Kansainväliset matematiikkaolympialaiset 2015 – tehtävien ratkaisuja

1. *Sanomme, että tason äärellinen pistejoukko $\mathcal{S}$ on tasapainoinen, jos jokaista kahta $\mathcal{S}$:n eri pistettä A ja B kohden on olemassa sellainen $\mathcal{S}$:n piste, että $AC = AB$. Sanomme, että $\mathcal{S}$ on keskipisteetön, jos mitään kolmea $\mathcal{S}$:n eri pistettä A, B ja C kohden ei ole olemassa $\mathcal{S}$:n pistettä P, jolle pätisi $PA = PB = PC$.*

(a) *Osoita, että kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq 3$ on olemassa tasapainoinen joukko, jossa on tasan n pistettä.*

(b) *Määritä kaikki kokonaisluvut $n \geq 3$, joille on olemassa tasapainoinen keskipisteetön joukko, jossa on tasan n pistettä.*

Ratkaisu. (a) Olkoon $n \geq 3$ pariton. Silloin säännöllisen n-kulmion kärkien joukko $\mathcal{V}$ on esimerkki tasapainoisesta n-alkioisesta joukosta. Jos A ja B ovat kaksi monikulmion kärkeä, niin jommallakummalla niiden väliin jäävistä monikulmion osista on pariton määrä kärkiä, ja näistä keskimmäinen on selvästi yhtä etäällä A:sta ja B:stä. Olkoon sitten $n = 2k$ parillinen. Nyt voidaan tarkastella säännöllistä $(6k-6)$-kulmiota $A_1A_2 \ldots A_{6k-6}$, jonka keskipiste on O. Silloin $\angle A_jOA_{j+1} = \dfrac{1}{k-1} \cdot 60^\circ$. Jos siis $|i-j| = k-1$, niin OA_iA_j on tasakylkinen kolmio. Pisteet A_1, A_2, $\ldots A_{n-1}$ ovat monikulmion ympärysympyrän 120°:een kaarella. Olkoon nyt $\mathcal{V} = \{O, A_1, \ldots A_{2k-1}\}$. Osoitetaan, että $\mathcal{V}$ on tasapainoinen. Ensinnäkin $A_iO = A_jO$ jokaisella i, j, $1 \leq i < j \leq 2k-1$, ja jokaisella i, $1 \leq i \leq 2k-1$ joko $A_{i+k-1} \in \mathcal{V}$ tai $A_{i-(k-1)} \in \mathcal{V}$. Tasapainoisuusehto toteutuu siis myös sellaisille $\mathcal{V}$:n pistepareille, joissa toinen piste on O.

(b) Osoitetaan, että tasapainoisia keskipisteettömiä n-alkioisia joukkoja on olemassa, jos ja vain jos n on pariton. Jos n on pariton, niin edellä muodostettu tasapainoinen joukko $\mathcal{V}$ on keskipisteetön. Jos nimittäin A, B, C ovat säännöllisen n-kulmion kärkiä ja $PA = PB = PC$, niin P on janojen AB ja AC keskinormaalien leikkauspisteenä monikulmion keskipiste, joka ei kuulu joukkoon $\mathcal{V}$. Olkoon sitten $n = 2k$ parillinen. Tarkastetaan tasapainoista $2k$-alkioista joukkoa. Jokaiseen pariin $\{A, B\} \subset \mathcal{V}$ liittyy ainakin yksi $C \in \mathcal{V}$, jolle $AC = BC$. Pistepareja on $k(2k-1)$ kappaletta ja pisteitä $2k$ kappaletta, joten jokin piste $P \in \mathcal{V}$ liittyy ainakin k:hon pariin. Koska P ei ole yhdessäkään näistä pareista, parit kattavat enintään $2k-1$ pistettä. Parien joukossa on siis oltava ainakin kaksi sellaista, joilla on yhteinen piste. Jos nämä parit ovat $\{A, B\}$ ja $\{A, C\}$, niin $AP = BP = CP$. Mutta tästä nähdään, että $\mathcal{V}$ ei ole keskipisteetön.

