58th International Mathematical Olympiad — IMO 2017 — RIO DE JANEIRO - BRAZIL

Finnish (fin), day 1

*Tiistai, 18. heinäkuuta, 2017*

**Tehtävä 1.** Määritellään jokaista kokonaislukua $a_0 > 1$ kohti sarja $a_0, a_2, a_2, \ldots$ seuraavasti:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{jos } \sqrt{a_n} \text{ on kokonaisluku,} \\ a_n + 3 & \text{muulloin,} \end{cases} \qquad \text{kaikille } n \geqslant 0.$$

Määritä kaikki sellaiset luvun $a_0$ arvot, joita kohti on olemassa sellainen luku $A$, että $a_n = A$ äärettömän monella luvun $n$ arvolla.

**Tehtävä 2.** Olkoon $\mathbb{R}$ reaalilukujen joukko. Määritä kaikki sellaiset funktiot $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, että kaikille reaaliluvuille $x$ ja $y$ pätee

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

**Tehtävä 3.** Metsästäjä ja näkymätön jänis pelaavat peliä euklidisella tasolla. Jäniksen aloituspiste $A_0$ ja metsästäjän aloituspiste $B_0$ ovat samat. Kun peliä on pelattu $n-1$ kierrosta, jänis on pisteessä $A_{n-1}$ ja metsästäjä on pisteessä $B_{n-1}$. Pelin $n$. kierroksella tapahtuu kolme asiaa seuraavassa järjestyksessä:

(i) Jänis siirtyy näkymättömänä johonkin pisteeseen $A_n$, jolle etäisyys pisteiden $A_{n-1}$ ja $A_n$ välillä on tasan 1.

(ii) Jäljityslaite raportoi pisteen $P_n$ metsästäjälle. Ainoa asia, minkä jäljityslaite takaa metsästäjälle, on että etäisyys pisteiden $P_n$ ja $A_n$ välillä on korkeintaan 1.

(iii) Metsästäjä siirtyy näkyvästi johonkin pisteeseen $B_n$, jolle etäisyys pisteiden $B_{n-1}$ ja $B_n$ välillä on tasan 1.

Onko metsästäjän aina mahdollista valita siirtonsa siten, että riippumatta siitä, miten jänis liikkuu ja siitä, mitkä pisteet jäljityslaite raportoi, hän voi $10^9$ kierroksen jälkeen olla varma, että etäisyys hänen ja jäniksen välillä on korkeintaan 100?

*Language: Finnish*

*Aikaa: 4 tuntia ja 30 minuuttia*
*Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen*

*Keskiviikko, 19. heinäkuuta, 2017*

**Tehtävä 4.** Olkoot $R$ ja $S$ sellaisia ympyrän $\Omega$ eri pisteitä, että $RS$ ei ole ympyrän $\Omega$ halkaisija. Olkoon $\ell$ ympyrän $\Omega$ tangenttisuora pisteessä $R$. Piste $T$ on sellainen, että $S$ on janan $RT$ keskipiste. Piste $J$ valitaan ympyrän $\Omega$ lyhyemmältä kaarelta $RS$ siten, että kolmion $JST$ ympäri piirretty ympyrä $\Gamma$ leikkaa suoran $\ell$ kahdessa eri pisteessä. Olkoon $A$ ympyrän $\Gamma$ ja suoran $\ell$ se leikkauspiste, joka on lähempänä pistettä $R$. Olkoon $K$ suoran $AJ$ ja ympyrän $\Omega$ toinen leikkauspiste. Todista, että suora $KT$ on ympyrän $\Gamma$ tangentti.

**Tehtävä 5.** Olkoon kokonaisluku $N \geqslant 2$ annettu. $N(N+1)$ jalkapallon pelaajaa, joista mitkään kaksi eivät ole yhtä pitkiä, seisovat rivissä. Sir Alex haluaa poistaa tästä rivistä $N(N-1)$ pelaajaa siten, että jäljelle jäävien $2N$ pelaajan suhteen seuraavat $N$ ehtoa pitävät:

(1) kukaan ei seiso kahden pisimmän pelaajan välissä,

(2) kukaan ei seiso 3. ja 4. pisimpien pelaajien välissä,

$\vdots$

($N$) kukaan ei seiso kahden lyhimmän pelaajan välissä.

Osoita, että tämä on aina mahdollista.

**Tehtävä 6.** Järjestetty kokonaislukupari $(x, y)$ on *primitiivinen piste*, jos lukujen $x$ ja $y$ suurin yhteinen tekijä on 1. Olkoon $S$ annettu äärellinen primitiivisten pisteiden joukko. Todista, että on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku $n$ ja sellaiset kokonaisluvut $a_0, a_1, \ldots, a_n$, että jokaiselle pisteelle $(x, y) \in S$ pätee

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

*Language: Finnish*

*Aikaa: 4 tuntia ja 30 minuuttia*
*Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen*