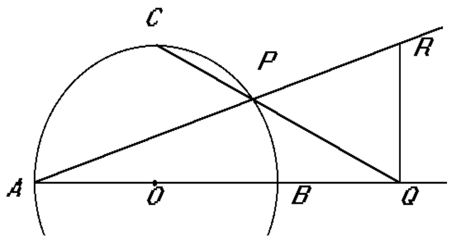
Pohjoismaisten matematiikkakilpailujen tehtävät ja ratkaisut 1995 – 2009

Tehtävät

9. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 15.3.1995

P 1995.1. Olkoon AB O-keskisen ympyrän halkaisija. Valitaan ympyrän kehältä piste C siten, että OC ja AB ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Olkoon P mielivaltainen (lyhemmän) kaaren BC piste ja leikatkoot suorat CP ja AB pisteessä Q. Valitaan R AP:ltä niin, että RQ ja AB ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Osoita, että $|BQ| = |QR|$.



P 1995.2. Viestit koodataan käyttäen vain nollista ja ykkösistä koostuvia jonoja. Vain sellaisia jonoja, joissa esiintyy enintään kaksi peräkkäistä ykköstä tai nollaa saa käyttää. (Esimerkiksi jono 011001 on sallittu, mutta 011101 ei ole.) Määritä kaikkien tasan 12 merkistä koostuvien jonojen lukumäärä.

P 1995.3. Olkoon $n \geq 2$ ja olkoot $x_1, x_2, \ldots x_n$ reaalilukuja, joille on voimassa $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq 0$ ja $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Olkoon $M = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Osoita, että

$$M \geq \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}. \tag{1}$$

Selvitä, milloin (1):ssä vallitsee yhtäsuuruus.

P 1995.4. Osoita, että on olemassa äärettömän monta keskenään epäyhtenevää kolmiota T, joille pätee

(i) Kolmion T sivujen pituudet ovat peräkkäisiä kokonaislukuja.

(ii) T:n pinta-ala on kokonaisluku.

10. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 11.4.1996

P 1996.1. Todista, että on olemassa 1996:lla jaollinen kokonaisluku, jonka kymmenjärjestelmäesityksen numeroiden summa on 1996.

P 1996.2. Määritä kaikki reaaliluvut x, joille

$$x^n + x^{-n}$$

on kokonaisluku kaikilla kokonaisluvuilla n.

P 1996.3. Ympyrä, jonka halkaisija on kolmion ABC kärjestä A piirretty korkeusjana, leikkaa kolmion sivun AB pisteessä D ja sivun AC pisteessä E ($A \neq D$, $A \neq E$). Osoita, että kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion ADE kärjestä A piirretyllä korkeusjanalla tai sen jatkeella.

P 1996.4. Reaaliarvoinen funktio f on määritelty positiivisten kokonaislukujen joukossa, ja positiivinen kokonaisluku a toteuttaa ehdot

$$f(a) = f(1995), \qquad f(a+1) = f(1996), \qquad f(a+2) = f(1997)$$
$$f(n+a) = \frac{f(n)-1}{f(n)+1} \quad \text{kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla } n.$$

(i) Osoita, että $f(n + 4a) = f(n)$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n.

(ii) Määritä pienin mahdollinen a.

11. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 9.4.1997

P 1997.1. Jos A on joukko, jonka alkiot ovat seitsemän positiivista lukua, niin kuinka monta A:n alkioista muodostuvaa kolmikkoa (x, y, z), missä $x < y$ ja $x + y = z$, on enintään olemassa?

P 1997.2. Olkoon $ABCD$ kupera nelikulmio. Oletetaan, että nelikulmion sisällä on piste P, jolle kolmioiden ABP, BCP, CDP ja DAP alat ovat samat. Osoita, että nelikulmion lävistäjistä ainakin toinen jakaa toisen kahteen yhtä pitkään osaan.

P 1997.3. Olkoot A, B, C ja D neljä eri pistettä tasossa. Janoista AB, AC, AD, BC, BD ja CD kolmen pituus on a. Muiden kolmen pituus on b, missä $b > a$. Määritä osamäärän $\dfrac{b}{a}$ kaikki mahdolliset arvot.

P 1997.4. Olkoon f ei-negatiivisten kokonaislukujen joukossa $\{0, 1, 2, \ldots\}$ määritelty funktio, jolle pätee

$$f(2x) = 2f(x), \quad f(4x+1) = 4f(x) + 3 \quad \text{ja} \quad f(4x-1) = 2f(2x-1) - 1.$$

Osoita, että f on injektio, ts. että jos $f(x) = f(y)$, niin $x = y$.

12. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 2.4.1998

P 1998.1. Määritä kaikki rationaalilukujen joukossa määritellyt rationaalilukuarvoiset funktiot f, jotka toteuttavat yhtälön $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$ kaikilla rationaaliluvuilla x ja y.

P 1998.2. Olkoot C_1 ja C_2 kaksi ympyrää, jotka leikkaavat toisensa pisteissä A ja B. Olkoon S C_1:n keskipiste ja T C_2:n keskipiste. Olkoon P janan AB jokin sellainen piste, että $|AP| \neq |BP|$ ja $P \neq A$, $P \neq B$. Piirretään P:n kautta SP:tä vastaan kohtisuora suora ja merkitään sen ja C_1:n leikkauspisteitä C:llä ja D:llä. Piirretään samoin P:n kautta TP:tä vastaan kohtisuora suora ja merkitään sen ja C_2:n leikkauspisteitä E:llä ja F:llä. Osoita, että C, D, E ja F ovat erään suorakaiteen kärkipisteet.

P 1998.3. (a) Millä positiivisilla luvuilla n on olemassa jono $x_1, x_2, \ldots, x_n$, joka sisältää kunkin luvuista $1, 2, \ldots, n$ tasan kerran ja jolle $x_1+x_2+\cdots+x_k$ on jaollinen k:lla jokaisella $k = 1, 2, \ldots, n$?

(b) Onko olemassa päättymätön jono $x_1, x_2, x_3, \ldots$, joka sisältää jokaisen positiivisen kokonaisluvun tasan kerran ja jolle $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ on jaollinen k:lla kaikilla positiivisilla luvuilla k?

P 1998.4. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Laske sellaisten lukujen $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ lukumäärä, joille $\binom{n}{k}$ on pariton. Osoita, että tämä luku on kakkosen potenssi, ts. muotoa 2^p jollakin ei-negatiivisella luvulla p.

13. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 15.4.1999

P 1999.1. Ei-negatiivisten kokonaislukujen joukossa määritelty funktio f toteuttaa ehdon

$$f(n) = \begin{cases} f(f(n+11)), & \text{jos } n \le 1999 \\ n-5, & \text{jos } n > 1999. \end{cases}$$

Etsi yhtälön $f(n) = 1999$ kaikki ratkaisut.

P 1999.2. Ympyrän sisään piirretyn seitsenkulmion kaikki sivut ovat eripituisia. Kuinka monta $120°$:een kulmaa tällaisessa seitsenkulmiossa voi enintään olla?

P 1999.3. Äärettömän kokonaislukutason $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$ muodostavat kaikki pisteparit (x, y), missä x ja y ovat kokonaislukuja. Olkoot a ja b ei-negatiivisia kokonaislukuja. Sanomme (a, b)-ratsun siirroksi siirtymistä pisteestä (x, y) mihin hyvänsä pisteistä $(x \pm a, y \pm b)$ tai $(x \pm b, y \pm a)$. Määritä kaikki luvut a ja b, joilla on mahdollista päästä kiinteästä aloituspisteestä lähtien jokaiseen kokonaislukukoordinaattiseen tason pisteeseen (a, b)-ratsun siirtoja käyttämällä.

P 1999.4. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiivisia reaalilukuja ja $n \ge 1$. Osoita, että

$$n\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \ge \left(\frac{1}{1+a_1} + \cdots + \frac{1}{1+a_n}\right)\left(n + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Milloin vallitsee yhtäsuuruus?

14. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 30.3.2000

P 2000.1. Monellako tavalla luku 2000 voidaan kirjoittaa kolmen positiivisen, ei välttämättä eri suuren kokonaisluvun summana? (Summia $1+2+3$, $3+1+2$ jne. pidetään samoina.)