2. *Määritä kaikki sellaiset positiivisten kokonaislukujen kolmikot (a, b, c), joille jokainen luvuista*

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

on luvun 2 potenssi.

(Luvun 2 potenssi on muotoa 2^n oleva kokonaisluku, missä n on ei-negatiivinen kokonaisluku.)

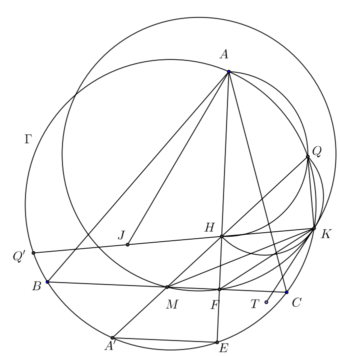
Ratkaisu. Jokaiseen ratkaisuun (a, b, c) liittyy kuusi mahdollista permutaatiota. Edetään tapauksittain. Olkoon $a = 1$. Silloin $b - c$ ja $c - b$ ovat molemmat 2:n potensseja; tämä on mahdotonta, koska luvut ovat molemmat nollia tai toinen niistä on negatiivinen. Ehdon toteuttavissa kolmikoissa pienin luvuista on siis ≥ 2. Toisena tapauksena tarkastellaan tilannetta, jossa ainakin kaksi luvuista on samaa. Olkoon $a = b$. Silloin $a(c-1)$ on kahden potenssi, joten a ja $c-1$ ovat tällaisia. Siis $a = 2^p$ ja $c = 2^q + 1$, missä p ja q ovat positiivisia. Silloin $a^2 - c = a^{2p} - 2^q - 1$ on 2:n potenssi. Jos olisi $q \geq 2$, niin olisi $a^2 - c \equiv -1 \mod 4$, mikä on mahdotonta. Siis on oltava $q \leq 1$ eli $c = 2$ tai $c = 3$ ja $ab - c = 2^{2p} - 2$ tai $= 2^{2p} - 3$. Kumpikin näistä luvuista on kahden potenssi silloin ja vain silloin, kun $p = 1$. Jos luvuista a, b, c kaksi on samoja, ratkaisuehdokkaita ovat siis $(2, 2, 2)$ ja $(2, 2, 3)$ permutaatioineen.

Tarkastellaan sitten tapausta, jossa a, b, c ovat kaikki eri lukuja. Voidaan olettaa, että $2 \leq a < b < c$. Tällöin varmasti $bc \geq 4 \cdot 8 = 32$. On olemassa kokonaisluvut p, q, r, joille $bc - a = 2^p$, $ac - b = 2^q$ ja $ab - c = 2^r$. Tehdyistä oletuksista seuraa heti, että $r < q < p$. Oletetaan nyt vielä, että $a = 2$. Osoitetaan, että tällöin $r = 0$. Jos nimittäin olisi $r > 0$, olisi c parillinen, ja koska $ac - b = 2^q \geq 2$, myös b olisi parillinen. Nyt bc olisi jaollinen neljällä, mutta koska $bc - a = bc - 2 = 2^p \geq 4$, tullaan ristiriitaan. Siis $ab - c = 2$ eli $c = 2b - 1$. Koska $ac - b = 2^q$ eli $3b - 2 = 2^q$ ja $b > 2$, pienin mahdollinen q on 4. Jos $q = 4$, niin $b = 6$ ja $c = 2 \cdot 6 - 1 = 11$. Kolmikko $(2, 6, 11)$ permutaatioineen on ratkaisuehdokas. Jos $q \geq 5$, niin yhtälöstä $2^p = bc - a = b(2b-1) - 2$ saadaan $9 \cdot 2^p = 9b(2b-1) - 18 = 18b^2 - 9b - 18 = (3b-2)(6b+1) - 16 = 2^q(2^{q+1} + 5) - 16$. Selvästi yhtälön vasen puoli on jaollinen 32:lla, mutta oikea puoli ei ole. Ristiriita osoittaa, että tapauksissa $q \geq 5$ ratkaisua ei ole.

