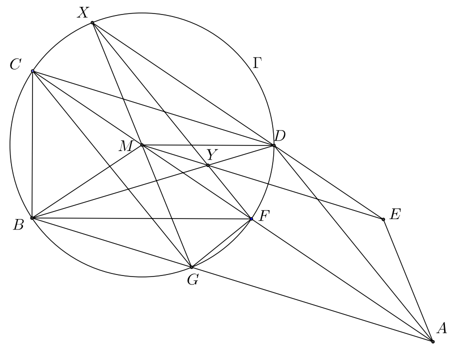
IMO 2016 – tehtävät ja ratkaisuja

1. *Kolmiolla BCF on suora kulma kärjessä B. Olkoon A piste suoralla CF siten, että $FA = FB$ ja piste F sijaitsee pisteiden A ja C välissä. Valitaan piste D siten, että $DA = DC$ ja AC puolittaa kulman $\angle DAB$. Valitaan piste E siten, että $EA = ED$ ja AD puolittaa kulman $\angle EAC$. Olkoon M janan CF keskipiste. Olkoon X se piste, jolla $AMXE$ on suunnikas (missä $AM \| EX$ ja $AE \| MX$). Osoita, että suorat BD, FX ja ME kulkevat saman pisteen kautta.*



Ratkaisu. Merkitään $\angle BAC = \alpha$. Olkoon Γ kolmion FCB ympärysympyrä. M on Γ:n keskipiste. Leikatkoon BG Γ:n myös pisteessä G. Osoitetaan ensin, että myös piste D on ympyrällä Γ. Koska BAF on tasakylkinen, $\angle FBG = \alpha$. Siis myös $\angle GCF = \alpha$, ja GAC on tasakylkinen. Koska DCA on tasakylkinen ja $\angle DAC = \alpha$, GAC ja DCA ovat yhteneviä (ksk). Siis $CD = CG$, ja CGF ja CDF ovat yhteneviä (sks). Thaleen lauseen perusteella $\angle CGF$ on suora. Siis myös $\angle CDF$ on suora, ja Thaleen lauseen käänteislauseen perusteella D on CF-halkaisijaisella ympyrällä Γ.
Osoitetaan sitten, että $MGAE$ on suunnikas. Koska $CGAD$ on neljäkäs, $CG \| DA$. Koska $\angle MCG = \angle FCG = \angle EDA$, MCG ja EDA ovat yhteneviä. Siis $MG = EA$. Toisaalta esimerkiksi $\angle FMG = 2\alpha = \angle MAE$, joten $MG \| EA$. $MGAE$ on siis suunnikas. Mutta $MX = EA = MG$ ja $MX \| AE \| MG$. Siis $MX = MG$, joten X on ympyrällä Γ ja suoralla MG. GX on siis Γ:n halkaisija. Nyt $\angle MFB = 2\alpha$ (kolmion FBA perusteella) ja $\angle DXM = \angle DCG = 2\alpha$, joten kolmiot MBF ja MDX ovat yhteneviä. Olkoon Y janojen BD ja FX leikkauspiste. Silloin myös kolmiot BFY ja XDY ovat yhteneviä (kks). Kolmiot MFY ja MDY ovat nyt yhteneviä (sss), joten $\angle MDY = \frac{1}{2} \cdot \angle DMF = \alpha$. Mutta $CD \| GA \| ME$ ja $DE \| AC$, joten $CMED$ on suunnikas ja DME on tasakylkinen. Tästä seuraa, että $DMFE$ on neljäkäs, joten ME on kulman $\angle DMF$ puolittaja. Koska Y on kulman $\angle DMF$ puolittajalla, Y on suoralla ME, ja väite on todistettu.