P 2000.2. Henkilöt $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ istuvat pöydän ympärillä tässä järjestyksessä, ja jokaisella on jokin määrä kolikoita. Alussa P_1:llä on yksi kolikko enemmän kuin P_2:lla, P_2:lla yksi kolikko enemmän kuin P_3:lla jne., aina P_{n-1}:een asti, jolla on yksi kolikko enemmän kuin P_n:llä. Sitten P_1 antaa P_2:lle yhden kolikon, tämä puolestaan antaa P_3:lle kaksi kolikkoa jne., aina P_n:ään asti, joka antaa P_1:lle n kolikkoa. Kolikkojen antamista jatketaan samalla tavalla: P_1 antaa $n+1$ kolikkoa P_2:lle, P_2 antaa $n+2$ kolikkoa P_3:lle; tällä tavoin prosessi jatkuu, kunnes jollakin henkilöistä ei enää ole riittävästi kolikkoja, ts. hän ei kykene antamaan pois yhtä kolikkoa enemmän kuin oli juuri saanut. Sillä hetkellä kun prosessi päättyy, havaitaan, että pöydän ääressä on kaksi naapurusta, joista toisella on tasan viisi kertaa niin paljon kolikkoja kuin toisella. Määritä pöydän ääressä istuvien ihmisten lukumäärä ja pöydän ympärillä kiertävien kolikkojen yhteismäärä.

P 2000.3. Kolmiossa ABC kulman B puolittaja leikkaa AC:n D:ssä ja kulman C puolittaja leikkaa AB:n E:ssä. Kulmanpuolittajat leikkaavat toisensa pisteessä O. Lisäksi $OD = OE$. Todista, että joko ABC on tasakylkinen tai $\angle BAC = 60°$.

P 2000.4. Reaaliarvoinen funktio f on määritelty, kun $0 \le x \le 1$. Lisäksi $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ ja

$$\frac{1}{2} \le \frac{f(z) - f(y)}{f(y) - f(x)} \le 2$$

kaikille $0 \le x < y < z \le 1$, joille $z - y = y - x$. Osoita, että

$$\frac{1}{7} \le f\left(\frac{1}{3}\right) \le \frac{4}{7}.$$

15. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 29.3.2001

P 2001.1. Olkoon A äärellinen kokoelma sellaisia koordinaattitason neliöitä, että jokaisen A:han kuuluvan neliön kärkipisteet ovat muotoa (m, n), $(m+1, n)$, $(m, n+1)$ ja $(m+1, n+1)$ joillain kokonaisluvuilla m ja n. Osoita, että on olemassa sellainen A:n osakokoelma B, että B:hen kuuluu ainakin 25 % A:n neliöistä, mutta millään kahdella B:n neliöllä ei ole yhteistä kärkipistettä.

P 2001.2. Olkoon f rajoitettu reaaliarvoinen funktio, joka on määritelty kaikilla reaaliluvuilla ja joka toteuttaa kaikilla reaaliluvuilla x ehdon

$$f\left(x + \frac{1}{3}\right) + f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(x) + f\left(x + \frac{5}{6}\right).$$

Osoita, että f on jaksollinen. (Funktio f on rajoitettu, jos on olemassa luku L siten, että $|f(x)| < L$ kaikilla reaaliluvuilla x. Funktio f on jaksollinen, jos on olemassa positiivinen luku k siten, että $f(x+k) = f(x)$ kaikilla reaaliluvuilla x.)

P 2001.3. Määritä yhtälön

$$x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2} = 0$$

reaalisten juurten lukumäärä.

P 2001.4. Olkoon $ABCDEF$ kupera kuusikulmio, jossa kukin lävistäjistä AD, BE ja CF jakaa kuusikulmion kahdeksi nelikulmioksi, joiden alat ovat yhtä suuret. Osoita, että AD, BE ja CF leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

16. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 4.4.2002

P 2002.1. Puolisuunnikas $ABCD$, missä AB ja CD ovat yhdensuuntaiset ja $AD < CD$, on piirretty ympyrän c sisään. Olkoon DP AC:n suuntainen ympyrän jänne. Oletetaan, että pisteeseen D piirretty c:n tangentti leikkaa suoran AB pisteessä E ja että PB ja DC leikkaavat pisteessä Q. Osoita, että $EQ = AC$.

P 2002.2. Kahteen maljaan on sijoitettu yhteensä N palloa, jotka on numeroitu 1:stä N:ään. Yksi pallo siirretään maljasta toiseen. Tällöin kummassakin maljassa olevissa palloissa olevien lukujen keskiarvo kasvaa samalla määrällä, joka on x. Mikä on x:n suurin mahdollinen arvo?

P 2002.3. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ja $b_1, b_2, \ldots, b_n$ reaalilukuja ja olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kaikki eri lukuja. Osoita, että jos kaikki tulot

$$(a_i + b_1)(a_i + b_2) \cdots (a_i + b_n),$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, ovat keskenään yhtä suuria, niin myös kaikki tulot

$$(a_1 + b_j)(a_2 + b_j) \cdots (a_n + b_j),$$

$j = 1, 2, \ldots, n$, ovat keskenään yhtä suuria.

P 2002.4. Eva, Per ja Anna leikittelevät taskulaskimillaan. He valitsevat eri kokonaislukuja ja tarkistavat, ovatko ne jaollisia 11:llä vai eivät. He tutkivat vain sellaisa yhdeksännumeroisia lukuja, joissa esiintyvät kaikki numerot 1, 2, . . . , 9. Anna väittää, että jos tällainen luku valitaan umpimähkään, niin todennäköisyys, että se olisi jaollinen 11:llä, on tasan 1/11. Eva on toista mieltä: hänen mielestään todennäköisyys on alle 1/11. Perin mielestä todennäköisyys on yli 1/11. Kuka on oikeassa?

17. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 3.4.2003

P 2003.1. 10-riviselle 14-sarakkeiselle šakkilaudalle asetetaan kiviä. Asettelun jälkeen havaitaan, että kullakin rivillä ja kullakin sarakkeella on pariton määrä kiviä. Näytä, että mustilla ruuduilla on parillinen määrä kiviä, kun ruudut on väritetty tavanomaisesti mustiksi ja valkoisiksi. Huomaa, että yhdellä ruudulla voi olla useampia kiviä.

P 2003.2. Etsi kaikki kokonaislukukolmikot, joille

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 2003.$$

P 2003.3. Tasasivuisen kolmion $\triangle ABC$ sisällä on piste D, jolle pätee $\angle ADC = 150°$. Todista, että kolmio, jonka sivut ovat $|AD|$, $|BD|$ ja $|CD|$, on välttämättä suorakulmainen.

P 2003.4. Olkoon $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nollasta poikkeavien reaalilukujen joukko. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, joille

$$f(x) + f(y) = f(xy\, f(x + y)),$$

kun $x, y \in \mathbb{R}^*$ ja $x + y \neq 0$.

18. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 1.4.2004

P 2004.1. 27 palloa, jotka on numeroitu numeroin 1:stä 27:ään, on sijoitettu punaiseen, siniseen ja keltaiseen maljaan. Mitkä ovat punaisessa maljassa olevien pallojen mahdolliset lukumäärät, kun tiedetään, että punaisessa, sinisessä ja keltaisessa maljassa olevien pallojen numeroiden keskiarvot ovat 15, 3 ja 18?

P 2004.2. Olkoon $f_1 = 0$, $f_2 = 1$, ja $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, kun $n = 1, 2, \ldots$, Fibonaccin lukujono. Osoita, että on olemassa aidosti kasvava päättymätön aritmeettinen kokonaislukujono, jonka yksikään luku ei kuulu Fibonaccin jonoon.

[Lukujono on *aritmeettinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus on vakio.]

P 2004.3. Olkoon $x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}$, $n > 2$, kokonaislukujono. Oletetaan, että luvut x_{i1} eivät kaikki ole samoja. Jos luvut $x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk}$ on määritelty, niin asetetaan

$$x_{i,k+1} = \frac{1}{2}(x_{ik} + x_{i+1,k}),\ i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad x_{n,k+1} = \frac{1}{2}(x_{nk} + x_{1k}).$$

Osoita, että jos n on pariton, niin jollakin j, k, x_{jk} ei ole ole kokonaisluku. Päteekö tämä myös silloin, kun n on parillinen?

