Kansainvälisten matematiikkaolympialaisten tehtävät 1959–1974

59.1. Olkoon n mielivaltainen luonnollinen luku. Osoita, että murtolukua

$$\frac{21n+4}{14n+3}$$

ei voi supistaa.

59.2. Millä reaaliluvuilla x ovat voimassa yhtälöt

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \qquad \sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2},\\
&\text{b)} \qquad \sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1,\\
&\text{c)} \qquad \sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2,
\end{aligned}$$

kun neliöjuuret ovat ei-negatiivisia?

59.3. Olkoon x kulma (so. reaaliluku). Olkoot a, b ja c mielivaltaisia reaalilukuja. Luku $\cos x$ toteuttaa toisen asteen yhtälön

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0.$$

Johda sellainen toisen asteen yhtälö, jonka toteuttaa luku $\cos 2x$. Vertaa näitä yhtälöitä tapauksessa $a=4$, $b=2$ ja $c=-1$.

59.4. Konstruoi suorakulmainen kolmio, kun sen hypotenuusa c tunnetaan ja kun hypotenuusaa vastaan piirretty keskijana on kateettien geometrinen keskiarvo.

59.5. Janalta AB valitaan sisäpiste M ja janat AM ja MB sivuina piirretään neliöt $AMCD$ ja $MBEF$ samalle puolelle suoraa AB. Neliöiden ympäri piirrettyjen ympyröiden keskipisteet ovat P ja Q, ja ympyrät leikkaavat toisensa pisteissä M ja N. Suorat AF ja BC leikkaavat toisensa pisteessä N'.

a) Osoita, että $N=N'$.
b) Osoita, että riippumatta pisteen M valinnasta suora MN kulkee erään kiinteän pisteen kautta.
c) Määritä janan PQ keskipisteiden joukko, kun M liikkuu janalla AB.

59.6. On annettu tasot P ja Q, joiden leikkaussuora on ℓ. Tason P piste A ja tason Q piste C eivät kumpikaan ole suoralla ℓ. On konstruoitava tasakylkinen puolisuunnikas $ABCD$ niin, että AB ja CD ovat yhdensuuntaiset ja että $ABCD$:n sisään voidaan piirtää ympyrä. Pisteen B tulee sijaita tasossa P ja pisteen D tasossa Q.

60.1. Määritä kaikki sellaiset kolminumeroiset luvut, että kun ne jaetaan 11:llä, saadaan luku, joka on sama kuin alkuperäisen luvun numeroiden neliöiden summa.

60.2. Millä x:n arvoilla on voimassa epäyhtälö

$$\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2} < 2x+9\ ?$$

60.3. On annettu suorakulmainen kolmio ABC, jonka hypotenuusa BC on jaettu n:ään yhtä suureen osaan (n on pariton luku). Oletetaan, että hypotenuusan keskipisteen sisältävä osajana näkyy pisteestä A kulmassa α. Olkoon a kolmion hypotenuusa ja h sitä vastaava korkeus. Osoita, että

$$\tan\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}.$$

60.4. Konstruoi kolmio ABC, kun tunnetaan h_a, h_b ja m_a. (h_a ja h_b ovat sivuja a ja b vastaavat korkeudet ja m_a sivua a vastaava korkeus.)

60.5. On annettu kuutio $ABCDA'B'C'D'$.

a) Määritä janojen XV keskipisteiden joukko, kun X käy läpi janan AC ja V janan $B'D'$ pisteet.

b) Määritä janojen XV niiden pisteiden Z joukko, jotka toteuttavat ehdon $ZV = 2\cdot XZ$.

60.6. On annettu ympyräkartio, kartion sisään piirretty pallo ja pallon ympäri piirretty lieriö, jonka pohja on samassa tasossa kuin kartion pohja. Kartion tilavuus on V_1 ja lieriön V_2.

a) Osoita, että ei voi olla $V_1 = V_2$.

b) Määritä pienin luku k, jolle on voimassa $V_1 = kV_2$, ja konstruoi tätä tapausta vastaava kartion huippukulma.

60.7.[1] On annettu tasakylkinen puolisuunnikas, jonka kannat ovat a ja b ja korkeus h.

a) Konstruoi sellainen puolisuunnikkaan symmetria-akselin piste P, josta molemmat puolisuunnikkaan kyljet näkyvät suorassa kulmassa.

b) Määritä tämän pisteen etäisyys jommastakummasta puolisuunnikkaan kannasta.

c) Milloin konstruointi on mahdollinen? (Tarkastele mahdollisia tilanteita.)