Jäljellä on vielä tapaus $a \geq 3$. Luvuista $c \pm 1$ enintään toinen on jaollinen 4:llä. Olkoon d ± 1 niin, että $c - d$ ei ole 4:llä jaollinen. Silloin $2^p + d \cdot 2^q = (bc - ad^2) + d(ca - b) = (b + ad)(c - d)$. Tämä luku on jaollinen 2^q:lla, joten $b + ad$ on jaollinen 2^{q-1}:llä. Mutta koska $2^q = ac - b > ac - c = (a-1)c \geq 2c > 2b > 2a$, sekä a että b ovat pienempiä kuin 2^{q-1}. On siis oltava $d = 1$ ja $a + b = 2^{q-1}$. Mutta silloin $ac - b = 2^q = 2(a+b)$ ja $4b > 3b + a = ac - a = a(c-1) \geq ab$, joten $a < 4$. On siis oltava $a = 3$. Siis $3c = 6 - 3b$ ja $c = b + 2$. Ehto $bc - a = 2^p$ sievenee nyt muotoon $2^p = b(b+2) - 3 = (b-1)(b+3)$. Koska sekä $b - 1$ että $b + 3$ ovat kahden potensseja, on oltava $b = 5$ ja siis $c = 7$. Saadaan ratkaisuehdokas $(3, 5, 7)$ (permutaatioineen). Muita mahdollisia ratkaisuja ei ole. – On helppo tarkistaa, että kaikki saadut ratkaisuehdokkaat $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(2, 6, 11)$ ja $(3, 5, 7)$ todella toteuttavat tehtävän ehdot.

3. *Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jossa $AB > AC$. Olkoon Γ sen ympärysympyrä, H korkeusjanojen leikkauspiste ja F A:sta piirretyn korkeusjanan kantapiste. Olkoon M BC:n keskipiste. Olkoon Q sellainen Γ:n piste, että $\angle HQA = 90°$, ja olkoon K sellainen Γ:n piste, että $\angle HKQ = 90°$. Oletetaan, että pisteet A, B, C, K ja Q ovat kaikki eri pisteitä ja sijaitsevat Γ:lla tässä järjestyksessä.*

Todista, että kolmioiden KQH ja FKM ympärysympyrät sivuavat toisiaan.

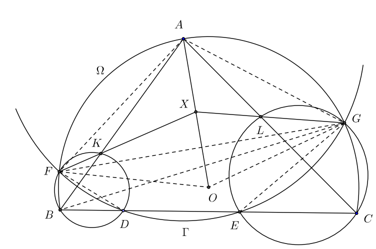


Ratkaisu. Olkoon E AF:n ja Γ:n toinen leikkauspiste. Silloin tunnetusti $HF = FE$ [koska kulmien $\angle HBC$ ja $\angle CAE$ vastinkyljet ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kulmat ovat yhtä suuret, ja samaa kaarta vastaavina kehäkulmina $\angle CBE = \angle CAE$, niin kolmiot BFH ja BFE ovat yhtenevät (ksk)]. Olkoot A' ja Q' A:sta ja Q:sta piirrettyjen Γ:n halkaisujoiden toiset päätepisteet. Silloin $\angle AQA' = 90°$, mistä seuraa, että H on janalla $A'Q$ ja $\angle QKQ' = 90°$, mistä seuraa, että H on myös janalla $Q'K$. Nyt $A'E \| BC$, mistä seuraa, että BC leikkaa HA':n tämän keskipisteessä. Janan $A'E$ keskinormaali leikkaa myös $A'H$:n tämän keskipisteessä, mutta koska $A'E$ ja BC ovat Γ:n yhdensuuntaisia jänteitä, $A'E$:n keskinormaali on sama kuin BC:n keskinormaali. Tästä seuraa, että $A'H$:n keskipiste on M. Olkoon vielä J janan $Q'H$ keskipiste.