2. *Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille $n \times n$-ruudukon jokaiseen ruutuun voi asettaa yhden kirjaimista I, M ja O siten, että:*

- *jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa yksi kolmasosa kirjaimista on I-kirjaimia, yksi kolmasosa M-kirjaimia ja yksi kolmasosa O-kirjaimia; ja*
- *jokaisella lävistäjällä, jonka ruutujen lukumäärä on kolmella jaollinen, yksi kolmasosa kirjaimista on I-kirjaimia, yksi kolmasosa M-kirjaimia ja yksi kolmasosa O-kirjaimia.*

Huomautus: Numeroimme $n \times n$-ruudukon rivit ja sarakkeet luonnollisella tavalla luvuilla $1, 2, \ldots, n$. Täten jokainen ruutu vastaa positiivisten kokonaislukujen paria (i, j), missä $1 \le i, j \le n$. Kun $n > 1$, ruudukossa on $4n - 2$ lävistäjää, jotka edustavat kahta eri lajia. Ensimmäisen lajin lävistäjä koostuu niistä ruuduista (i, j), joissa $i + j$ on jokin vakio, kun taas toisen lajin lävistäjä koostuu niistä ruuduista (i, j), missä $i - j$ on jokin vakio.

Ratkaisu. On selvää, että on oltava $3 \mid n$, $n = 3k$. Osoitetaan, että kelvollisia ovat kaikki 9:llä jaolliset luvut n. Osoitetaan ensin, että $9 \mid n$ on välttämätön ehto. Lävistäjät, joiden ruutujen lukumäärä on kolmella jaollinen, ovat ne, joissa $j = i + 3p$, $-(k-1) \le p \le k-1$, $1 \le i, j \le n$ ja $i + j = 1 + 3q$, $1 \le q \le 2k - 1$. Kun tarkastellaan niitä rivejä, joiden järjestysnumero on $j = 2 + 3t$, $0 \le t \le k - 1$, niin huomataan, että mainitut lävistäjät kohtaavat rivit ruuduissa (i, j), missä $i = 2 + 3s$. Toisaalta lävistäjät kohtaavat sarakeet, joiden järjestysnumero i ei ole $\equiv 2 \bmod 3$ ruuduissa (i, j), missä j ei ole $\equiv 2 \bmod 3$. Jos nyt lasketaan kirjaimet kaikista ruuduista, jotka ovat riveillä, joiden numero on $\equiv 2 \bmod 3$ ja lisätään lävistäjiltä, joiden ruutumäärä on kolmella jaollinen ja vähennetään kaikilta sarakkeilta, joiden järjestysnumero ei ole $\equiv 2 \bmod 3$ lasketut kirjaimet, saadaan yhtä monta I-, M- ja O-kirjainta. Toisaalta tulee lasketuksi kolme kertaa ruuduilla $(2 + 3s, 2 + 3t)$, $0 \le s, t \le 3(k-1)$, olevien kirjainten lukumäärä. Jokaisesta ruudusta on laskettu sama kirjain kolme kertaa, joten ruutuja, joissa on I, M tai O on oltava yhtä monta. Ruutujen lukumäärän k^2 on oltava jaollinen 3:lla. Siis k:n on oltava jaollinen 3:lla ja n:n 9:llä.

On vielä osoitettava, että $9 \mid n$ on riittävä ehto. Riittää, että konstruoidaan ehdon täyttävä 9×9-ruudukko. Sitä monistamalla saadaan kelvollinen $9k \times 9k$ ruudukko. Yksi kelvollinen ruudukko olisi

$$\begin{array}{ccccccccc}
I & I & I & M & M & M & O & O & O \\
M & M & M & O & O & O & I & I & I \\
O & O & O & I & I & I & M & M & M \\
I & I & I & M & M & M & O & O & O \\
M & M & M & O & O & O & I & I & I \\
O & O & O & I & I & I & M & M & M \\
I & I & I & M & M & M & O & O & O \\
M & M & M & O & O & O & I & I & I \\
O & O & O & I & I & I & M & M & M
\end{array}$$

3. *Olkoon $P = A_1A_2 \ldots A_k$ tason konveksi monikulmio. Kärkien A_1, A_2, $\ldots$, A_k koordinaatit ovat kokonaislukuja, ja kärjet sijaitsevat erään ympyrän kehällä. Olkoon S monikulmion P ala. On annettu pariton positiivinen kokonaisluku n siten, että monikulmion P sivujen pituuksien neliöt ovat kokonaislukuja ja jaollisia luvulla n. Osoita, että $2S$ on kokonaisluku ja jaollinen luvulla n.*