61.1. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b^2 \\ xy=z^2, \end{cases}$$

kun a ja b ovat eri lukuja. Mikä ehto a:n ja b:n tulee täyttää, jotta x, y ja z olisivat positiivisia ja eri suuria?

61.2. Kolmion pinta-ala on A ja sen sivujen pituudet ovat a, b ja c. Osoita, että on voimassa epäyhtälö

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4A\sqrt{3}.$$

Millä ehdoilla vallitsee yhtäsuuruus?

61.3. Ratkaise yhtälö $\cos^n x - \sin^n x = 1$, missä n on mielivaltainen positiivinen kokonaisluku.

61.4. On annettu kolmio $P_1P_2P_3$ ja sen sisäpiste P. Suorat P_1P, P_2P ja P_3P leikkaavat sivut P_2P_3, P_3P_1 ja P_1P_2 pisteissä Q_1, Q_2 ja Q_3. Osoita, että suhteiden

$$\frac{P_1P}{PQ_1},\quad \frac{P_2P}{PQ_2} \text{ ja } \frac{P_3P}{PQ_3}$$

---

[1] Eri lähteissä vuoden 1960 tehtävien 6 ja 7 järjestys vaihtelee.

joukossa on ainakin yksi, joka ei ole suurempi kuin 2 ja ainakin yksi, joka ei ole pienempi kuin 2.

61.5. On konstruoitava kolmio ABC, kun tunnetaan sivujen AC ja AB pituudet b ja c sekä kulman $\angle AMB$, missä M on sivun BC keskipiste, suuruus ω. Oletetaan, että $\omega < 90°$. Osoita, että tehtävä voidaan ratkaista silloin ja vain silloin, kun

$$b\tan\frac{\omega}{2} \le c < b.$$

Missä tapauksessa edellisessä epäyhtälössä on voimassa yhtäsuuruus?

61.6. On annettu taso ε ja kolme pistettä A, B ja C, jotka ovat samalla puolella tasoa ε, mutta eivät ole samalla suoralla. Pisteiden A, B ja C kautta kulkeva taso ei ole tason ε suuntainen. Olkoot A', B' ja C' tason ε mielivaltaisia pisteitä. Janojen AA', BB' ja CC' keskipisteet ovat L, M ja N, ja kolmion LMN painopiste on G. (Ne pisteet A', B' ja C', joille LMN ei ole aito kolmio, jätetään ottamatta huomioon.) Määritä pisteiden G joukko, kun A', B' ja C' liikkuvat toisistaan riippumatta tasossa ε.

62.1. Määritä pienin luonnollinen luku n, jolla on seuraavat ominaisuudet:
a) Sen kymmenjärjestelmäesityksen viimeinen numero on 6.
b) Kun tämä viimeinen numero 6 pyyhitään pois ja kirjoitetaan muiden muuttumattomina säilyneiden numeroiden eteen, saadaan luku $4n$.

62.2. Määritä kaikki reaaliluvut x, jotka toteuttavat epäyhtälön

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}.$$

62.3. On annettu kuutio $ABCDA'B'C'D'$ ($ABCD$ ja $A'B'C'D'$ ovat vastakkaisia sivutahkoja ja AA', BB', CC' sekä DD' yhdensuuntaisia särmiä). Piste X liikkuu tasaisella nopeudella pitkin neliön $ABCD$ piiriä kirjainten osoittamassa järjestyksessä ja piste Y liikkuu samalla nopeudella pitkin neliön $B'C'CB$ piiriä. Kumpikin piste lähtee liikkeelle samalla hetkellä alkupisteistä A ja B'. Määritä janan XY keskipisteen ura.

62.4. Ratkaise täydellisesti yhtälö

$$\cos^2 x + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) = 1.$$

62.5. Ympyrän kehällä K on annettu kolme pistettä A, B ja C. Konstruoi sellainen kehän K piste D, että $ABCD$ on tangenttinelikulmio.

62.6. Tasakylkisen kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde on r ja sisään piirretyn ympyrän säde on ρ. Todista, että ympyröiden keskipisteiden välinen etäisyys on $\sqrt{r(r-2\rho)}$.

62.7. On annettu tetraedri $SABC$, jolla on seuraava ominaisuus: on olemassa viisi palloa, joista jokainen sivuaa särmiä SA, SB, SC, AB, BC ja CA tai niiden jatkeita.
a) Todista, että tetraedri on säännöllinen
b) Todista, että jokaista säännöllistä tetraedria kohden on olemassa viisi kuvatun kaltaista palloa.