Olkoon nyt T jokin piste kolmion HKQ ympärysympyrän pisteeseen K piirretyllä tangentilla, eri puolella suoraa KH kuin Q. Silloin $\angle TKH = \angle KQH$. Jotta TK olisi myös kolmion KMF ympärysympyrän tangentti, on kulman $\angle MKT$ suuruuden oltava puolet kaarta $\overset{\frown}{MK}$ vastaavasta keskuskulmasta. Mutta kaarta $\overset{\frown}{MF}$ vastaavan keskuskulman puolikas on $\angle MKF$ ja kaarta $\overset{\frown}{FK}$ vastaavan keskuskulman puolikas on $\angle KMF$. Koska $\angle MKF + \angle KMF = \angle CFK$, on todistettava, että $\angle MKT = \angle CFK$ eli $\angle HQK = \angle HKT = \angle HKM + \angle MKT = \angle HKM + \angle CFK$. Mutta $\angle HQK = 90° - \angle QHK = 90° - \angle Q'HA'$ ja $\angle CFK = 90° - \angle KFA$, todistettava yhtyeys voidaan kirjoittaa muotoon $\angle Q'HA' = \angle KFA - \angle HKM$. Kolmiot KHE ja AHQ' ovat yhdenmuotoisia, ja F ja J ovat vastinsivujen keskipisteitä. Siis $\angle KFA = \angle HJA$. Vastaavasti KHA ja QHQ' ovat yhdenmuotoisia ja M ja J vastinsivujen keskipisteitä, joten $\angle HKM = \angle JQH$. On siis todistettava, että $\angle Q'HA' = \angle HJA - \angle JQH$. Kolmiosta QJH nähdään, että $\angle Q'HA' = \angle JQH + \angle HJQ$. Toisaalta $\angle HJA = \angle QJA + \angle HJQ$. Todistettava yhtälö saa muodon $2 \cdot \angle JQH = \angle QJA$. Mutta tämä relaatio on ilmeinen, sillä $AQ'A'Q$ on suorakaide ja J, koska on janan HQ' keskipiste, sijaitsee suorakaiteen sivujen AQ ja $Q'A'$ keskipisteet yhdistävällä janalla.

4. *Kolmion ABC ympärysympyrä on Ω ja O on Ω:n keskipiste. A-keskinen ympyrä Γ leikkaa janan BC pisteissä D ja E niin, että B, D, E ja C ovat eri pisteitä ja tässä järjestyksessä suoralla BC. Olkoot F ja G Γ:n ja Ω:n leikkauspisteet, niin että A, F B, C ja G ovat eri pisteitä ja tässä järjestyksessä ympyrällä Ω. Kolmion BDF ympärysympyrä leikkaa janan AB myös pisteessä K ja kolmion CEG ympärysympyrä janan CA myös pisteessä L.*

Oletetaan, että suorat FK ja GL ovat eri suoria ja että ne leikkaavat toisensa pisteessä X. Osoita, että piste X on suoralla AO.



Ratkaisu. Leikatkoon FK AO:n pisteessä X' ja GL pisteessä X''. Pisteet A ja O ovat molemmat janan GF keskinormaalilla. Siis $\angle FAX' = \angle GAX''$. Koska $AF = AG$, niin jos $\angle AFK = \angle AGL$, niin kolmiot AFX' ja AGX'' ovat yhtenevät (ksk) ja $X' = X'' = X$. On siis osoitettava, että $\angle AFK = \angle AGL$. Nyt $\angle AFK = \angle AFD - \angle KFD = \angle AFG + \angle GFD - \angle KFD$. Mutta ympyrän Ω kehäkulmina $\angle AFG =$

$\angle ABG$, kolmion BDF ympärysympyrän kehäkulmina $\angle KFD = \angle KBD$, ja koska nelikulmio $FDGE$ on jännenelikulmio, on $\angle GFD = \angle GEC$. Siis $\angle AFK = \angle CEG + \angle ABG - \angle KBD = \angle CEG - \angle GBC$. Mutta kolmion CEG ympärysympyrästä nähdään $\angle CEG = \angle CLG$ ja ympyrästä Ω $\angle GBC = \angle GAC$. Mutta viimein kolmiosta ALG saadaan $\angle AGL = \angle GLC + \angle GAL = \angle CEG - \angle GBC = \angle AFK$. Todistus on valmis.