P 2004.4. Olkoot a, b ja c kolmion sivujen pituudet ja olkoon R kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde. Osoita, että

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{R^2}.$$

19. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 5.4.2005

P 2005.1. Määritä kaikki ne positiiviset kokonaisluvut k, joiden kymmenjärjestelmäesityksen numeroiden tulo on

$$\frac{25}{8}k - 211.$$

P 2005.2. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Todista, että

$$\frac{2a^2}{b+c} + \frac{2b^2}{c+a} + \frac{2c^2}{a+b} \geq a + b + c.$$

P 2005.3. 2005 nuorta istuu suuren pyöreän pöydän ympärillä. Nuorista enintään 668 on poikia. Sanomme, että tytön G asema on vahva, jos tarkasteltaessa G:stä alkaen kuinka monen hyvänsä vierekkäin istuvan nuoren joukkoa kumpaan tahansa suuntaan, niin on näissä joukoissa on aina aidosti enemmän tyttöjä kuin poikia (G on itse mukana laskussa). Osoita, että olivat tytöt ja pojat missä järjestyksessä tahansa, joku tyttö on aina vahvassa asemassa.

P 2005.4. Ympyrä $\mathcal{C}_1$ on ympyrän $\mathcal{C}_2$ sisäpuolella, ja ympyrät sivuavat toisiaan pisteessä A. A:n kautta kulkeva suora leikkaa $\mathcal{C}_1$:n myös pisteessä B ja $\mathcal{C}_2$:n myös pisteessä C. Ympyrän $\mathcal{C}_1$ pisteeseen B piirretty tangentti leikkaa $\mathcal{C}_2$:n pisteissä D ja E. Pisteen C kautta kulkevat ympyrän $\mathcal{C}_1$ tangentit sivuavat $\mathcal{C}_1$:tä pisteissä F ja G. Osoita, että pisteet D, E, F ja G ovat samalla ympyrällä.

20. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 30.3.2006

P 2006.1. Pisteet B ja C sijaitsevat kahdella pisteestä A lähtevällä puolisäteellä niin, että $AB + AC$ on vakio. Osoita, että on olemassa piste $D \neq A$, niin että kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä kulkee D:n kautta kaikilla pisteiden B ja C valinnoilla.

P 2006.2. Reaaliluvut x, y ja z eivät kaikki ole samoja ja ne toteuttavat yhtälöt

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} = k.$$

Määritä kaikki mahdolliset k:n arvot.

P 2006.3. Positiivisten kokonaislukujen jonon $\{a_n\}$ määrittelevät ehdot

$$a_0 = m \qquad \text{ja} \qquad a_{n+1} = a_n^5 + 487 \quad \text{kaikilla} \quad n \geq 0.$$

Määritä kaikki sellaiset m:n arvot, joilla jonoon kuuluu mahdollisimman monta neliölukua.

P 2006.4. 100×100-šakkilaudan neliöt väritetään 100:lla eri värillä. Kuhunkin ruutuun käytettään vain yhtä väriä ja joka väriä käytetään tasan sataan ruutuun. Osoita, että laudalla on jokin vaaka- tai pystyrivi, jonka ruutuihin on käytetty ainakin kymmentä väriä.

21. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 29.3.2007

P 2007.1. Etsi *yksi* yhtälön

$$x^2 - 2x - 2007y^2 = 0$$

positiivinen kokonaislukuratkaisu.

P 2007.2. On annettu kolmio, suora ja kolme suorakaidetta, joiden yksi sivu on annetun suoran suuntainen, niin, että suorakaiteet peittävät kokonaan kolmion sivut. Todista, että suorakaiteet peittävät kokonaan kolmion sisäosan.

P 2007.3. Taululle on kirjoitettu luku 10^{2007}. Anne ja Berit pelaavat peliä, jossa pelaaja tekevät vuorotellen yhden seuraavista operaatioista:

(i) Pelaaja korvaa taululla olevan luvun x kahdella ykköstä suuremmalla kokonaisluvulla a ja b niin, että $x = ab$.

(ii) Pelaaja poistaa taululla olevista kahdesta samasta luvusta toisen tai molemmat.

Se pelaaja, joka ei voi tehdä kumpaakaan näistä vuorollaan, häviää pelin. Kummalla pelaajalla on voittostrategia, jos Anne aloittaa pelin?

P 2007.4. Pisteen A kautta kulkeva suora leikkaa ympyrän kahdessa pisteessä B ja C niin, että B on A:n ja C:n välissä. Pisteestä A piirretään ympyrälle kaksi tangenttia, jotka sivuavat ympyrää pisteissä S ja T. Olkoon P suorien AC ja ST leikkauspiste. Osoita, että $AP/PC = 2 \cdot AB/BC$.

22. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 31.3.2008

P 2008.1 Määritä kaikki sellaiset reaaliluvut A, B ja C, joille on olemassa jokin reaalilukuarvoinen funktio f, joka toteuttaa kaikilla reaaliluvuilla x ja y yhtälön

$$f(x+f(y)) = Ax + By + C.$$

P 2008.2 Pyöreän pöydän ympärillä istuu $n \geq 3$ eriministä ihmistä. Sanomme, että mitkä tahansa kaksi näistä, A ja B, muodostavat *dominoivan parin*, jos

(1) M ja N eivät istu vierekkäin, ja
(2) ainakin toisella M:n ja N:n välisellä pöydänympäryksen osalla istuu vain ihmisiä, joiden nimet ovat aakkosjärjestyksessä M:n ja N:n nimien jäljessä.

Määritä dominoivien parien pienin mahdollinen lukumäärä.

P 2008.3 Olkoon ABC kolmio ja olkoon D sivun BC ja E sivun CA piste niin, että AD ja BE ovat kolmion ABC kulmanpuolittajia. Olkoot F ja G sellaisia kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän pisteitä, että AF ja DE ovat yhdensuuntaisia ja FG ja BC ovat yhdensuuntaisia. Osoita, että

$$\frac{AG}{BG} = \frac{AB+AC}{AB+BC}.$$

P 2008.4 Kahden peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun kuution erotus on neliöluku n^2, missä n on positiivinen kokonaisluku. Osoita, että n on kahden neliöluvun summa.

23. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 2.4.2009

P 2009.1 Kolmion sisältä valitaan piste P. P:n kautta piirretään kolme kolmion sivujen suuntaista suoraa. Ne jakavat kolmion kolmeksi pienemmäksi kolmioksi ja kolmeksi suunnikkaaksi. Olkoon f kolmen pienen kolmion yhteenlasketun alan ja koko kolmion alan suhde. Osoita, että $f \geq \dfrac{1}{3}$, ja määritä ne pisteet P, joille $f = \dfrac{1}{3}$.

P 2009.2 Haalistuneelta paperinpalalta voidaan vaivoin lukea seuraavat merkinnät:

$$(x^2 + x + a)(x^{15} - \ldots) = x^{17} + x^{13} + x^5 - 90x^4 + x - 90.$$

Jotkin osat ovat häipyneet näkyvistä, erityisesti vasemman puolen ensimmäisen tekijän vakiotermi ja toisen tekijän loppuosa. Olisi mahdollista selvittää kokonaan toinen tekijä, mutta kysytään vain, mikä on vakiotermi a. Oletetaan, että kaikki tehtävässä esiintyvät polynomit ovat kokonaislukukertoimisia.

P 2009.3 Taululle on kirjoitettu kokonaisluvut 1, 2, 3, 4 ja 5. Lukuja voidaan muuttaa niin, että pyyhitään pois luvut a ja b ja kirjoitetaan niiden sijaan luvut $a + b$ ja ab. Onko mahdollista toistamalla tätä operaatiota päästä tilanteeseen, jossa kolme viidestä taululla olevasta luvusta on 2009?

P 2009.4 Turnaukseen osallistuu 32 kilpailijaa. Kaikki ovat pelikyvyiltään erilaisia ja kaksinkamppailussa parempi aina voittaa. Osoita, että kulta-, hopea- ja pronssimitalien voittajat voidaan ratkaista 39 ottelun perusteella.

Ratkaisuja

P 1995.1. *1. ratkaisu.* Piirretään PB. Puoliympyrän sisältämää kehäkulmaa koskevan lauseen nojalla $\angle RPB = \angle APB = 90°$. Täten P ja Q ovat molemmat ympyrällä, jonka halkaisija on BR. Koska $\angle AOC = 90°$, $\angle RPQ = \angle CPA = 45°$. Siis myös $\angle RBQ = 45°$, ja RBQ on tasakylkinen suorakulmainen kolmio, eli $|BQ| = |QR|$.

