lauantai, 8. heinäkuuta 2023

Tehtävä 1. Määritä kaikki yhdistetyt luvut $n > 1$, jotka toteuttavat seuraavan ehdon: jos $d_1, d_2, \ldots, d_k$ ovat luvun n kaikki positiiviset tekijät, missä $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, niin silloin d_i jakaa luvun $d_{i+1} + d_{i+2}$ kaikilla $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

Tehtävä 2. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jossa $AB < AC$. Olkoon Ω kolmion ABC ympärysympyrä. Olkoon S keskipiste ympyrän Ω sillä kaarella CB, joka sisältää pisteen A. Pisteen A kautta kulkeva normaali sivulle BC leikkaa suoran BS pisteessä D ja ympyrän Ω uudestaan pisteessä $E \neq A$. Pisteen D kautta kulkeva ja suoran BC kanssa yhdensuuntainen suora leikkaa suoran BE pisteessä L. Olkoon ω kolmion BDL ympärysympyrä. Ympyrä ω leikkaa ympyrän Ω uudestaan pisteessä $P \neq B$.
Osoita, että pisteen P kautta kulkeva tangentti ympyrälle ω leikkaa suoran BS kulman $\angle BAC$ kulmanpuolittajalla.

Tehtävä 3. Määritä jokaiselle kokonaisluvulle $k \geqslant 2$ kaikki äärettömät positiivisten kokonaislukujen lukujonot $a_1, a_2, \ldots$, joilla on seuraava ominaisuus: on olemassa polynomi P muotoa $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, missä $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ ovat epänegatiivisia kokonaislukuja, joka toteuttaa

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

kaikille kokonaisluvuille $n \geqslant 1$.

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia.
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen.

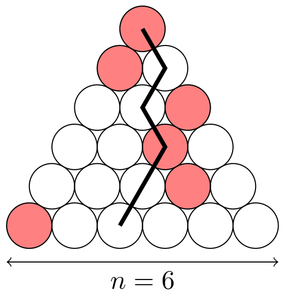
sunnuntai, 9. heinäkuuta 2023

Tehtävä 4. Olkoon $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ pareittain erillisiä reaalilukuja, joilla

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

on kokonaisluku kaikilla $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Osoita, että $a_{2023} \geqslant 3034$.

Tehtävä 5. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. *Japanilainen kolmio* koostuu $1 + 2 + \cdots + n$ ympyrästä aseteltuna tasasivuisen kolmion muotoon niin, että jokaiselle $i = 1, 2, \ldots, n$ ylhäältä päin i:nnes rivi sisältää tasan i ympyrää, joista tasan yksi on punainen. *Ninjapolku* japanilaisessa kolmiossa on n ympyrän jono, joka alkaa ylimmältä riviltä, kulkee toistuvasti ympyrästä yhteen sen alla olevasta kahdesta ympyrästä ja päättyy alimmalle riville. Ohessa on esimerkki japanilaisesta kolmiosta, jossa $n = 6$, ja siinä olevasta kaksi punaista ympyrää sisältävästä ninjapolusta.



Määritä luvun n suhteen suurin k, jolla jokaisessa japanilaisessa kolmiossa on ainakin k punaista ympyrää sisältävä ninjapolku.

Tehtävä 6. Olkoon ABC tasasivuinen kolmio. Olkoon A_1, B_1, C_1 kolmion ABC sisäpisteitä, joilla $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ ja

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Suorat BC_1 ja CB_1 leikkaavat pisteessä A_2, suorat CA_1 ja AC_1 leikkaavat pisteessä B_2 ja suorat AB_1 ja BA_1 leikkaavat pisteessä C_2.
Osoita, että jos kolmio $A_1B_1C_1$ on epäsäännöllinen, niin kolmioiden AA_1A_2, BB_1B_2 ja CC_1C_2 ympärysympyrät kulkevat kahden yhteisen pisteen kautta.

(Huomautus: epäsäännöllinen kolmio on sellainen kolmio, jossa mitkään kaksi sivua eivät ole saman pituisia.)

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia.
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen.