(3) + 9k^2 = 0$, jonka ratkaisut ovat $f(3) = k$ ja $f(3) = 9k$, jälkimmäinen puolestaan yhtälöön $f(3)^2 - 34kf(3) + 225k^2 = 0$, jonka ratkaisut ovat $f(3) = 9k$ ja $f(3) = 25k$. Siis todellakin $f(3) = 9k$. Osoitetaan nyt induktiolla, että $f(x) = kx^2$ kaikilla kokonaisluvuilla x. Asia tiedetään jo luvuille $x = 0, 1, 2, 3, 4$. Oletetaan että väite pätee kokonaisluvuilla $x \leq n$. Sijoitukset $a = n$, $b = 1$, $c = -n-1$ ja $a = n-1$, $b = 2$ ja $c = -n-1$ johtavat toisen asteen yhtälöihin, joista edellisen ratkaisut ovat $f(n+1) = k(n+1)^2$ ja $f(n+1) = k(n-1)^2$, jälkimmäisen $f(n+1) = k(n+1)^2$, $f(n+1) = k(n-3)^2$. Koska $n \neq 2$, $(n-1)^2 \neq (n-3)^2$. Siis välttämättä $f(n+1) = k(n+1)^2$ ja $f(x) = kx^2$ kaikilla ei-negatiivisilla kokonaisluvuilla x. f:n parillisuuden takia sama yhtälö pätee myös negatiivisilla x. On vielä tarkistettava, että tämäkin funktio todella on ratkaisu. Se seuraa yhtälöstä $a^2 + b^4 + (a+b)^4 = 2a^2b^2 + 2a^2(a+b)^2 + 2b^2(a+b)^2$, jonka päteminen todistetaan suoraan sieventämällä.

5. Olkoon AEB ABC:n kanssa suoran AB suhteen symmetrinen suorakulmainen kolmio. Olkoot Γ_1 ja Γ_2 ympyrät, joiden keskipisteet ovat A ja B ja joille C, L, E ja C, K, E ovat kehäpisteitä. Leikatkoot puolisuorat AX ja BX nämä ympyrät (myös) pisteissä P ja Q. Koska $\angle BCA$ on suora, AC on Γ_2:n tangentti ja BC on Γ_1:n tangentti. Lasketaan pisteen X potenssi ympyröiden Γ_1 ja Γ_2 suhteen: $XK \cdot XQ = XC \cdot XE = XL \cdot XP$. Tästä seuraa, että piste Q on pisteiden K, L ja P kautta kulkevalla ympyrällä. Olkoon tämä ympyrä Γ_3. Lasketaan pisteen A potenssi ympyrän Γ_2 suhteen; saadaan $AC^2 = AK \cdot AQ$. Koska $AL = AC$, on myös $AL^2 = AK \cdot AQ$. Tästä seuraa, että AL on Γ_3:n tangentti. Vastaavasti osoitetaan, että BK on Γ_3:n tangentti. Mutta näin ollen MK ja ML ovat kaksi pisteestä M Γ_3:lle piirrettyä tangenttia ja siis yhtä pitkät.



6. Jos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja ja

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{3^{a_i}} = 1,$$

niin $\sum_{i=1}^{n} i3^{b_i} = 3^a$ jollain ei-negatiivisilla kokonaisluvuilla b_i ja a. Tästä seuraa $\dfrac{n(n+1)}{2} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i \equiv 1 \mod 2$. Viimeinen ehto toteutuu, kun kumpikaan luvuista n, $n+1$ ei ole jaollinen 4:llä, eli kun $n \equiv 1 \mod 4$ tai $n \equiv 2 \mod 4$.

Osoitetaan, että tämä välttämätön ehto on myös riittävä. Kutsumme jonoa $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *mahdolliseksi*, jos on olemassa ei-negatiiviset kokonaisluvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$, joille

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{a_i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{3^{a_i}} = 1.$$

Jos nyt b_k on jokin mahdollisen jonon termi ja jos u ja v ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja, joille pätee $u + v = 3b_k$, niin jono $b_1, \ldots, b_{k-1}, u, v, b_{k+1}, \ldots, b_n$ on mahdollinen jono. Tämä seuraa siitä, että

$$\frac{u}{3^{a_k+1}} + \frac{v}{3^{a_k+1}} = \frac{b_k}{3^{a_k}} \quad \text{ja} \quad \frac{1}{2^{a_k+1}} + \frac{1}{2^{a_k+1}} = \frac{1}{2^{a_k}}.$$