5. *Olkoon $\mathbb{R}$ reaalilukujen joukko. Määritä kaikki sellaiset funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka toteuttavat yhtälön*

$$f\left(x + f(x+y)\right) + f(xy) = x + f(x+y) + yf(x)$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

Ratkaisu. Kun tehtävän yhtälöön sijoitetaan $y = 1$, saadaan

$$f(x + f(x+1)) = x + f(x+1). \tag{1}$$

Jokaisella $x \in \mathbb{R}$ $x + f(x+1)$ on funktion f kiintopiste. Jaetaan nyt tarkastelu kahteen osaan sen mukaan, onko $f(0) = 0$ tai $f(0) \neq 0$.

Oletetaan, että $f(0) \neq 0$. Jos alkuperäiseen yhtälöön sijoitetaan $x = 0$, saadaan $f(f(y)) + f(0) = f(y) + yf(0)$. Olkoon nyt a jokin f:n kiintopiste. Kun edelliseen yhtälöön sijoitetaan $y = a$, saadaan $a + f(0) = a + af(0)$ eli $a = 1$. On siis oltava $x + f(x+1) = 1$ kaikilla x eli $f(x) = 2 - x$. Helposti voidaan varmistua siitä, että $f(x) = 2 - x$ toteuttaa tehtävän yhtälön, ja on siis ratkaisu.

Olkoon sitten $f(0) = 0$. Sijoitetaan tehtävän yhtälöön $y = 0$ ja kirjoitetaan x:n paikalle $x + 1$. Saadaan $f(x + f(x+1) + 1) = x + f(x+1) + 1$. Siis myös $x + 1 + f(x+1)$ on f:n kiintopiste kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Kun yhtälöön (1) sijoitetaan $x = -1$, saadaan $f(-1) = -1$. Kun alkuperäiseen yhtälöön sijoitetaan $x = 1$ ja $y = -1$, saadaan $f(1) + f(-1) = 1 - f(1)$ eli $f(1) = 1$. Sijoitetaan vielä alkuperäiseen yhtälöön $x = 1$. Saadaan

$$f(1 + f(y+1)) + f(y) = 1 + f(y+1) + y \tag{2}$$

Jos nyt a ja $a+1$ ovat f:n kiintopisteitä, niin $f(1+a+1)+a = 1+a+1+a$ eli $f(a+2) = a+2$, joten myös $a + 2$ on kiintopiste. Siis $x + f(x+1) + 2$ on kaikilla x f:n kiintopiste. Kun yhtälössä $f(x + f(x+1) + 2) = x + f(x+1) + 2$ korvataan $x + 2$ x:llä, saadaan $f(x + f(x-1)) = x + f(x-1)$. Toisaalta, jos alkuperäiseen yhtälöön sijoitetaan $y = -1$, saadaan $f(x + f(x-1)) = x + f(x-1) - f(x) - f(-x)$. Tästä nähdään, että $f(-x) = -f(x)$ kaikilla x. f on siis pariton funktio. Sijoitetaan vielä alkuperäiseen yhtälöön $x = -1$ ja y:n paikalle $-y$. Koska $f(-1) = -1$, saadaan $f(-1 + f(-y-1)) + f(y) = -1 + f(-y-1) + y$. Kun käytetään hyväksi f:n parittomuutta, saadaan $-f(1 + f(y+1)) + f(y) = -1 - f(y+1) + y$. Kun tämä yhtälö ja (2) lasketaan yhteen, saadaan $f(y) = y$ kaikilla y. – Helposti nähdään, että myös ratkaisuehdokas $f(x) = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ todella on ratkaisu.

6. *Kokonaislukujono a_1, a_2, ... toteuttaa seuraavat ehdot:*

(i) $1 \leq a_j \leq 2015$ *kaikilla* $j \geq 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ *kaikilla* $1 \leq k < \ell$.

Todista, että on olemassa kaksi positiivista kokonaislukua b ja N, niin että

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n}(a_j - b)\right| \le 1007^2$$

kaikilla ehdon $n > m \ge N$ toteuttavilla kokonaisluvuilla m ja n.

Ratkaisu. Olkoon $s_n = a_n + n$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n. Tiedämme, että $n+1 \le s_n \le n+2015$ kaikilla n ja että jonon (s_n) luvut ovat kaikki eri lukuja. Tarkastellan joukkoa $M = \mathbb{Z}_+ \setminus \{s_1, s_2, \ldots\}$. Osoitetaan, että M:ssä on enintään 2015 alkiota. Ellei näin olisi, olisi M:ssä 2016 eri alkiota $m_1 < m_2 < \ldots < m_{2016}$. Jos $n = m_{2016}$, niin

$$\bigcup_{k=1}^{n}\{s_k\} \cup \bigcup_{k=1}^{2016}\{m_k\} \subset \{1, 2, \ldots, n+2015\}.$$

Nyt vasemman puolen joukossa on $n + 2016$ alkiota ja oikean puolen joukossa $n + 2015$ alkiota. Ristiriita osoittaa väitteen todeksi.

Osoitetaan nyt, että tehtävässä kysytyiksi luvuiksi b ja N kelpaavat M:n alkioiden lukumäärä ja M:n suurin alkio. Olkoot b ja N nämä. Joukossa

$$B_r = M \cup \bigcup_{k=1}^{r}\{s_k\} \tag{1}$$

on tasan $b + r$ alkiota ja joukon suurin alkio on enintään $r + 2015$. Toisaalta $s_r \ge r + 1$, joten jokainen positiivinen kokonaisluku $k \le r+1$ on joukossa B_r. On siis olemassa joukko $C_r \subset \{1, 2, \ldots, 2014\}$ niin, että

$$B_r = ([1, r+1] \cap \mathbb{Z}) \cup \{r + 1 + x | x \in C_r\}. \tag{2}$$

Joukossa C_r on $b - 1$ alkiota. Otetaan käyttöön merkintä ΣJ osoittamaan äärellisen lukujoukon J alkioiden summaa. Yhtälöiden (1) ja (2) perusteella ΣB_r voidaan laskea kahdella tavalla ja päätyä yhtälöön

$$\Sigma M + \sum_{k=1}^{r} s_k = \sum_{k=1}^{r} k + b(r+1) + \Sigma C_r.$$

Tästä päästään helposti muotoon

$$\Sigma M + \sum_{k=1}^{r}(a_k - r) = b + \sigma C_r. \tag{3}$$

Olkoot nyt m ja n kokonaislukuja, joille pätee $N \le m < n$. Jos yhtälöön (3) sijoitetaan $r = n$ ja $r = m$ ja syntyneet yhtälöt vähennetään toisistaan, saadaan

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}(a_i - b)\right| = |\Sigma C_n - \Sigma C_m|\,. \tag{4}$$

Koska C_n ja C_m ovat joukon $\{1, 2, \ldots, 2014\}$ $(b-1)$-alkioisia osajoukkoja, niin yhtälön (4) oikean puolen suurin mahdollinen arvo saadaan silloin, kun $C_m = \{1, 2, \ldots, b-1\}$ ja $C_n = \{2014, 2013, \ldots, 2014-b+2\}$ tai päinvastoin. Tällöin

$$|\Sigma C_n - \Sigma C_m| = (b-1)(2015-b) \leq \left(\frac{(b-1)+(2015-b)}{2}\right)^2 = 1007^2.$$