2. ratkaisu. Asetetaan $O = (0, 0)$, $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$, $P = (t, u)$, $t > 0$, $u > 0$, $t^2 + u^2 = 1$. Suoran CP yhtälö on $y - 1 = \dfrac{u-1}{t}x$. Näin ollen $Q = \left(\dfrac{t}{1-u}, 0\right)$ ja $|BQ| = \dfrac{t}{1-u} - 1 = \dfrac{t+u-1}{1-u}$. Toisaalta suoran AP yhtälö on $y = \dfrac{u}{t+1}(x+1)$, joten pisteen R y-koordinaatti ja samalla $|QR|$ on $\dfrac{u}{t+1}\left(\dfrac{t}{1-u} + 1\right) = \dfrac{ut + u - u^2}{(t+1)(1-u)} = \dfrac{ut + u - 1 + t^2}{(t+1)(1-u)} = \dfrac{u+t-1}{1-u}$. Väite on todistettu.

P 1995.2. *1. ratkaisu.* Olkoon S_n $2n$-numeroisten hyväksyttyjen jonojen joukko. Jaetaan S_n osajoukoiksi A_n, B_n, C_n ja D_n, joiden alkioina ovat yhdistelmiin 00, 01, 10, ja 11 päättyvät jonot. Merkitään joukon S_n alkioiden lukumäärää x_n:llä, A_n:n alkioiden lukumäärää a_n:llä, B_n:n b_n:llä, C_n:n c_n:llä ja D_n:n d_n:llä. Lasketaan x_6. Koska $S_1 = \{00, 01, 10, 11\}$, $x_1 = 4$ ja $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 1$. Jokainen A_{n+1}:n alkio saadaan joko B_n:n tai D_n:n alkiosta lisäämällä loppuun 00. Siis $a_{n+1} = b_n + d_n$. Vastaavasti B_{n+1}:n alkiot saadaan B_n:n, C_n:n ja D_n:n alkioista liittämällä loppuun 01, ja kääntäen. Siis $b_{n+1} = b_n + c_n + d_n$. Samoin nähdään oikeiksi palautuskaavat $c_{n+1} = a_n + b_n + c_n$ ja $d_{n+1} = a_n + c_n$. Siis $a_{n+1} + d_{n+1} = (b_n + d_n) + (a_n + c_n) = x_n$ ja $x_{n+1} = 2a_n + 3b_n + 3c_n + 2d_n = 3x_n - (a_n + b_n) = 3x_n - x_{n-1}$. Lähtemällä alkuarvoista $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 1$ saadaan $a_2 = d_2 = 2$, $b_2 = c_2 = 3$, $x_2 = 10$. Näin ollen $x_3 = 26$, $x_4 = 3 \cdot 26 - 10 = 68$, $x_5 = 3 \cdot 68 - 26 = 178$ ja $x_6 = 3 \cdot 178 - 68 = 466$.

2. ratkaisu Jokainen tapa kirjoittaa luku 12 ykkösien ja kakkosien summana vastaa tasan kahta hyväksyttävää jonoa (eri yhteenlaskettavien järjestykset lasketaan erikseen). Summia, joissa on 12 ykköstä on 1, summia, joissa on yksi kakkonen ja 10 ykköstä on $\dbinom{11}{10}$ jne. Hyväksyttäviä jonoja on yhteensä

$$2 \cdot \sum_{k=0}^{6} \binom{12-k}{2k} = 2 \cdot (1 + 11 + 45 + 84 + 70 + 21 + 1) = 466.$$

P 1995.3. Merkitään I:llä niiden indeksien i joukkoa, joille $x_i \geq 0$, ja J:llä niiden indeksien i joukkoa, joille $x_i < 0$. Oletetaan, että $M < \dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$. Silloin $I \neq \{1, 2, \ldots, n\}$, koska muutoin pätisi $|x_i| = x_i \leq \dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ jokaiselle i ja olisi $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < \dfrac{1}{n-1} \leq 1$. Siis

$\sum_{i\in I} x_i^2 < (n-1)\cdot\dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n}$ ja $\sum_{i\in I} x_i < (n-1)\dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}} = \sqrt{\dfrac{n-1}{n}}$. Koska

$$0 \le \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i\in I} x_i - \sum_{i\in J} |x_i|,$$

on oltava $\sum_{i\in J} |x_i| \le \sum_{i\in I} x_i < \sqrt{\dfrac{n-1}{n}}$ and $\sum_{i\in J} x_i^2 \le \left(\sum_{i\in J} |x_i|\right)^2 < \dfrac{n-1}{n}$. Mutta silloin

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i\in I} x_i^2 + \sum_{i\in J} x_i^2 < \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = 1,$$

ja on tultu ristiriitaan. – Yhtäsuuruuden $M = \dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ mahdollisuuden toteamiseksi valitaan $x_i = \dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ja $x_n = -\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}$. Tällöin

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = (n-1)\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} - \sqrt{\frac{n-1}{n}} = 0$$

ja

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = (n-1)\cdot\frac{1}{n(n-1)} + \frac{n-1}{n} = 1.$$

On vielä näytettävä, että yhtäsuuruuteen ei päästä kuin edellä esitellyssä tapauksessa. Olkoon siis $x_i = \dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$, kun $i = 1, \ldots, p$, $x_i \ge 0$, kun $i \le q$, ja $x_i < 0$, kun $q+1 \le i \le n$. Samoin kuin yllä saadaan

$$\sum_{i=1}^{q} x_i \le \frac{q}{\sqrt{n(n-1)}}, \quad \sum_{i=q+1}^{n} |x_i| \le \frac{q}{\sqrt{n(n-1)}}, \quad \sum_{i=q+1}^{n} x_i^2 \le \frac{q^2}{n(n-1)},$$

joten

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le \frac{q+q^2}{n^2-n}.$$

On helppo nähdä, että $q^2+q < n^2+n$, kun $n \ge 2$ ja $q \le n-2$, mutta $(n-1)^2+(n-1) = n^2-n$. Välttämätöntä sille, että $M = \dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ on siis se, että jonossa on vain yksi negatiivinen termi. Mutta jos positiivisissa termeissä on yksikin, joka on $< M$, on

$$\sum_{i=1}^{n} < \frac{q+q^2}{n(n-1)},$$

joten tehtävän ehdot eivät toteudu. Yhtäsuuruus on siis voimassa vain, kun $n-1$ luvuista x_i on $\dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ ja viimeinen $\dfrac{1-n}{\sqrt{n(n-1)}}$.

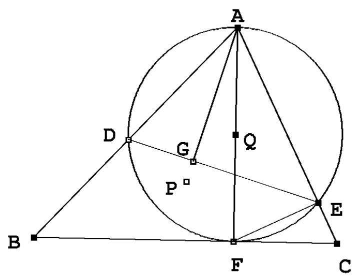
P 1995.4. Olkoon $n \geq 3$ ja olkoot $n-1$, n, $n+1$ kolmion sivut. Kolmion piirin puolikas on $\frac{3n}{2}$. Heronin kaavan perusteella kolmion ala on

$$T = \sqrt{\frac{3n}{2} \cdot \left(\frac{3n}{2} - n + 1\right)\left(\frac{3n}{2} - n\right)\left(\frac{3n}{2} - n - 1\right)} = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{3}{4}(n^2 - 4)}.$$

Jos $n = 4$, niin $T = 6$. On siis olemassa ainakin yksi vaaditunkaltainen kolmio. Olkoon n parillinen luku ja olkoon $\frac{3}{4}(n^2-4)$ neliöluku. Asetetaan $m = n^2 - 2 > n$. Silloin myös m on parillinen ja $m^2 - 4 = (m+2)(m-2) = n^2(n^2-4)$. Näin ollen $\frac{3}{4}(m^2-4)$ on sekin neliöluku. Lisäksi $T = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{3}{4}(m^2-4)}$ on kokonaisluku. Väite on todistettu.

P 1996.1. Luvun 1996 numeroiden summa on 25 ja luvun $2 \cdot 1996 = 3992$ numeroiden summa on 23. Koska $1996 = 78 \cdot 25 + 46$, luku, joka saadaan kirjoittamalla peräkkäin 78 1996:tta ja 2 3992:ta toteuttaa tehtävän ehdon. [$3 \cdot 1996 = 5998$; luvun 5988 numeroiden summa on 30. $1996 = 65 \cdot 30 + 46$, joten $39923992\underbrace{5988\ldots5988}_{65\text{ kpl}}$ on myös kelvollinen vastaus, selvästi pienempi kuin edellinen.]

