



maanantai, 19. heinäkuuta 2021

**Tehtävä 1.** Olkoon  $n \geq 100$  kokonaisluku. Ivan kirjoittaa kunkin luvuista  $n, n+1, \dots, 2n$  eri kortteille. Sitten hän sekoittaa nämä  $n+1$  korttia ja jakaa ne kahteen pinoon. Osoita, että vähintään yksi näistä pinoista sisältää jotkin kaksi korttia, joiden lukujen summa on neliöluku.

**Tehtävä 2.** Osoita, että epäyhtälö

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

pätee kaikilla reaaliluvuilla  $x_1, \dots, x_n$ .

**Tehtävä 3.** Olkoon  $ABC$  teräväkulmainen kolmio, jolla  $AB > AC$ , ja olkoon  $D$  kolmion  $ABC$  sellainen sisäpiste, että  $\angle DAB = \angle CAD$ . Piste  $E$  on janalla  $AC$  ja toteuttaa  $\angle ADE = \angle BCD$ , piste  $F$  on janalla  $AB$  ja toteuttaa  $\angle FDA = \angle DBC$  ja piste  $X$  on suoralla  $AC$  ja toteuttaa  $CX = BX$ . Olkoot  $O_1$  ja  $O_2$  kolmioiden  $ADC$  ja  $EXD$  ympärysympyröiden keskipisteet, vastaavasti. Osoita, että suorat  $BC$ ,  $EF$  ja  $O_1O_2$  leikkaavat samassa pisteessä.



*tiistai, 20. heinäkuuta 2021*

**Tehtävä 4.** Olkoon  $I$  ympyrän  $\Gamma$  keskipiste, ja olkoon  $ABCD$  sellainen konvekssi nelikulmio, että jokainen janoista  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  ja  $DA$  on tangentti ympyrälle  $\Gamma$ . Olkoon  $\Omega$  kolmion  $AIC$  ympärysympyrä. Janan  $BA$  jatke pisteen  $A$  yli leikkaa ympyrän  $\Omega$  pisteessä  $X$  ja janan  $BC$  jatke pisteen  $C$  yli leikkaa ympyrän  $\Omega$  pisteessä  $Z$ . Janojen  $AD$  ja  $CD$  jatkeet pisteen  $D$  yli leikkaavat ympyrän  $\Omega$  pisteissä  $Y$  ja  $T$ , vastaavasti. Osoita, että

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

**Tehtävä 5.** Kaksi oravaa, Puska ja Hyppy, ovat keränneet 2021 pähkinää talven varalle. Hyppy numeroi pähkinät luvuilla yhdestä lukuun 2021 ja kaivaa 2021 pientä koloa ympyrän muodostelmaan heidän lempipuunsa ympärille. Seuraavana aamuna Hyppy huomaa, että Puska on laittanut yhden pähkinän joka koloon, muttei ole ottanut huomioon numerointia. Epätyytyväisenä Hyppy päättää uudelleenjärjestää pähkinät suorittamalla 2021 siirron sarjan. Järjestyksessä  $k$ :nnella siirrolla Hyppy vaihtaa pähkinän  $k$  vieressä olevat pähkinät keskenään. Osoita, että on olemassa sellainen luvun  $k$  arvo, että  $k$ :nnella siirrolla Hyppy vaihtaa pähkinät numero  $a$  ja  $b$ , joilla  $a < k < b$ .

**Tehtävä 6.** Olkoon  $m \geq 2$  kokonaisluku, olkoon  $A$  äärellinen joukko (ei välttämättä positiivisia) kokonaislukuja ja olkoot  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$  joukon  $A$  osajoukkoja. Oletetaan, että jokaisella  $k = 1, 2, \dots, m$  joukon  $B_k$  alkioden summa on  $m^k$ . Osoita, että  $A$  sisältää vähintään  $m/2$  alkioita.