Kääntäen, jos mahdollisen jonon kaksi termiä u ja v korvataan uudella termillä $\dfrac{u+v}{3}$ ja näin saadaan mahdollinen jono, niin alkuperäinenkin jono on mahdollinen. Merkitään symbolilla α_n jonoa $1, 2, \ldots, n$. Oletetaan, että $n \equiv 1, 2 \mod 4$ ja muunnetaan jono jonoksi α_1 $n-1$:llä muunnoksella $\{u, v\} \mapsto \dfrac{1}{3}(u+v)$. Jono α_1 on mahdollinen; vastaava eksponenttien jono on $\alpha_1 = 0$. Huomattakoon, että jos jonossa ovat luvut m ja $2m$, niin voidaan aina tehdä muunnos $\{m, 2m\} \mapsto m$. Termit $2m$ voidaan siis jättää huomiotta.

Olkoon $n \geq 16$. Osoitetaan, että α_n voidaan palauttaa jonoksi α_{n-12} 12 muunnoksella. Olkoon $n = 12k + r$, $k \geq 1$ ja $0 \leq r \leq 11$. Jos $0 \leq r \leq 5$, niin jonon α_n 12 viimeistä termiä voidaan osittaa kahdeksi yksittäiseksi luvuksi $12k - 6$, $12k$ ja viideksi pariksi $\{12k - 6 -$

i, $12k-6+i\}$, $i=1,\ldots,5-r$, ja $\{12k-j,\ 12k+j\}$, $j=1,\ldots,r$. (Jos $r=0$ tai $r=5$, pareja on vain yhtä lajia.) Koska $12k-6=2(6k-3)$ ja $12k=2(6k)$, $12k-6$ ja $12k$ voidaan poistaa. Operaatiot $\{12k-j,\ 12k+j\}\mapsto 8k$ ja $\{12k-6-i,\ 12k-6+i\}\mapsto 8k$ muuntavat 10 termiä viideksi termiksi $8k$, $8k-4$. Havaitaan, että $4k$ kuuluu jonoon α_{n-12}. Epäyhtälö $4k\le n-12=12k+r$ on yhtäpitävä ehdon $8k\ge 12-r$ kanssa; tämä on totta, kun $r=4$ ja $r=5$. Jos taas $r\le 3$, niin ehdosta $n\ge 16$ seuraa $k\ge 2$, ja ehto $8k\ge 12-r$ on voimassa. Siis α_n voidaan korvata jonolla α_{n-12}. Jos $6\le r\le 11$, menetellään analogisesti. Jonon α_n 12 suurinta lukua jaetaan yksilöiksi $\{12k\}$ ja $\{12k+6\}$ ja pareiksi $\{12k-i,\ 12k+i\}$, $i=1,\ldots,11-r$, ja $\{12k+6-j,\ 12k+6+j\}$, $j=1,\ldots,r-6$. Yksiköt ovat jonon kaksi kertaa niin suuria kuin jotkin jonon pienemmät jäsenet ja ne voidaan siis poistaa. Muunnokset $\{12k-i,\ 12k+i\}\mapsto 8k$ ja $\{12k+6-j,\ 12k+6+j\}\mapsto 8k+4$ muuttavat 10 lukua viideksi. Koska $k\ge 1$ ja $r\ge 6$, niin $4k+2\le n-12$. Syntyneet viisi lukua ovat jonossa α_{n-12} olevien lukujen kaksinkertoja ja ne voidaan poistaa. α_n voidaan nytkin korvata jonolle α_{n-12}. Kun tällainen 12:lla pienentäminen tehdään riittävän monta kertaa ja otetaan huomioon $n\equiv 1,\ 2 \bmod 4$, todetaan, että ongelmaksi jää jonon α_n mahdollisuuden tarkistaminen, kun $n\in\{2,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10,\ 13,\ 14\}$. Tapaukset $n=2,\ 6,\ 10,\ 14$ voidaan unohtaa, koska jonon suurin termi on parillinen ja siis kaksi kertaa niin suuri kuin jokin jonon aikaisempi jäsen. Tapaus $n=5$ selvitetään muunnoksilla $\{4,\ 5\}\mapsto 3$, $\{3,\ 3\}\mapsto 2$, jonka jälkeen jonon kakkoset voidaan poistaa. Tapauksessa $n=9$ voidaan poistaa 6 ja sitten tehdä muunnokset $\{5,\ 7\}\mapsto 4$, $\{4,\ 8\}\mapsto 4$, $\{3,\ 9\}\mapsto 4$. Nyt ensin 4:t ja sitten 2 voidaan poistaa. Tapaus $n=13$ palautuu tapaukseen $n=10$, kun tehdään muunnos $\{11,\ 13\}\mapsto 8$ ja poistetaan 8 ja 12. Todistus on valmis.