P 1996.2. Olkoon AF kolmion ABC korkeusjana. Voidaan olettaa, että kulma ACB on terävä. Suorakulmaisista kolmioista ACF ja AFE saadaan $\angle AFE = \angle ACF$. Kehäkulmalauseen perusteella edelleen $\angle ADE = \angle AFE = \angle ACB$. Kolmiot ABC ja AED ovat näin ollen yhdenmuotoiset. Jos P ja Q ovat kolmioiden ABC ja AED ympäri piirrettyjen ympyröiden keskipisteet, niin $\angle BAP = \angle EAQ$. Jos kolmion AED korkeusjana on AG, niin $\angle DAG = \angle CAF$. Mutta tästä seuraa, että $\angle BAP = \angle DAG$, eli P on korkeusjanalla AG.



P 1996.3. Merkitään $f_n(x) = x^n + x^{-n}$. $f_n(0)$ ei ole määritelty millään n:n arvolla, joten on oltava $x \neq 0$. Koska $f_0(x) = 2$ kaikilla $x \neq 0$, tutkittavaksi jää, millä $x \neq 0$ $f_n(x)$ on kokonaisluku kaikilla $n > 0$. Koska

$$x^n + x^{-n} = (x^1 + x^{-1})(x^{n-1} + x^{1-n}) - (x^{n-2} + x^{2-n}),$$

niin jos $x^1 + x^{-1}$ on kokonaisluku, niin $x^n + x^{-n}$ on kokonaisluku kaikilla $n \geq 2$. x:n tulee siis toteuttaa ehto

$$x^1 + x^{-1} = m,$$

missä m on kokonaisluku. Tämän toisen asteen yhtälön ratkaisut ovat

$$x = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - 1},$$

ne ovat reaalisia, kun $m \neq -1, 0, 1$.

P 1996.4. (i) Käytetään toistuvasti kaavaa $f(n+a) = \dfrac{f(n)-1}{f(n)+1}$:

$$f(n+2a) = f((n+a)+a) = \frac{\dfrac{f(n)-1}{f(n)+1} - 1}{\dfrac{f(n)-1}{f(n)+1} + 1} = -\frac{1}{f(n)},$$

$$f(n+4a) = f((n+2a)+2a) = -\frac{1}{-\dfrac{1}{f(n)}} = f(n).$$

(ii) Jos $a = 1$, niin $f(1) = f(a) = f(1995) = f(3 + 498 \cdot 4a) = f(3) = f(1+2a) = -\dfrac{1}{f(1)}$, mikä on mahdotonta, koska $f(1)$:n ja $\dfrac{1}{f(1)}$ merkki on sama. Siis $a \neq 1$.

Jos $a = 2$, saadaan $f(2) = f(a) = f(1995) = f(3+249\cdot 4a) = f(3) = f(a+1) = f(1996) = f(4 + 249 \cdot 4a) = f(4) = f(2+a) = \dfrac{f(2)-1}{f(2)+1}$ eli $f(2)^2 + f(2) = f(2) - 1$. Tällä toisen asteen yhtälöllä ei ole reaalisia ratkaisuja. Siis $a \neq 2$.

Jos $a = 3$, niin f voidaan konstruoida valitsemalla $f(1)$, $f(2)$ ja $f(3)$ mielivaltaisesti ja laskemalla f:n muut arvot palautuskaavasta $f(n+3) = \dfrac{f(n)-1}{f(n)+1}$. $a = 3$ on siten pienin mahdollinen a:n arvo. Tarkistetaan, että näin määritelty f toteuttaa tehtävän ehdot.

Ensinnäkin konstruktion perusteella

$$f(n+a) = f(n+3) = \frac{f(n)-1}{f(n)+1}.$$

Edelleen (i):n perusteella

$$f(n+12) = f(n+4a) = f(n),$$

joten

$$f(a) = f(3) = f(3 + 166 \cdot 12) = f(1995),$$

$$f(a+1) = f(4) = f(4 + 166 \cdot 12) = f(1996),$$

$$f(a+2) = f(5) = f(5 + 166 \cdot 12) = f(1997)$$

kuten pitää.

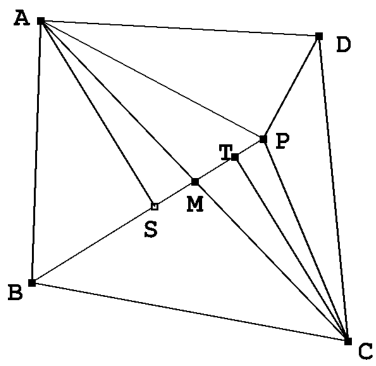
Jos $f(n) = -1$, $f(n+3)$ ei ole määritelty. Jos $f(n) = 0$, $f(n+3) = -1$ ja $f(n+6)$ ei ole määritelty. Jos $f(n) = 1$, $f(n+3) = 0$ ja $f(n+9)$ ei ole määritelty. On siis valittava $f(1)$, $f(2)$ ja $f(3)$ eri suuriksi kuin -1, 0, 1.

P 1997.1. Olkoot $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_7$ joukon A alkiot. Jos $(a_i,\, a_j,\, a_k)$ on tehtävän mukainen kolmikko, niin $a_i < a_j < a_i + a_j = a_k$. Pareja $(a_i,\, a_j)$, joille pätee $a_i + a_j = a_k$ on enintään $k-1$ kappaletta. Pareja, joille lisäksi pätee $a_i < a_j$, on enintään $\left[\frac{k-1}{2}\right]$ kappaletta. Pareja on siis enintään

$$\sum_{k=3}^{7}\left[\frac{k-1}{2}\right] = 1+1+2+2+3 = 9$$

kappaletta. Arvo 9 saavutetaan, kun $A = \{1,\, 2,\, \ldots,\, 7\}$, sillä tässä tapauksessa kolmikot (1, 2, 3), (1, 3, 4), (1, 4, 5), (1, 5, 6), (1, 6, 7), (2, 3, 5), (2, 4, 6), (2, 5, 7) ja (3, 4, 7) täyttävät tehtävän ehdot.

P 1997.2. Oletamme ensin, että P ei ole lävistäjällä AC ja että suora BP leikkaa lävistäjän AC pisteessä M. Olkoot S ja T pisteistä A ja C suoralle BP piirrettyjen kohtisuorien ja suoran BP leikkauspisteet. Koska kolmioilla APB ja CBP on sama ala, on $AS = CT$. Jos $S \neq T$, niin suorakulmaiset kolmiot ASM ja CTM ovat yhtenevät (kks tai ksk), joten $AM = CM$. Jos taas $S = T$, on $AC \perp PB$ ja $S = M = T$, jolloin myös $AM = CM$. Joka tapauksessa M on lävistäjän AC keskipiste. Täsmälleen samoin todistetaan, että suora DP leikkaa AC:n tämän keskipistessä eli pisteessä M. Siis toisaalta B, M ja P, toisaalta D, M ja P ovat samalla suoralla. Siis M on suoralla DB, eli lävistäjä BD jakaa lävistäjän AC kahteen yhtä suureen osaan.



Oletamme sitten, että P on lävistäjällä AC. Silloin P on AC:n keskipiste. Jos P ei ole lävistäjällä BD, päätellään samoin kuin edellä, että AC jakaa BD:n kahteen yhtä suureen osaan. Jos P taas on myös lävistäjällä BD, se on molempien lävistäjien yhteinen keskipiste.

P 1997.3. Jos kolmella a:n pituisella janalla on sama kärki, esim. A, niin kolme muuta pistettä sijaitsevat A-keskisellä a-säteisellä ympyrällä ja ovat b-sivuisen tasasivuisen kolmion kärkinä. Tällöin A on kolmion BCD keskipiste, ja

$$\frac{b}{a} = \frac{b}{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}b} = \sqrt{3}.$$

Oletetaan sitten, että pisteestä A lähtee ainakin yksi a:n pituinen ja ainakin yksi b:n pituinen jana. Oletetaan, että $AB = a$, $AD = b$. Ei ole mahdollista, että joka pisteestä lähtisi vain yksi a:n pituinen jana (a:n pituisten janojen lukumäärä on puolet pisteistä lähtevien a:n pituisten janojen lukumäärästä, koska jokainen jana tulee lasketuksi molempien päätepisteidensä kohdalla). Voidaan siis olettaa, että A:sta lähtee toinenkin a:n pituinen jana, AC. Jos nyt olisi $BC = a$, olisi ABC tasasivuine kolmio ja D olisi samalla etäisyydellä

b sen kaikista kärjistä. Tämä ei voi tulla kyseeseen, koska $b > a$. Siis $BC = b$ Janoista CD ja BD toisen pituus on a. Voimme olettaa, että tämä jana on DC. Janat DC ja AB ovat joko eri tai samalla puolella suoraa AC. Jälkimmäisessä tapauksessa $ABCD$ on suunnikas, jonka kaksi sivuparia on a:n pituisia, kaksi b:n pituisia ja lävistäjien pituudet ovat a ja b. Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska suunnikkaan lävistäjien neliöiden summa $(a^2 + b^2)$ on sama kuin sivujen neliöiden summa $(2a^2 + 2b^2)$. Voimme siis olettaa, että $BACD$ on kupera nelikulmio. Olkoon $\angle ABC = \alpha$ ja $\angle ADB = \beta$. Tasakylkistä kolmiosta saadaan esimerkiksi $\angle CBD = \beta$, ja erityisesti kolmiosta ABD $2\alpha + 2\beta + \beta = \pi$ sekä $\angle CDA = \alpha$, $\angle DCB = \frac{1}{2}(\pi - \beta)$, $\angle CAD = \alpha$. Kolmiosta ADC saadaan näin ollen $\alpha + \alpha + \alpha + \frac{1}{2}(\pi - \beta) = \pi$. Kun ratkaistaan, saadaan $\alpha = \frac{1}{5}\pi = 36°$. Kolmiosta ABC saadaan nyt sinilauseen avulla

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin 108°}{\sin 36°} = \frac{\sin 72°}{\sin 36°} = 2\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

(Itse asiassa a on nyt säännöllisen viisikulmion sivu ja b sen lävistäjä.) – Toinen tapa löytää suhde $\frac{b}{a}$ on tarkastella puolisuunnikasta $CDBA$, jossa $CD \| AB$; jos E on pisteen B kohtisuora projektio janalla CD, niin $CE = b - \dfrac{1}{2}(b-a) = \dfrac{1}{2}(b+a)$, ja suorakulmaisesta kolmiosta BCE ja DCE saadaan $CE^2 = b^2 - \left(\dfrac{b+a}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2$, joka sievenee muotoon $b^2 - ab - a^2 = 0$ ja edelleen $\dfrac{b}{a} = \sqrt{\dfrac{5+1}{2}}$.

P 1997.4. Kun x on parillinen, niin $f(x)$ on parillinen, kun x on pariton, niin $f(x)$ on pariton. Lisäksi, jos $x \equiv 1 \mod 4$, niin $f(x) \equiv 3 \mod 4$ ja jos $x \equiv 3 \mod 4$, niin $f(x) \equiv 1 \mod 4$. Selvästi $f(0) = 0$, $f(1) = 3$, $f(2) = 6$ ja $f(3) = 5$. Todistetaan seuraava väite. Jos $f(x) = f(y) \implies x = y$, kun $x, y < k$, niin $f(x) = f(y) \implies x = y$, kun $x, y < 2k$. Oletetaan siis, että x ja y ovat pienempiä kuin $2k$ ja että $f(x) = f(y)$. Jos nyt $f(x)$ on parillinen, niin $x = 2t$, $y = 2u$, ja $2f(t) = 2f(u)$. Koska t ja u ovat pienempiä kuin k, on $t = u$, joten $x = y$. Oletetaan sitten, että $f(x) \equiv 1 \mod 4$. Silloin $x \equiv 3 \mod 4$; $x = 4u - 1$, ja $f(x) = 2f(2u-1) - 1$. Vastaavasti $y = 4t - 1$ ja $f(y) = 2f(2t-1) - 1$. Lisäksi $2u - 1 < \frac{1}{2}(4u-1) < k$ ja $2t - 1 < k$, joten $2u - 1 = 2t - 1$, $u = t$ ja $x = y$. Jos viimein $f(x) \equiv 3 \mod 4$, niin $x = 4u + 1$, $y = 4t + 1$, $u < k$, $t < k$, $4f(u) + 3 = 4f(t) + 3$, $u = t$, $x = y$. Koska kaikille x ja y on olemassa n siten, että suurempi luvuista x ja y on $< 2^n \cdot 3$, edellinen päättely osoittaa, että $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

P 1998.1. Kun tehtävän yhtälöön sijoitetaan $x = y = 0$, saadaan $2f(0) = 4f(0)$, joten $f(0) = 0$. Olkoon sitten $y = nx$, missä n on luonnollinen luku. Nyt saadaan

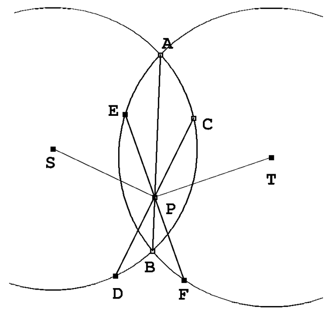
$$f((n+1)x) = 2f(x) + 2f(nx) - f((n-1)x).$$

Tästä saadaan $f(2)x = 2f(x) + 2f(x) - f(0) = 4f(x)$, $f(3x) = 2f(x) + 2f(2x) - f(x) = 9f(x)$, Todistetaan, että $f(nx) = n^2 f(x)$. Käytetään induktiota. Kaava on tosi, kun $n = 1$. Oletetaan, että $f(kx) = k^2 f(x)$, kun $k \le n$. Tällöin

$$f((n+1)x) = 2f(x) + 2f(nx) - f((n-1)x) = (2 + 2n^2 - (n-1)^2)f(x) = (n+1)^2 f(x).$$

Siis $f(nx) = n^2 f(x)$. Kun $x = 1/q$, $f(1) = f(qx) = q^2 f(x)$, joten $f(1/q) = f(1)/q^2$. Tästä seuraa $f(p/q) = p^2 f(1/q) = (p/q)^2 f(1)$, joten $f(x) = ax^2$ jollekin rationaaliluvulle a. Kääntäen, jos $f(x) = ax^2$, niin $f(x+y)+f(x-y) = a(x+y)^2 + a(x-y)^2 = 2ax^2 + 2ay^2 = 2f(x) + 2f(y)$. Näin ollen $f(x) = ax^2$ on yhtälön ratkaisu.

P 1998.2. Kun lasketaan pisteen P potenssi ympyröiden C_1 ja C_2 suhteen, saadaan $PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE \cdot PF$. Koska SP on kohtisuorassa jännettä CD vastaan, P:n on oltava CD:n keskipiste, joten $PC = PD$. Samoin saadaan $PE = PF$. Kaiken kaikkiaan $PC = PD = PE = PF = \sqrt{PA \cdot PB}$. Näin ollen pisteet C, D, E ja F ovat kaikki P-keskisellä ympyrällä, jonka halkaisijoita ovat CD ja EF. Thaleen lauseen perusteella kulmat $\angle ECF$, $\angle CFD$ jne. ovat kaikki suoria. $CDEF$ on siis suorakaide.



P 1998.3. (a) Oletetaan, että $x_1, \ldots, x_n$ on tehtävässä vaadittu jono. Silloin $x_1 + \cdots + x_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Tämä summa on jaollinen n:llä, mikä on mahdollista vain, kun n on pariton, jolloin $\dfrac{(n+1)}{2}$ on kokonaisluku. Jos $n = 2m$, niin $\dfrac{n(n+1)}{2} = m(2m+1) = 2m^2 + m \equiv m \bmod 2m$. Oletetaan nyt, että $n = 2m+1 > 1$. Vaaditaan, että $n-1 = 2m$ on tekijänä luvussa $x_1 + \cdots + x_{n-1}$. Koska $x_1 + \cdots + x_{n-1} = (m+1)(2m+1) - x_n =\equiv m+1-x_n \bmod 2m$, ja $1 \le x_n \le n$, niin $x_n = m+1$. Seuraavaksi vaaditaan, että $n-2 = 2m-1$ on tekijänä luvussa $x_1 + \cdots + x_{n-2}$. Koska $x_1 + \cdots + x_{n-2} = (m+1)(2m+1) - x_n - x_{n-1} \equiv m+1-x_{n-1} \bmod 2m-1$ ja $-m \le m+1-x_{n-1} \le m$, on $x_{n-1} = m+1 \bmod 2m-1$. Jos $n > 3$ eli $m \ge 1$, on $x_{n-1} = m+1 = x_n$, mikä on ristiriita. Siis $n = 1$ ja $n = 3$ ovat ainoat mahdollisuudet. Jos $n = 1$, $x_1 = 1$ on kelvollinen jono. Jos $n = 3$, on oltava $x_3 = 2$. x_1 ja x_2 ovat 1 ja 3 kummassa tahansa järjestyksessä.

(b) Olkoon $x_1 = 1$. Määritellään jono palautuskaavan avulla. Oletetaan, että $x_1, \ldots, x_{n-1}$ on valittu ja että näiden lukujen summa on A. Olkoon m pienin positiivinen kokonaisluku, jota ei vielä ole käytetty. Jos asetetaan $x_{n+1} = m$, x_n:llä on kaksi rajoitusta:

$$A + x_n \equiv 0 \bmod n \quad \text{ja} \quad A + x_n + m \equiv 0 \bmod n+1.$$

Koska n ja $n+1$ ovat yhteistekijättömiä, on olemassa y, jolle pätee $y \equiv -A \bmod n$, $y \equiv -A - m \bmod n+1$ ("kiinalainen jäännöslause") Jos y:hyn lisätään tarpeeksi suuri $n(n+1)$:n monikerta, saadaan luku, jota ei vielä ole käytetty jonoon. Täten jonoa voidaan aina jatkaa kahdella termillä, ja se tulee sisältämään jokaisen kokonaisluvun.

P 1998.4. Kun kirjoitetaan Pascalin kolmio $\bmod 2$:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 0 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & \\
 & 1 & & 1 & & 0 & & 0 & & 1 & & 1 & \\
1 & & 0 & & 1 & & 0 & & 1 & & 0 & & 1,
\end{array}$$

havaitaan, että rivi 1 sisältää kaksi rivin 0 kopiota, rivit 2 ja 3 sisältävät kaksi rivien 1 ja 2 kopiota jne.

Pascalin kolmion perusominaisuudesta $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}$ seuraa, että jos rivin k kaikki luvut ovat $\equiv 1 \bmod 2$, niin rivillä $k+1$ tasan ensimmäinen ja viimeinen luku on $\equiv 1 \bmod 2$. Jos k:nnella rivillä vain ensimmäinen ja viimeinen luku ovat $\equiv 1 \bmod 2$, niin rivit k, $k+1$, $\ldots$, $2k-1$ muodostuvat kahdesta rivien 0, 1, $\ldots k-1$ kopiosta. Koska rivillä 0 on luku 1, rivi 1 on kahden ykkösen muodostama, 2 ja 3 ovat kahden rivien 0 ja 1 muodostaman kolmion kopioita jne. Tästä päätellään induktiolla, että kaikilla k rivi 2^k-1 muodostuu pelkistä ykkösistä (siinä on kaksi kopiota rivistä $2^{k-1}-1$ ja rivi $2^1-1=0$ on pelkkä ykkönen). Täten rivi 2^k muodostuu nollista ja päissä olevista ykkösistä. Tästä seuraa edelleen, että rivit 2^k, 2^k+1, $\ldots$. $2^{k+1}-1$ ovat kaksi kopiota riveistä 0, 1, $\ldots 2^k-1$. Olkoon N_n rivin, $n = 2^k+m$, $m < 2^k$, parittomien lukujen määrä. Silloin $N_1 = 2$ ja $N_n = 2N_m$. Siis N_n on aina kakkosen potenssi. Todetaan vielä, että $N_n = 2^p$, missä p on n:n binääriesityksen ykkösten lukumäärä $y(n)$. Koska $N_0 = 1 = 2^{y(0)}$, kaava pätee, kun $n = 0$. Luvun $n = 2^k + m$ binääriesityksessä on yksi ykkönen enemmän kuin luvun m binääriesityksessä. Toisaalta $N_n = 2N_m = 2 \cdot 2^{y(m)} = 2^{y(m)+1} = 2^{y(n)}$.

On vielä osoitettava, että $\binom{2^k}{p} \equiv 1$ vain, kun $p = 0$ tai $p = 2^k$. Tämä seuraa esimerkiksi siitä, että $\binom{2^k-1}{p} \equiv 1$ kaikilla p, mikä taas seuraa edellisestä induktiosta.

P 1999.1. Jos $n \geq 2005$, niin $f(n) = n-5 \geq 2000$. Olkoon $1 \leq k \leq 4$. Silloin

$$2000-k = f(2005-k) = f(f(2010-k)) = f(1999-k) = f(f(2004-k)) = f(1993-k).$$

Sijoitetaan $k = 1$. Saadaan $1999 = f(2004) = f(1998) = f(1992)$. Lisäksi $1995 = f(2000) = f(f(2005)) = f(1994)$ ja $f(1993) = f(f(2004)) = f(1999) = f(f(2010)) = f(2005) = 2000$. On siis osoitettu, että $2000-k = f(1999-k)$, kun $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ja $2000-k = f(1993-k)$, kun $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Osoitetaan, että $f(6n+1-k) = 2000-k$, kun $n \leq 333$ ja $0 \leq k \leq 5$. Tämä on jo näytetty toteen, kun $n = 333$ ja $n = 332$. Oletetaan, että väite pätee, kun $n = m+2$ ja $n = m+1$. Silloin $f(6m+1-k) = f(f(6m+12-k)) = f(f(6(m+2)+1-(k+1)) = f(2000-k-1) = f(1999-k) = 2000-k$, kun $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ja $f(6m+1-5) = f(6m-4) = f(f(6m+7)) = f(f(6(m+1)+1)) = f(2000) = 1995 = 2000-5$. Siis väite pätee, kun $n = m$. Kaiken kaikkiaan siis $1999 = 2000-1 = f(6n)$, jos ja vain jos $n = 1, 2, \ldots, 334$.

P 1999.2. On helppo antaa esimerkkejä vaaditunlaisista seitsenkulmioista $ABCDEFG$, joissa kaksi kulmaa on 120°. Nämä kaksi kulmaa eivät kuitenkaan voi liittyä seitsenkulmion viereisiin kärkiin: tällainen konfiguraatio olisi symmetrinen kärkien välisen sivun keskinormaalin suhteen, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että seitsenkulmion kaikki sivut ovat eripituisia. Jos 120° kulmia olisi kolme, niiden tulisi sijaita (esim.) kärjissä A, C ja E. Koska 120° kehäkulmaa vastaa 240° keskuskulma, kaaret GAB, BCD ja DEF ovat kukin $360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$. Koska kaaret ovat erillisiä, ne peittävät koko ympyrän, joten $F = G$, ja seitsenkulmio surkastuu kuusikulmioksi. 120° kulmia voi siis olla enintään kaksi.

P 1999.3. Jos lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä on d, niin origosta voidaan päästä vain pisteisiin, joiden koordinaatit ovat jaollisia d:llä. On oltava $d = 1$. Jos $a + b$ on parillinen, niin kaikki pisteet (x, y), joihin origosta pääsee, ovat sellaisia, että $x + y$ on parillinen. Osoitetaan, että jos $d = 1$ ja $a + b \equiv 1 \bmod 2$, niin kaikkiin pisteisiin pääsee. Voidaan olettaa, että $a \geq 1$ ja $b \geq 1$, sillä jos $ab = 0$, voi olla $d = 1$ vain jos toinen luvuista a, b on nolla ja toinen 1. Näillä luvuilla kaikkiin pisteisiin pääseminen onnistuu. Koska $d = 1$, on olemassa positiiviset luvut r ja s siten, että joko $ra - sb = 1$ tai $sb - ra = 1$. Oletetaan, että $ra - sb = 1$. Jos tehdään r siirtoa $(x, y) \to (x + a, y + b)$ ja r siirtoa $(x, y) \to (x + a, y - b)$, tullaan pisteestä (x, y) pisteeseen $(x + 2ra, y)$. Jos tämän jälkeen tehdään s siirtoa $(x, y) \to (x - b, a)$ ja s siirtoa $(x, y) \to (x - b, -a)$, tullaan pisteeseen $(x + 2ra - 2sb, y) = (x + 2, y)$. Samoin voidaan konstruoida siirtosarjat pisteestä (x, y) pisteisiin $(x - 2, y)$, $(x, y + 2)$, $(x, y - 2)$. Origosta päästään siis kaikkiin pisteisiin, joiden molemmat koordinaatit ovat parillisia. Luvuista a, b tasan toinen on pariton; olkoon $a = 2k + 1$, $b = 2m$. Siirto $(x, y) \to (x + a, y + b) = (x + 1 + 2k, y + 2m)$, jota seuraa k siirtosarjaa $(x, y) \to (x - 2, y)$ ja m siirtosarjaa $(x, y) \to (x, y - 2)$, johtaa pisteeseen $(x + 1, y)$. Samalla tavalla päästään pisteestä (x, y) pisteisiin $(x - 1, y)$ ja $(x, y \pm 1)$. Näin ollen origosta pääsee kaikkiin pisteisiin.