63.1. Määritä kaikki reaaliluvut x, jotka toteuttavat yhtälön

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x,$$

missä p on reaalinen parametri.

63.2. Määritä niiden avaruuden pisteiden joukko, jotka ovat sellaisen suoran kulman kärkiä, jonka toinen kylki kulkee annetun pisteen A kautta ja jonka toisella kyljellä on ainakin yksi yhteinen piste annetun janan BC kanssa.

63.3. Olkoot a_1, a_2, ..., a_n peräkkäiset sivut sellaisessa n-kulmiossa, jonka sisäkulmat ovat yhtä suuret. Oletetaan, että $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$. Todista, että $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

63.4. Etsi kaikki luvut x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, jotka toteuttavat yhtälöt

$$\begin{cases} x_5 + x_2 = yx_1 \\ x_1 + x_3 = yx_2 \\ x_2 + x_4 = yx_3 \\ x_3 + x_5 = yx_4 \\ x_4 + x_1 = yx_5, \end{cases}$$

missä y on parametri.

63.5. Todista, että

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

63.6. Oppilaat A, B, C, D ja E ottivat osaa kilpailuun. Eräs katsoja veikkasi, että he sijoittuisivat järjestyksessä A, B, C, D, E. Hän ei kuitenkaan arvannut oikein yhdenkään kilpailijan sijoitusta eikä myöskään yhtään peräkkäistä paria. Toinen katsoja veikkasi järjestykseksi D, A, E, C, B. Tämä oli parempi arvaus, sillä siinä oli kahden kilpailijan sijoitus arvattu oikein ja samoin kaksi peräkkäistä paria oli oikein. Mikä oli oikea järjestys?

64.1. a) Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille luku $2^n - 1$ on jaollinen seitsemällä.

b) Todista, että luku $2^n + 1$ ei millään positiivisella kokonailuvulla n ole jaollinen seitsemällä.

64.2. Olkoot a, b ja c kolmion sivujen pituudet. Osoita, että

$$a^2(b+c-a) + b^2(a+c-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

64.3. Kolmion ABC sivujen pituudet ovat a, b ja c. Tarkastellaan kolmion sisään piirrettyä ympyrää ja sen niitä tangentteja, jotka ovat kolmion sivujen suuntaisia. Tangentit erottavat kolmiosta ABC kolme uutta kolmiota. Piirretään jokaiseen näistä jälleen sisään piirtretty ympyrä. Laske kaikkien neljän ympyrän pinta-alojen summa.

64.4. Jokainen 17 tiedemiehestä on kirjeenvaihdossa jokaisen muun kanssa. Kirjeenvaihdossa käsitellään vain kolmea aihetta ja jokaiset kaksi tiedemiestä käsittelevät keskinäisessä kirjeenvaihdossaan vain yhtä aihetta. Osoita, että tiedemiesten keskuudessa on kolme, jotka käsittelevät keskinäisessä kirjeenvaihdossaan vain yhtä aihetta.

64.5. On annettu viisi tason pistettä: Pisteitä yhdistävien suorien joukossa ei ole yhdensuuntaisia, kohtisuoria eikä yhtyviä. Piirretään jokaisesta pisteestä kohtisuorat niitä suoria vastaan, jotka yhdistavät pareittain neljää muuta pistettä. Kuinka monta leikkauspistettä näillä suorilla voi enintään olla (lukuun ottamatta annettuja viittä pistettä)?

64.6. a) On annettu tetraedri $ABCD$. Yhdistetään kärki D sivutahkon ABC painopisteeseen D_1. Kärkien A, B ja C kautta kulkevat DD_1:n suuntaiset suorat leikkaavat mainittuja kärkiä vastassa olevien sivutahkojen tasot pisteissä A_1, B_1 ja C_1. Todista, että tetraedrin $ABCD$ tilavuus on kolmannes tetraedrin $A_1B_1C_1D_1$ tilavuudesta.

b) Päteekö väite silloinkin, kun D_1 on sivutahkon ABC mielivaltainen piste?

65.1. Määritä kaikki välin $0 \le x \le 2\pi$ luvut x, jotka toteuttavat epäyhtälöt

$$2\cos x \le \left|\sqrt{1+\sin(2x)} - \sqrt{1-\sin(2x)}\right| \le \sqrt{2}.$$

65.2. On annettu yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0, \end{cases}$$

jonka kertoimet täyttävät seuraavat ehdot:

a) a_{11}, a_{12} ja a_{13} ovat positiivisia;
b) kaikki muut kertoimet ovat negatiivisia;
c) jokaisessa yhtälössä kertoimien summa on positiivinen.

Todista, että $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ on ryhmän ainoa ratkaisu.

65.3. On annettu tetraedri $ABCD$. Särmän AB pituus on a ja särmän CD pituus on b. AB:n ja CD:n määräämien ristikkäisten suorien etäisyys on d ja näiden suorien välinen kulma on ω. Tetraedri jaetaan särmien AB ja CD suuntaisella tasolla τ kahdeksi osaksi. Laske näiden osien tilavuuksien suhde, kun tiedetään, että suoran AB ja tason τ etäisyyden suhde suoran CD ja tason τ etäisyyteen on k.

65.4. Määritä neljä lukua x_1, x_2, x_3, x_4 niin, että jokainen yhden luvun ja kolmen muun luvun tulon summa on 2.

65.5. On annettu kolmio OAB, jonka kulman $\angle AOB$ suuruus on ω ($\omega < 90°$). Mielivaltaisesta kolmion OAB pisteestä M piirretään sivun OA normaali MP ja sivun OB normaali MQ. Kolmion OPQ korkeusjanojen leikkauspiste on H. Määritä pisteen H ura, kun piste M liikkuu

a) janalla AB;
b) kolmion OAB sisällä.

65.6. On annettu $n \ge 3$ tason pistettä. Olkoon d näiden pisteiden suurin keskinäinen etäisyys. Sellaisia näiden pisteiden välisiä janoja, joiden pituus on d, kutsutaan pistejoukon *halkaisijoiksi*. Osoita, että halkaisijoita on korkeintaan n kappaletta.

66.1. Matematiikkakilpailussa oli kolme tehtävää A, B ja C. Kilpailijoista 25 ratkaisi ainakin yhden tehtävän. Niiden kilpailijoiden joukossa, jotka eivät ratkaisseet tehtävää

A, oli kaksi kertaa niin paljon sellaisia, jotka ratkaisivat tehtävän B kuin niitä, jotka ratkaisivat tehtävän C. Kilpailijoita, jotka ratkaisivat vain tehtävän A, oli yksi enemmän kuin muita tehtävän A ratkaisseita. Kuinka moni ratkaisi tehtävän B, kun puolet niistä, jotka ratkaisivat vain yhden tehtävän, ei ratkaissut tehtävää A?

66.2. Todista, että jos kolmion sivuille a, b ja c ja niitä vastaaville kulmille α, β ja γ pätee yhtälö

$$a + b = \tan\frac{\gamma}{2}\,(a\tan\alpha + b\tan\beta),$$

niin kolmio on tasakylkinen.

66.3. Osoita, että säännöllisen tetraedrin ympäri piirretyn pallon keskipisteen ja tetraedrin kärkien välisten etäisyyksien summa on pienempi kuin minkä tahansa avaruuden pisteen ja tetraedrin kärkien välisten etäisyyksien summa.

66.4. Todista, että jokaiselle luonnolliselle luvulle n ja jokaiselle reaaliluvulle $x \neq \dfrac{m\pi}{2^k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$; m kokonaisluku, pätee

$$\frac{1}{\sin(2x)} + \frac{1}{\sin(4x)} + \cdots + \frac{1}{\sin(2^n x)} = \cot x - \cot(2^n x).$$

66.5. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} |a_1 - a_2|\,x_2 + |a_1 - a_3|\,x_3 + |a_1 - a_4|\,x_4 = 1 \\ |a_2 - a_1|\,x_1 + |a_2 - a_3|\,x_3 + |a_2 - a_4|\,x_4 = 1 \\ |a_3 - a_1|\,x_1 + |a_3 - a_2|\,x_2 + |a_3 - a_4|\,x_4 = 1 \\ |a_4 - a_1|\,x_1 + |a_4 - a_2|\,x_2 + |a_4 - a_3|\,x_3 = 1, \end{cases}$$

kun a_1, a_2, a_3 ja a_4 ovat annettuja toisistaan eroavia reaalilukuja.

66.6. Kolmion ABC sivuilta AB, BC ja CA valitaan kultakin sisäpiste. Olkoot nämä pisteet M, K ja L. Todista, että kolmioiden MAL, KBM ja LCK joukossa on ainakin yksi, jonka ala ei ole suurempi kuin neljäsosa kolmion ABC alasta.

67.1. Suunnikkaassa $ABCD$ kolmio ABD on teräväkulmainen, $AB = a$, $AD = 1$ ja $\angle BAD = \alpha$. Ympyröiden K_A, K_B, K_C ja K_D keskipisteet ovat suunnikkaan kärjet ja ympyröiden säde on 1. Todista, että ympyrät peittävät suunnikkaan silloin ja vain silloin, kun

$$a \leq \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha.$$

67.2. Tetraedrissa on yhden ja vain yhden särmän pituus suurempi kuin 1. Osoita, että tetraedrin tilavuus on pienempi tai yhtä suuri kuin $\dfrac{1}{8}$.

67.3. Olkoot k, m ja n positiivisia kokonaislukuja ja $m+k+1$ alkuluku, joka on suurempi kuin $n+1$. Merkitsemme $c_s = s(s+1)$. Todista, että tulo

$$(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k)\cdots(c_{m+n} - c_k)$$

on jaollinen tulolla $c_1 c_2 \cdots c_n$.

67.4. On annettu teräväkulmaiset kolmiot $A_0B_0C_0$ ja $A_1B_1C_1$. Konstruoi kolmion $A_0B_0C_0$ ympäri piirretty kolmio ABC, joka on yhdenmuotoinen kolmion $A_1B_1C_1$ kanssa (kärjet A_1 ja A, B_1 ja B sekä C_1ja C vastaavat toisiaan) niin, että AB kulkee pisteen C_0, BC pisteen A_0 ja CA pisteen B_0 kautta. Konstruoi lisäksi se kolmioista ABC, jonka ala on mahdollisimman suuri.

67.5. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_8$ reaalilukuja, jotka eivät kaikki ole nollia. Tarkastellaan lukujonoa (c_n), missä

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + a_2 + \cdots + a_8, \\ c_2 &= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_8^2, \\ &\ldots \\ c_n &= a_1^n + a_2^n + \cdots + a_8^n \\ &\ldots \end{aligned}$$

Tiedetään, että $c_n = 0$ äärettömän monella n:n arvolla. Määritä kaikki luvut n, joille $c_n = 0$.

67.6. Urheilukilpailuissa jaettiin m mitalia n:n päivän aikana. Ensimmäisenä päivänä jaettiin yksi mitali ja $\frac{1}{7}$ jäljelle jääneistä, toisena päivänä kaksi mitalia ja $\frac{1}{7}$ jäljelle jääneistä jne. Viimeisenä päivänä jaettiin tasan n mitalia, eikä yhtään jäänyt jäljelle. Montako päivää kilpailut kestivät ja montako mitalia kaikkiaan jaettiin?

68.1. Todista, että on olemassa (yhtenevyyttä vaille) yksikäsitteinen kolmio, jonka sivujen mittaluvut ovat peräkkäisiä kokonaislukuja ja jonka yksi kulma on kaksi kertaa niin suuri, kuin toinen kolmion muista kulmista.

68.2. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut x, joiden kymmenjärjestelmäesityksen numeroiden tulo on $x^2 - 10x - 22$.

68.3. Yhtälöryhmässä

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = x_2 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = x_3 \\ \ldots \\ ax_{n-1}^2 + bx_{n-1} + c = x_n \\ ax_n^2 + bx_n + c = x_1 \end{cases}$$

a, b ja c ovat reaalilukuja ja $a \neq 0$. Osoita, että ryhmällä

a) ei ole reaalisia ratkaisuja, jos $(b-1)^2 - 4ac < 0$,
b) on täsmälleen yksi ratkaisu, jos $(b-1) - 4ac = 0$,
c) on useampia kuin yksi ratkaisu, jos $(b-1)^2 - 4ac > 0$.

68.4. Todista, että jokaisella tetraedrillä on ainakin yksi kärki, josta lähtevien särmien pituiset janat voivat olla kolmion sivuina.

68.5. Olkoon a positiivinen vakio ja f reaalilukujen joukossa määritelty reaaliarvoinen funktio, joka toteuttaa kaikilla reaaliluvuilla x ehdon

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}.$$

Todista, että f on jaksollinen, ts. että on olemassa $b > 0$ siten, että $f(x+b) = f(x)$ kaikilla x. Anna tapauksessa $a = 1$ esimerkki funktiosta f, joka ei ole identtisesti vakio.

68.6. Olkoon $\lfloor x \rfloor$ suurin kokonaisluku, joka on pienempi tai yhta suuri kuin x. Laske summa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor,$$

missä n on positiivinen kokonaisluku.

69.1. Todista, että on olemassa äärettömän monta luonnollista lukua a, jolla on seuraava ominaisuus: luku $z = n^4 + a$ ei millään luonnollisella luvulla n ole alkuluku.

69.2. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reaalisia vakioita, x reaalilukumuuttuja ja

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{1}{2}\cos(a_2 + x) + \frac{1}{2^2}\cos(a_3 + x) + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n + x).$$

Osoita: jos $f(x_1) = f(x_2) = 0$, niin $x_1 - x_2 = m\pi$, missä m on kokonaisluku.

69.3. Määritä jokaista k:n arvoa 1, 2, 3, 4 ja 5 kohden se välttämätön ja riittävä ehto, joka positiivisen luvun a tulee täyttää, jotta olisi olemassa tetraedri, jossa on k a:n pituista ja $6 - k$ ykkösen pituista särmää.

69.4. Olkoon AB puoliympyrän γ halkaisija ja C jokin γ:n piste ($A \neq C \neq B$). C:n kohtisuora projektio janalla AB on D. Olkoon γ_1 kolmion ABC sisään piirretty ympyrä, γ_2 ympyrä, joka sivuaa γ:aa ja janoja AD sekä DC, ja γ_3 ympyrä, joka sivuaa γ:aa ja janoja BD sekä DC. Todista, että ympyröillä γ_1, γ_2 ja γ_3 on AB:n lisäksi toinenkin yhteinen tangentti.

69.5. On annettu $n > 4$ tason pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Osoita, että on olemassa ainakin $\binom{n-3}{2}$ kuperaa nelikulmiota, joiden kärjet ovat annettujen pisteiden joukossa.

69.6. Osoita, että jos $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1y_1 - z_1^2 > 0$ ja $x_2y_2 - z_2^2 > 0$, niin

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}.$$

Ilmoita välttämätön ja riittävä ehto yhtäsuuruuden voimassaololle.

70.1. Olkoon M mielivaltainen kolmion ABC sivun AB sisäpiste, r_1, r_2 ja r kolmioiden AMC, BMC ja ABC sisään piirrettyjen ympyröiden säteet sekä ρ_1, ρ_2 ja ρ jotka sivuavat AM:ää sekä CA:n ja CM:n jatkeita; MB:tä sekä CM:n ja CB:n jatkeita ja AB:tä ja CA:n ja CB jatkeita. Todista, että

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} = \frac{r}{\rho}.$$

70.2. On annettu luonnolliset luvut a, b ja n, $a > 1$, $b > 1$ ja $n > 1$. Olkoot A_{n-1} ja A_n a-kantaisen lukujärjestelmän lukuja ja B_{n-1} ja B_n b-kantaisen lukujärjestelmän lukuja. Lukujen A_{n-1} ja A_n esitykset a-järjestelmässä ovat

$$A_{n-1} = x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_0, \qquad A_n = x_nx_{n-1}\ldots x_0$$

ja lukujen B_{n-1} ja B_n esitykset b-järjestelmässä ovat

$$B_{n-1} = x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_0, \qquad B_n = x_n x_{n-1}\ldots x_0$$

$(x_n \neq 0 \neq x_{n-1})$. Osoita, että epäyhtälö

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}$$

on voimassa silloin ja vain silloin, kun $a > b$.

70.3. Olkoon (a_n) reaalilukujono, jolle on voimassa $1 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots$ ja (b_n) kaavan

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}},$$

$n = 1, 2, \ldots$, avulla määritelty lukujono. Todista, että

a) $0 \leq b_n \leq 2$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$.

b) Jokaista lukua c, $0 \leq c < 2$, kohden on olemassa sellainen lukujono (a_n), että siitä muodostetussa lukujonossa (b_n) on $b_n > c$ äärettömän monella indeksin n arvolla.

70.4. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joilla on seuraava ominaisuus: Joukko $\{n,\, n+1,\, n+2,\, n+3,\, n+4,\, n+5\}$ voidaan jakaa kahdeksi yhteisalkiottomaksi epätyhjäksi joukoksi siten, että kummankin joukon alkioiden tulo on sama.

70.5. Tetraedrissa $ABCD$ on $\angle BDC$ suora kulma. Pisteen D kohtisuora projektio tasolle ABC on kolmion ABC korkeusjanojen leikkauspiste. Osoita, että

$$(AB + BC + AC)^2 \leq 6\left(AD^2 + BD^2 + CD^2\right).$$

Mille tetraedrille on voimassa yhtäsuuruus?

70.6. On annettu 100 tason pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Tarkastelemme kaikkia kolmioita, joiden kärjet ovat annettujen pisteiden joukossa. Osoita, että näistä kolmioista korkeintaan 70 % on teräväkulmaisia.

71.1. Olkoon $n > 2$ luonnollinen luku. Osoita, että seuraava väite on tosi silloin ja vain silloin, kun $n = 3$ tai $n = 5$: Jos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ovat mielivaltaisia reaalilukuja, niin

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\cdots(a_1 - a_n) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)\cdots(a_2 - a_n) + \cdots$$
$$\cdots + (a_n - a_1)(a_n - a_2)\cdots(a_n - a_{n-1}) \geq 0.$$

71.2. On annettu kupera monitahokas P_1, jolla on tasan yhdeksän kärkeä $A_1, A_2, \ldots, A_9$. Olkoon P_j se monitahokas, joka saadaan P_1:stä sellaisella yhdensuuntaissiirrolla, jossa piste A_1 siirtyy pisteeseen A_j. Osoita, että vähintään kahdella monitahokkaista $P_1, P_2, \ldots, P_9$ on yhteinen sisäpiste.

71.3. Osoita, että lukujono $(2^n - 3)$ sisältää äärettömän osajonon, jonka jäsenet ovat keskenään yhteistekijättömiä.

71.4. Tetraedrin $ABCD$ kaikki sivutahkot ovat teräväkulmaisia kolmioita. Olkoon $\angle BAD = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCD = \gamma$ ja $\angle ADC = \delta$. Tarkastellaan umpinaisia murtoviivoja $XYZTX$, missä X, Y, Z ja T ovat särmien AB, BC, CD ja DA sisäpisteitä. Osoita:

a) Jos $\alpha + \gamma \neq \beta + \delta$, niin murtoviivojen joukossa ei ole lyhintä.

b) Jos $\alpha+\gamma = \beta+\delta$, on olemassa äärettömän monta lyhintä murtoviivaa. Niistä jokaisen pituus on $2 \cdot AC \cdot \sin \dfrac{\omega}{2}$, missä $\omega = \angle BAC + \angle CAD + \angle DAB$.

71.5. Osoita, että jokaista positiivista kokonaislukua m kohden on olemassa tason äärellinen pistejoukko S_m, jolla on seuraava ominaisuus: Jos A kuuluu joukkoon S_m, niin tasan m:n S_m:n pisteen etäisyys A:sta on 1.

71.6. Olkoon $A = (a_{ij})$, i, $j = 1, 2, \ldots, n$, matriisi, jonka alkiot ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja. Matriisilla A on seuraava ominaisuus: jos $a_{ij} = 0$, niin

$$a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} + a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj} \geq n.$$

Osoita, että matriisin kaikkien alkioiden summa on ainakin $\dfrac{1}{2}n^2$.

72.1. On annettu kymmenen kaksinumeroisen keskenään eri suuren kokonaisluvun joukko. Osoita, että joukolla on kaksi yhteisalkiotonta osajoukkoa, joiden alkioiden summa on sama.

72.2. Osoita, että seuraava väite pitää paikkansa jokaiselle $n \geq 4$: Jokainen sellainen nelikulmio, jonka ympäri voidaan piirtää ympyrä, voidaan jakaa n:ksi osanelikulmioksi, joiden ympäri voidaan piirtää ympyrä.

72.3. Olkoot m ja n mielivaltaisia ei-negatiivisia kokonaislukuja. Osoita, että luku

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

on kokonaisluku. (Huom. $0! = 1$.)

72.4. Määritä kaikki epäyhtälöryhmän

$$\begin{cases} (x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \leq 0 \\ (x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \leq 0 \\ (x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \leq 0 \\ (x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \leq 0 \\ (x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \leq 0, \end{cases}$$

missä $x_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, ratkaisut $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

72.5. Olkoot f ja g välillä $(-\infty, +\infty)$ määriteltyjä funktioita, jotka toteuttavat kaikilla x ja y yhtälön

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y).$$

Osoita, että jos $f(x)$ ei ole identtisesti 0 ja jos $|f(x)| \leq 1$ kaikilla x, niin $|g(y)| \leq 1$ kaikilla y.

72.6. On annettu neljä eri yhdensuuntaista tasoa. Osoita, että on olemassa sellainen säännöllinen tetraedri, että jokaisella annetuista tasoista on yksi tetraedrin kärki.