Ratkaisu. Olkoon n kiinteä pariton kokonaisluku. Todistetaan väite induktiolla k:n suhteen. Olkoon $k = 3$. Kolmion kärjet ovat aina jonkin ympyrän kehällä. Olkoot ne $A_i = (x_i, y_i)$. $i = 1, 2, 3$. Oletuksen mukaan $(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 = nb_{ij}$, missä b_{ij} on kokonaisluku. Koska $nb_{23} = (x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2 = ((x_2-x_1)-(x_3-x_1))^2+((y_2-y_1)-(y_3-y_1))^2 = nb_{i2}+nb_{13}+2((x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1))$, on $(x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1)$ myös jaollinen n:llä. Toisaalta $2S = |\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}| = |(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)|$. $2S$ on siis kokonaisluku. Lisäksi $n^2b_{12}b_{13} = ((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2)((x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2) = ((x_1-x_2)(x_1-x_3)+(y_1-y_2)(y_1-y_3))^2+((x_1-x_2)(y_1-y_3)-(x_1-x_3)(y_1-y_2))^2$. Yhtälön oikean puolen ensimmäinen yhteenlaskettava on aikaisemman perusteella jaollinen n^2:lla. Siis jälkimmäinenkin eli $(2S)^2$ on jaollinen n^2:lla. Näin ollen $2S$ on jaollinen n:llä.

Todistetaan aputulos. Olkoon p pariton alkuluku ja $\nu_p(x)$ on suurin kokonaislukueksponentti ϵ, jolla $p^\epsilon | x$. Väitetään, että jos $a + b + c = 0$, niin kaksi pienintä luvuista $\nu_p(a^2)$,

$\nu_p(b^2)$, $\nu_p(c^2)$ ovat yhtä suuria. Voimme olettaa, että $\nu_p(a^2) \ge \nu_p(b^2) \ge \nu_p(c^2)$. Jos $a+b+c=0$, niin (vertaa Heronin kaavan todistukseen) $0=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)=((a+b)^2-c^2)(c^2-(a-b)^2)=(2ab+(a^2+b^2-c^2))(2ab-(a^2+b^2-c^2))=4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$. Nyt $a^2=p^{\nu_p(a^2)}a'$, $b^2=p^{\nu_p(b^2)}b'$ ja $c^2=p^{\nu_p(c^2)}c'$, missä a', b', c' ovat jaottomia p:llä. Siis

$$4p^{\nu_p(a^2)+\nu_p(b^2)}a'b' = p^{2\nu_p(c^2)}(p^{\nu_p(a^2)-\nu_p(c^2)}a' + p^{\nu_p(b^2)-\nu_p(c^2)}b' + c')^2. \tag{1}$$

Jos nyt $\nu_p(b^2)-\nu_p(c^2)>0$, niin yhtälön (1) vasen puoli on jaollinen $p^{\nu_p(a^2)+\nu_p(b^2)}$:lla, mutta oikea puoli vain $p^{2\nu_p(c^2)}$:lla, mikä on ristiriita.

Tarkastellaan sitten yleistä k-kulmiota P_k, $k\ge 3$. Nyt

$$2S = \sum_{j=2}^{k-1} |A_1A_j \times A_1A_{j+1}|,$$

ja koska pisteiden koordinaatit ovat kokonaislukuja, $2S$ on kokonaisluku. Samoin jokaisen lävistäjän neliö on kokonaisluku. Olkoon $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_a^{\alpha_a}$ n:n esitys (parittomien) alkulukujen tulona. Väitteen todistamiseksi riittää, kun osoitetaan, että jos jokaisella parittomalla alkuluvulla p siitä, että kaikilla $3\le t\le k-1$, P_t:n sivujen neliöt ovat jaollisia luvulla p^α, seuraa, että P_t:n kaksinkertainen ala on jaollinen p^α:lla, niin myös siitä, että P_k:n sivujen neliöt ovat jaollisia p^α:lla, seuraa, että P_k:n kaksinkertainen ala on jaollinen p^α:lla.

