

Tiistai 16. heinäkuuta 2019

Tehtävä 1. Olkoon \mathbb{Z} kokonaislukujen joukko. Määritä kaikki sellaiset funktiot $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, että kaikille kokonaisluvuille a ja b pätee

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)).$$

Tehtävä 2. Piste A_1 sijaitsee kolmion ABC sivulla BC ja piste sijaitsee B_1 kolmion sivulla AC . Olkoon P piste janalla AA_1 ja Q piste janalla BB_1 siten, että PQ ja AB ovat yhdensuuntaisia. Olkoon P_1 sellainen piste suoralla PB_1 , että B_1 sijaitsee aidosti pisteiden P ja P_1 välissä ja $\angle PP_1C = \angle BAC$. Olkoon Q_1 vastaavasti piste suoralla QA_1 siten, että A_1 sijaitsee aidosti pisteiden Q ja Q_1 välissä ja $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Osoita, että pisteet P , Q , P_1 ja Q_1 sijaitsevat samalla ympyrällä.

Tehtävä 3. Sosiaalisessa verkossa on 2019 käyttäjää. Jotkut käyttäjäpareista ovat ystäviä keskenään. Jos käyttäjä A on ystävä käyttäjän B kanssa, niin myös käyttäjä B on ystävä käyttäjän A kanssa. Seuraavanlainen tapahtuma voi tapahtua toistuvasti, yksi tapahtuma kerrallaan:

Kolme käyttäjää A , B ja C , joista A on ystävä käyttäjien B ja C kanssa, mutta B ja C eivät ole ystäviä keskenään, muuttavat ystävyysstatuksiaan siten, että B ja C ovat nyt ystäviä keskenään, mutta A ei ole ystävä käyttäjän B eikä käyttäjän C kanssa. Muut ystävyysstatukset pysyvät muuttumattomina.

Aluksi 1010 käyttäjällä on kullakin 1009 ystävää, ja 1009 käyttäjällä on kullakin 1010 ystävää. Osoita, että on olemassa sarja kuvatulnaisia tapahtumia, joiden jälkeen jokainen käyttäjä on ystävä korkeintaan yhden toisen käyttäjän kanssa.

Keskiviikko 17. heinäkuuta 2019

Tehtävä 4. Etsi kaikki positiivisten kokonaislukujen parit (k, n) , joille

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Tehtävä 5. Bathin pankki painaa kolikoita, joiden toisella puolella on H ja toisella puolella T . Harrilla on n tällaista kolikkoa järjestettynä jonoon vasemmalta oikealle. Hän suorittaa seuraavan operaation toistuvasti: Jos tasan $k > 0$ kolikossa on H näkyvällä puolella, niin hän kääntää k :nnen kolikon vasemmalta toisin päin; muussa tapauksessa, kaikissa kolikoissa on T näkyvällä puolella ja hän lopettaa operaatiot. Esimerkiksi jos $n = 3$, niin prosessi, joka alkaa muodostelmasta THT , jatkuisi $THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$ ja päättyisi kolmen operaation jälkeen.

- (a) Osoita, että jokaisella aloitusmuodostelmalla Harri lopettaa äärellisen määrän operaatioita jälkeen.
- (b) Olkoon $L(C)$ jokaista aloitusmuodostelmaa C kohti niiden operaatioiden lukumäärä, jotka Harri suorittaa ennen kuin hän lopettaa. Esimerkiksi $L(THT) = 3$ ja $L(TTT) = 0$. Määritä luvun $L(C)$ keskiarvo, kun C käy läpi kaikki 2^n mahdollista aloitusmuodostelmaa.

Tehtävä 6. Olkoon I sellaisen teräväkulmaisen kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste, jossa $AB \neq AC$. Kolmion ABC sivut BC , CA ja AB sivuavat sen sisään piirrettyä ympyrää ω pisteissä D , E ja F (samassa järjestyksessä). Suora, joka kulkee pisteen D kautta ja on kohtisuorassa EF :n kanssa, leikkaa ympyrän ω jälleen pisteessä R . Suora AR leikkaa ympyrän ω jälleen pisteessä P . Kolmioiden PCE ja PBF ympäri piirretyt ympyrät leikkaavat jälleen pisteessä Q .

Osoita, että suorat DI ja PQ leikkaavat suoralla, joka kulkee pisteen A kautta ja on kohtisuorassa AI :n kanssa.