maanantai, 21. syyskuuta 2020

Tehtävä 1. Tarkastellaan konveksia nelikulmiota $ABCD$. Piste P on nelikulmion $ABCD$ sisällä. Seuraavat suhteet pätevät: :

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Osoita, että seuraavat kolme suoraa kohtaavat samassa pisteessä: Kulmien $\angle ADP$ ja $\angle PCB$ sisäiset puolittajat ja janan AB keskinormaali.

Tehtävä 2. Reaaliluvut a, b, c, d toteuttavat ehdot $a \geq b \geq c \geq d > 0$ ja $a + b + c + d = 1$. Osoita, että

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

Tehtävä 3. Meillä on $4n$ kiveä, joiden painot ovat $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Jokainen kivi on väritetty yhdellä n väristä ja kunkin värisiä kiviä on neljä kappaletta. Osoita, että voimme järjestää kivet kahteen kasaan siten, että kumpikin seuraavista kahdesta ehdosta toteutuu:

- Kumpikin kasa painaa yhtä paljon.
- Kummassakin kasassa on kaksi kiveä kutakin väriä.

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia.
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen.

tiistai, 22. syyskuuta 2020

Tehtävä 4. On annettu kokonaisluku $n > 1$. Vuoren rinteellä on n^2 asemaa, joista kaikki ovat eri korkeuksilla. Kumpikin kahdesta köysiratayhtiöstä, A ja B, operoi k:ta gondolia; jokainen gondoli mahdollistaa siirtymisen yhdeltä asemalta korkeammalla olevalle asemalle (ilman välipysähdyksiä). Yhtiön A k:lla gondolilla on k eri aloituspistettä ja k eri päätepistettä, ja gondoli, joka aloittaa korkeammalta, myös päätyy korkeammalle. Yhtiön B gondoleille pätee sama ehto. Sanomme, että kaksi asemaa ovat *yhdistettyjä* yhtiön toimesta, jos henkilö voi aloittaa alemmalta asemalta ja päätyä ylemmälle käyttämällä yhtä tai useampaa yhtiön gondolia (muita siirtoja asemien välillä ei ole sallittu).

Määritä pienin mahdollinen positiivinen kokonaisluku k, jolle voidaan taata, että on olemassa kaksi asemaa, jotka ovat yhdistettyjä kummankin yhtiön toimesta.

Tehtävä 5. Pakassa on $n > 1$ korttia. Jokaiseen korttiin on kirjoitettu positiivinen kokonaisluku. Pakalla on sellainen ominaisuus, että kunkin korttiparin aritmeettinen keskiarvo on myös joidenkin yhden tai useamman kortin geometrinen keskiarvo.

Mille luvuille n tästä seuraa, että luvut kaikissa korteissa ovat samoja?

Tehtävä 6. Osoita, että on olemassa positiivinen vakio c siten, että seuraava väite pitää paikkansa:

Tarkastellaan kokonaislukua $n > 1$ ja sellaista tasolla olevaa n pisteen joukkoa $\mathcal{S}$, että minkä tahansa kahden joukossa $\mathcal{S}$ olevan pisteen välinen etäisyys on vähintään 1. Tällöin on olemassa suora ℓ, joka jakaa joukon $\mathcal{S}$ siten, että etäisyys mistä tahansa pisteestä joukossa $\mathcal{S}$ suoraan ℓ on vähintään $cn^{-1/3}$.

(Suora ℓ *jakaa* pistejoukon $\mathcal{S}$, jos jokin jana, joka yhdistää kaksi joukon $\mathcal{S}$ pistettä, leikkaa suoran ℓ.)

Huomautus. Heikommasta tuloksesta, jossa $cn^{-1/3}$ korvataan termillä $cn^{-\alpha}$, voidaan antaa pisteitä riippuen vakion $\alpha > 1/3$ arvosta.