Induktioaskeleen otto onnistuu, jos jonkin P_k:n aidon lävistäjän neliö on jaollinen p^α:llä: silloinhan P_k voidaan jakaa kahdeksi induktio-oletuksen toteuttavaksi monikulmioksi pitkin kyseistä lävistäjää. Osoitetaan epäsuorasti, että tällainen lävistäjä aina on olemassa.

Olkoon ensin $k=4$. Jos (jänne)nelikulmion P_4 sivut ovat a, b, c ja d ja lävistäjät x ja y, niin Ptolemaioksen lauseen nojalla $ac+bd-xy=0$. Aputuloksen perusteella $n_p(x^2y^2)=\min\{n_p(a^2c^2),\, n_p(b^2d^2)\}\ge 2\alpha$. Siis joko $n_p(x^2)\ge\alpha$ tai $n_p(y^2)\ge\alpha$. Ainakin toisen lävistäjän pituuden neliö on jaollinen p^α:lla, joten nelikulmio voidaan jakaa kahdeksi kolmioksi, joiden kummankin ala on jaollinen p^α:lla.

Olkoon sitten k mielivaltainen. Oletetaan, että sillä ei ole sisälävistäjää, jonka pituus olisi jaollinen p^α:lla. Tarkastellaan jännenelikulmiota $A_iA_{i+1}A_jA_{j+1}$, jonka kaksi sivua ovat monikulmion P_k sivuja. Jos jälleen merkitään $a=A_iA_{i+1}$, $b=A_{i+1}A_j$, $c=A_jA_{j+1}$, $d=A_{j+1}A_i$, $x=A_iA_j$ ja $y=A_{i+1}A_{j+1}$, niin Ptolemaioksen lauseen mukaan $ac+bd-xy=0$. Aputuloksen perusteella $\nu_p(b^2d^2)=\nu_p(x^2y^2)$ eli

$$\nu_p(A_{i+1}A_j^2)+\nu_p(A_{j+1}A_i^2)=\nu_p(A_iA_j^2)+\nu_p(A_{i+1}A_{j+1}^2. \tag{2}$$

Lasketaan nyt yhtälöt (2) puolittain yhteen kaikkien jännenelikulmioiden $A_iA_{i+1}A_jA_{j+1}$ yli. Silloin summassa ovat termeinä $A_{i+1}A_j$ ovat mukana kaikki muut paitsi muotoa $A_{i+1}A_{i-1}$ ja $A_{i+1}A_i$. Mukana ovat siis kaikki lävistäjät kahdesti, ne lävistäjät, jotka leikaavat vain yhden kärkikolmion pois kerran, ja kaikki sivut kerran. Symmetrian vuoksi termeissä $A_{j+1}A_i$ ovat mukana samat sivut ja lävistäjät. Termeissä A_iA_j ja termeissä

$A_{i+1}A_{j+1}$ ovat mukana kaikki lävistäjät, muttei lainkaan monikulmion sivuja. Kun yhtälöt (2) lasketaan yhteen ja syntynytää yhtälöä sievennetään edellä esitettyjen havaintojen mukaisesti, jäljelle jää yhtälö

$$\sum_{i=1}^{k} \nu_p(A_iA_{i+1}^2) = \sum_{i=1}^{k} \nu_p(A_iA_{i+2}^2).$$

Koska vasemmalla puolella jokainen yhteenlaskettava on $\geq \alpha$, on oikeallakin puolella oltava jokin yhteenlaskettava, joka on $\geq \alpha$. On siis jokin lävistäjä A_iA_{i+1}, jonka pituuden neliö on jaollinen p^α:lla, vastoin tehtyä oletusta. Induktioaskel voidaan siis ottaa, ja väite on todistettu.

4. *Positiivisista kokonaisluvuista koostuva joukko on sulotuoksuinen, jos se sisältää ainakin kaksi alkiota ja jokaisella sen alkioista on yhteinen alkulukutekijä ainakin yhden toisen alkion kanssa. Olkoon $P(n) = n^2 + n + 1$. Mikä on pienin mahdollinen positiivisen kokonaisluvun b arvo, jolla on olemassa ei-negatiivinen kokonaisluku a siten, että joukko*

$$\{P(a+1),\, P(a+2),\, \ldots,\, P(a+b)\}$$

on sulotuoksuinen?

Ratkaisu. Selvitetään lukujen $P(n)$ ja $P(n+k)$ mahdollisia yhteisiä tekijöitä. Koska $P(n) = n(n+1)+1$, jokainen $P(n)$ on pariton. Koska $P(n+1) - P(n) = 2(n+1)$, lukujen $P(n+1)$ ja $P(n)$ yhteisten tekijöiden on oltava luvun $n+1$ tekijöitä ja siis myös luvun $P(n) - (n+1) = n^2$ tekijöitä. Siis s.y.t.$(P(n),\, P(n+1)) = 1$. Tästä seuraa, että $\{P(a+1),\, P(a+2),\, P(a+3)\}$ ei ole millään a sulotuoksuinen. Siis $b \geq 4$. Olkoon p lukujen $P(n+2) = n^2 + 5n + 7$ ja $P(n)$ yhteinen alkutekijä. Silloin p on luvun $4n+6$ ja edelleen luvun $2n+3$ tekijä. Jos $2n+3 = qp$, missä q on pariton luku, niin $n = \dfrac{1}{2}(qp-3)$ ja

$$P(n) = \frac{q^2p^2 - 4qp + 7}{4}$$

$P(n)$ on jaollinen p:llä jos ja vain jos $p = 7$. Koska tällöin $2n+3 \equiv 0 \mod 7$, on oltava $n \equiv 2 \mod 7$. Siis s.y.t.$(P(n),\, P(n+2))$ on joko 1 tai 7. Koska $P(n+3) = n^2 + 7n + 13$, niin $P(n+3) - P(n) = 6n + 12 = 2 \cdot 3 \cdot (n+1)$. $3 \mid P(n)$, jos ja vain jos $n \equiv 1 \mod 3$. Jos $p \geq 5$ on pariton alkuluku ja $p \mid (n+1)$, niin p ei ole luvun $P(n)$ tekijä. Edelleen, $P(n+4) = n^2+9n+21$ ja $P(n+4)-P(n) = 8n+20 = 4(2n+5)$. Jos p on $P(n+4)$:n ja $P(n)$:n yhteinen alkutekijä, niin $2n+5 = qp$ jollain parittomalla q:n arvolla, ja $n = \dfrac{1}{2}(qp-5)$. Tällöin, kuten helppo lasku osoittaa, $P(n) = \dfrac{1}{4}((qp)^2 - 8qp + 19)$, ja $p \mid P(n)$ vain, jos $p = 19$. Lisäksi tällöin $n \equiv 7 \mod 19$

Osoitetaan nyt, että on oltava $b \geq 6$. Vastaoletus: $\{P(n+1),\, P(n+2),\, P(n+3),\, P(n+4),\, P(n+5)\}$ on sulotuoksuinen jollakin n. Luvulla $P(n+3)$ voi olla yhteinen alkutekijä ($p = 7$) joko luvun $P(n+1)$ tai luvun $P(n+5)$ kanssa. Olkoon s.y.t.$(P(n+1),\, P(n+3)) = 7$.

Silloin $n+1 \equiv 2 \bmod 7$. Koska $n+2 \equiv 3 \bmod 7$, luvulla $P(n+2)$ ei ole yhteistä alkutekijää luvun $P(n+4)$ kanssa. Sulotuoksuisuuden mahdollistaa vain se, että $P(n+2)$:lla ja $P(n+5)$:llä on on yhteinen alkutekijä 3; silloin on lisäksi oltava $n+2 \equiv 1 \bmod 3$. Mutta $P(n+4)$:llä ei tällöin voi olla yhteistä alkutekijää $P(n+1)$:n (ainoa mahdollisuus 3 ja $n+1 \equiv 1 \bmod 3$), $P(n+2)$:n (ainoa mahdollisuus 7 ja $n+2 \equiv 2 \bmod 7$) eikä $P(n+3)$: eikä $P(n+5)$:n kanssa. Vastaoletus johtaa samalla tavalla ristiriitaan myös tapauksessa s.y.t.$(P(n+3),\, P(n+5)) = 7$.