73.1. Olkoon piste O suoralla ℓ ja olkoot $\overrightarrow{OP}_1$, $\overrightarrow{OP}_2$, $\ldots$, $\overrightarrow{OP}_n$ yksikkövektoreita. Oletetaan lisäksi, että kaikki pisteet P_i sijaitsevat ℓ:n sisältävässä tasossa suoran ℓ samalla puolella. Osoita, että jos n on pariton, niin

$$|\,\overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP} + \cdots + \overrightarrow{OP}_n\,| \geq 1.$$

73.2. Selvitä, onko kolmiulotteisessa avaruudessa olemassa sellainen äärellinen pistejoukko M, jonka pisteet eivät ole samassa tasossa, että jos A, $B \in M$, on olemassa C, $D \in M$ niin, että suorat AB ja CD ovat yhdensuuntaiset, mutta eivät ole sama suora.

73.3. Olkoot a ja b sellaisia reaalilukuja, että yhtälöllä

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$$

on ainakin yksi reaalinen juuri. Määritä summan $a^2 + b^2$ pienin mahdollinen arvo.

73.4. Sotilaan on varmistettava, että eräässä tasasivuisen kolmion muotoisessa alueessa tai sen reunalla ei ole miinoja. Miinaharavan varsi on niin pitkä, että hän ylettyy sillä itsestään etäisyydelle, joka on puolet kolmion korkeudesta. Sotilas lähtee liikkeelle kolmion kärjestä. Mikä on lyhin tie, jota kulkien hän voi tutkia koko alueen?

73.5. On annettu epätyhjä joukko G funktioita f, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Joukolla G on seuraavat ominaisuudet:

(1) Jos f, $g \in G$, niin $g \circ f \in G$ $((g \circ f)(x) = g\,(f(x)))$.

(2) Jos $f \in G$, niin myös käänteisfunktio $f^{-1} \in G$ (jos $f(x) = ax + b$, niin $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{a}(x - b)$).

(3) Jokaista $f \in G$ kohden on olemassa x_f siten, että $f(x_f) = x_f$. Osoita, että on olemassa k, jolle $f(k) = k$ kaikilla $f \in G$.

73.6. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiivisia lukuja ja $0 < q < 1$. Etsi n reaalilukua $b_1, b_2, \ldots, b_n$, joille pätee

a) $a_k < b_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$;

b) $q < \dfrac{b_{k+1}}{b_k} < \dfrac{1}{q}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$;

c) $b_1 + b_2 + \cdots + b_n < \dfrac{1+q}{1-q}\,(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$.

74.1. Henkilöt A, B ja C pelaavat seuraavaa peliä. Kolmelle kortille on kullekin merkitty eri kokonaisluku. Näille luvuille p, q ja r pätee $0 < p < q < r$. Kortit sekoitetaan ja jokaiselle pelaajalle jaetaan ykis kortti. Sen jälkeen kullekin pelaajalle annetaan niin monta kuulaa kuin kortissa oleva luku osoittaa. Kortit kerätään pois, mutta kuulat jäävät pelaajille. Pelikierros käydään läpi ainakin kahdesti. Viimeisen kierroksen jälkeen A:lla on 20, B:llä 10 ja C:llä 9 kuulaa. B sai viimeisellä kierroksella r kuulaa. Kuka sai ensimmäisellä kierroksella q kuulaa?

74.2. Osoita, että silloin ja vain silloin, kun

$$\sin A \sin B \leq \sin^2 \frac{C}{2},$$

on kolmion ABC sivulla AB sellainen piste D, että CD on AD:n ja DB:n geometrinen keskiarvo.

74.3. Osoita, että luku

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+2} 2^{3k}$$

ei ole jaollinen 5:llä, oli n mikä luonnollinen luku hyvänsä.

74.4. 8×8-ruutuinen šakkilauta jaetaan p:ksi suorakaiteeksi niin, että laudan ruudut säilyvät kokonaisina. Jako toteuttaa seuraavat ehdot.

1) Jokaisessa suorakaiteessa on yhtä monta valkoista ja mustaa ruutua.
2) Jos a_i on i:nnen suorakaiteen valkoisten ruutujen määrä, niin $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$.

Etsi suurin p:n arvo, jolla jako on mahdollinen. Määritä kaikki tähän p:n arvoon liittyvät jonot $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

74.5. Määritä kaikki mahdolliset lausekkeen

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}$$

arvot, kun a, b, c, d ovat positiivisia reaalilukuja.

74.6. Olkoon P kokonaislukukertoiminen polynomi, joka ei ole vakio. Oletetaan, että on olemassa täsmälleen $n(P)$ kokonaislukua k, joille $P(k)^2 = 1$. Osoita, että

$$n(P) - \deg(P) \leq 2,$$

kun $\deg(P)$ on polynomin P asteluku.