Kiinalaista jäännöslausetta käyttämällä voidaan konstruoida sulotuoksuisia joukkoja $\{P(n+1),\, \ldots,\, P(n+6)\}$. Kun valitaan n niin, että $n+1 \equiv 7 \bmod 19$, $n+2 \equiv 2 \bmod 7$ ja $n+3 \equiv 1 \bmod 3$, niin $P(n+1)$:llä ja $P(n+5)$:llä on yhteinen tekijä 19, $P(n+2)$:lla ja $P(n+4)$:llä yhteinen tekijä 7 ja $P(n+3)$:lla ja $P(n+6)$:lla yhteinen tekijä 3.

5. *Liitutaululle kirjoitetaan yhtälö*

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016),$$

missä kummallakin puolella on 2016 lineaarista tekijää. Mikä on pienin mahdollinen k, jolla on mahdollista pyyhkiä pois täsmälleen k kappaletta näistä 4032 lineaarisesta tekijästä siten, että yhtälön kummallekin puolelle jää jäljelle ainakin yksi tekijä ja että lopputuloksena syntyvällä yhtälöllä ei ole reaalilukuratkaisuja?

Ratkaisu. Jos poistettavia tekijöitä on vähemmän kuin 2016 kappaletta, yhtälön molemmille puolille jää jokin sama tekijä ja yhtälöllä on siis reaalilukuratkaisu. Siis $k \geq 2016$. Osoitetaan, että $k = 2016$ on mahdollinen. Poistetaan vasemmalta puolelta tekijät $x - a$, missä $a \equiv 0,\, 1 \bmod 4$ ja oikealta puolelta tekijät $x-b$, missä $b \equiv 2,\, 3 \bmod 4$. Tutkittavaksi jää nyt yhtälö $p(x) = q(x)$, missä

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-2)(x-3)(x-6)(x-7)\cdots(x-2014)(x-2015), \\ q(x) &= (x-1)(x-4)(x-5)(x-8)\cdots(x-2013)(x-2016). \end{aligned}$$

Jos $x < 1$ tai $x > 2016$, polynomien p ja q kaikki tekijät ovat samanmerkkisiä. Koska

$$(x-a)(x-(a+1))-(x-(a-1))(x-(a+2)) = x^2-(2a+1)x+a(a+1)-(x^2-(2a+1)x+(a^2+a-2)) = 2,$$

on oltava $p(x) > q(x)$. Yhtälön $p(x) = q(x)$ reaalijuurten on siis oltava välillä $]1,\, 2016[$. Jos $1 < x < 2$, $3 < x < 4$, $\ldots$ tai $2015 < x < 2016$, niin selvästi $p(x) > 0$ ja $q(x) < 0$. Yhtälöllä $p(x) = q(x)$ ei ole väleihin $]1,\, 2[$, $]3,\, 4[$, $\ldots$, $]2015,\, 2016[$ kuuluvaa reaalijuurta. Jos $4 < x < 5$, $8 < x < 9$, $\ldots$ tai $2012 < x < 2013$, niin toistamalla edellä tapauksen $x > 2016$ päättely nähdään, että

$$\begin{gathered} (x-2)(x-3) > (x-1)(x-4) \\ (x-6)(x-7) > (x-5)(x-8) \\ \vdots \\ (x-2014)(x-2015) > (x-2013)(x-2016). \end{gathered}$$

Tästä seuraa $p(x) > q(x)$. Jäljellä ovat vielä tapaukset $2 < x < 3$, $6 < x < 7$, $\ldots$, $2014 < x < 2015$. Tapauksen $x < 1$ päättelyn toistamalla saadaan epäyhtälöt

$$\begin{aligned}(x-4)(x-5) &> (x-3)(x-6)\\ (x-8)(x-9) &> (x-7)(x-10)\\ &\vdots\\ (x-2012)(x-2013) &> (x-2011)(x-2014).\end{aligned}\tag{1}$$

Lisäksi kaikilla x pätee $(x-1)(2016-x) > (x-2)(2015-x)$. Kun tämä ja epäyhtälöt (1) kerrotaan puolittain, saadaan $-p(x) < -q(x)$. Yhtälöllä $p(x) = q(x)$ ei siis nytkään ole reaalilukuratkaisua.

6. *Tasossa on $n > 2$ janaa siten, että mitkä tahansa kaksi janaa leikkaavat toisensa, ja mitkään kolme janaa eivät kulje saman pisteen kautta. Geoffin on valittava jokaisesta janasta toinen sen päätepisteistä ja asetettava sille sammakko niin, että se katsoo janan toista päätepistettä. Sitten hän taputtaa käsiään $n-1$ kertaa. Joka kerta, kun hän taputtaa, jokainen sammakko välittömästi hyppää eteenpäin janansa seuraavalle leikkauspisteelle. Mikään sammakoista ei koskaan vaihda hyppysuuntaansa. Geoff haluaisi asettaa sammakot siten, että mitkään kaksi niistä eivät milloinkaan ole samassa leikkauspisteessä samaan aikaan.*

(a) Osoita, että Geoff voi aina toteuttaa toivomuksensa, kun n on pariton.

(b) Osoita, että Geoff ei koskaan voi toteuttaa toivomustaan, kun n on parillinen.

Ratkaisu. Piirretään ympyrä, joka sisältää kaikki janat, ja jatketaan janoja tälle ympyrälle. Tilanne ei muutu, jos jokainen janan päätepiste korvataan pisteellä, jossa jatke leikkaa ympyrän. On siis $2n$ ympyrän pistettä, järjestyksessä P_1, P_2, $\ldots$, P_{2n}. Koska jana P_1P_a leikkaa kaikki muut janat, on P_1:n ja P_a:n välissä on oltava $n-1$ pistettä. Siis $a = n+1$. Janat ovat P_1P_{n+1}, P_2P_{n+2}, $\ldots$, P_nP_{2n}. Tarkastellaan janoja P_1P_{n+1} ja P_2P_{n+2}. Leikatkoot ne pisteessä X. Jos nyt jana P_jPn+j leikkaa janan P_1X, se leikkaa myös janan P_2X (koska suora P_jP_{j+n} ei leikkaa kaarta $\overset{\frown}{P_1P_2}$). Janoilla P_1X ja P_2X on siis yhtä monta leikkauspistettä muiden janojen kanssa, joten pisteistä P_1 ja P_2 lähtevät sammakot tormäisivät pisteessä X. Kaksi sammakkoa ei voi lähteä vierekkäisistä pisteistä. Koska lähtöpisteitä on n kappaletta, niiden on oltava esimerkiksi P_1, P_3, $\ldots P_{2n-1}$. Jos n on parillinen, lähtöpisteitä olisivat sekä P_1 että P_{n+1}, jotka kuitenkin ovat saman janan päätepisteitä. n ei voi olla parillinen.

Olkoon nyt n pariton. Sijoitetaan sammakot pisteisiin P_1, P_3, $\ldots$, P_n, $\ldots P_{2n-1}$. Leikatkoot P_1P_{n+1} ja P_jP_{n+j} pisteessä X. Pisteiden P_1 ja P_j välissä on $j-2$ eli pariton määrä pisteitä. Janat P_2P_{n+2}, $\ldots$, $P_{j-1}P_{n+j-1}$ leikkaavat kukin jommankumman janoista P_1X, P_jX. Janoilla P_1X ja P_jX on siis yhteensä pariton määrä leikkauspisteitä. Näin ollen P_1:stä ja P_j:stä lähtevät sammakot eivät ole yhtä aikaa pisteessä X. Sama pätee tietysti mistä tahansa kahdesta pisteestä lähteviin sammakkoihin.