P 1999.4. Todistettava epäyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{1}{1 + a_1} + \cdots + \frac{1}{1 + a_n} \leq \frac{n\left(\dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}\right)}{n + \dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}.$$

Tämä on edelleen yhtäpitävä epäyhtälön

$$\frac{1}{\dfrac{1}{a_1^{-1}} + 1} + \cdots + \frac{1}{\dfrac{1}{a_n^{-1}} + 1} \leq \frac{n}{\dfrac{1}{\dfrac{a_1^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}{n}} + 1} eqno(1)$$

kanssa. Tarkastellaan funktiota

$$f(x) = \frac{1}{\dfrac{1}{x} + 1} = \frac{x}{1 + x}.$$

Osoitetaan, että f on ylöspäin kupera eli että

$$tf(x) + (1 - t)f(y) < f(tx + (1 - t)y)$$

kaikilla $t \in (0, 1)$. Epäyhtälö

$$t\frac{x}{1 + x} + (1 - t)\frac{y}{1 + y} < \frac{tx + (1 - t)y}{1 + tx + (1 - t)y}$$

sievenee muotoon

$$t^2(x-y)^2 < t(x-y)^2,$$

koska $0 < t < 1$, jälkimmäinen epäyhtälö on tosi. [Toinen tapa:

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(x) = -\frac{2}{(1+x)^3} < 0.$$

Jos toinen derivaatta on negatiivinen, funktion kuvaaja on ylöspäin kupera.] Ylöspäin kuperalle funktiolle pätee

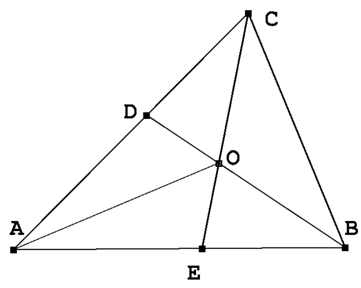
$$\frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)) \le f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right),$$

ja tässä yhtäsuuruus vain, jos $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Näin ollen (1) on tosi, ja yhtäsuuruus vallitsee, kun kaikki a_i:t ovat yhtä suuria.

P 2000.1. Olkoon x kolmen eri yhteenlaskettavan summien lukumäärä ja y kahden eri yhteenlaskettavan summien lukumäärä. Tarkastellaan riviä, jossa on 3999 numeroitua laatikkoa ja jokaisessa paritonnumeroisessa laatikossa on punainen pallo. Jokainen tapa sijoittaa kaksi sinistä palloa parillisnumeroisiin laatikkoihin tuottaa 2000:n jaon kolmeksi yhteenlaskettavaksi. Tapoja sijoittaa siniset pallot on $\binom{1999}{2} = 999 \cdot 1999$. Mutta on $3! = 6$ eri sijoittelua, jotka tuottavat saman 2000:n jaon kolmeksi eri yhteenlaskettavaksi ja $\frac{3!}{2} = 3$ eri jakoa, jotka tuottavat saman 2000 jaon, jossa eri suuria yhtyeenlaskettavia on kaksi. Koska 2000 ei ole jaollinen kolmella, kaikki sijoittelut antavat joko kolme tai kaksi eri suurta yhteenlaskettavaa. Siis $6x + 3y = 1999 \cdot 999$. Mutta $y = 999$, koska summassa kaksi kertaa esiintyvän yhteenlaskettavan arvo voi olla mikä hyvänsä luvuista $1, 2, \ldots 999$. Ratkaisemalla edellinen yhtälö saadaan $x = 998 \cdot 333$, joten $x + y = 1001 \cdot 333 = 333333$.

P 2000.2. Oletetaan, että P_n:llä on alkuaan m kolikkoa. Silloin P_{n-1}:llä on $m+1$ kolikkoa, ... ja P_1:llä $m+n-1$ kolikkoa. Joka siirrossa henkilö saa k kolikkoa ja antaa pois $k+1$ kolikkoa, joten hän menettää yhteensä yhden kolikon. Ensimmäisen kierroksen jälkeen, kun P_n on antanut n kolikkoa P_1:lle, P_n:llä on $m-1$ kolikkoa, P_{n-1}:llä m kolikkoa jne., kahden kierroksen jälkeen P_n:llä on $m-2$ kolikkoa, P_{n-1}:llä $m-1$ kolikkoa jne. Näin voidaan jatkaa m:n kierroksen ajan, jonka jälkeen P_n:llä ei ole rahaa, P_{n-1}:llä on yksi kolikko jne. Kierroksella $m+1$ jokainen, jolla on kolikoita, voi ottaa niitä vastaan ja antaa edelleen kuten aikaisemminkin. Rahaton P_n ei voi enää antaa pois kolikoita. Hän saa $n(m+1)-1$ kolikkoa P_{n-1}:ltä, muttei voi antaa $n(m+1)$:ää kolikkoa p_1:lle. P_{n-1}:llä ei ole kolikoita ja P_1:llä on $n-2$ kolikkoa. Ainoa naapuruspari, joista toisella voi olla 5 kertaa niin monta kolikkoa kuin toisella, on (P_1, P_n). Koska $n - 2 < n(m+1) - 1$, on oltava $5(n-2) = n(m+1) - 1$ eli $n(4-m) = 9$. Koska $n > 1$, on oltava $n = 3$, $m = 1$ tai $n = 9$, $m = 3$. Kokeilemalla nähdään, että molemmat vaihtoehdot ovat mahdollisia. Ensimmäisessä tapauksessa kolikoiden määrä on $3+2+1 = 6$, toisessa $11+10+\cdots+3 = 63$.

P 2000.3. Tarkastellaan kolmioita AOE ja AOD. Niissä on kaksi keskenään yhtä suurta sivuparia ja toista vastinsivuparia vastassa olevat kulmat ovat yhtä suuret. Tällöin joko AOE ja AOD ovat yhteneviä tai $\angle AEO = 180° - \angle ADO$. Edellisessä tapauksessa $\angle BEO = \angle CDO$, joten kolmiot EBO ja DCO ovat yhteneviä. Tällöin siis $AB = AC$. Jälkimmäisessä tapauksessa merkitään kolmion ABC kulmia 2α:lla, 2β:lla, ja 2γ:lla ja kulmaa AEO δ:lla. Kolmion kulman vieruskulmaa koskevan lauseen nojalla saadaan $\angle BOE = \angle DOC = \beta + \gamma$, $\delta = 2\beta + \gamma$ ja $180° - \delta = \beta + 2\gamma$. Kun nämä yhtälöt lasketaan puolittain yhteen, saadaan $3(\beta + \gamma) = 180°$ eli $\beta + \gamma = 60°$. Kun tämä yhdistetään yhtälöön $2(\alpha + \beta + \gamma) = 180°$, saadaan $2\alpha = 60°$.



P 2000.4. Merkitään $f\left(\frac{1}{3}\right) = a$ ja $f\left(\frac{2}{3}\right) = b$. Kun sovelletaan tehtävän epäyhtälöä arvoilla $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$ ja $z = 1$ sekä $x = 0$, $y = \frac{1}{3}$ ja $z = \frac{2}{3}$, saadaan

$$\frac{1}{2} \le \frac{1-b}{b-a} \le 2, \qquad \frac{1}{2} \le \frac{b-a}{a} \le 2$$

Jos olisi $a < 0$, olisi $b - a < 0$ ja siis $b < 0$. Lisäksi olisi $1 - b < 0$ eli $b > 1$. Samanlaiseen ristiriitaan johtaisi oletus $b - a < 0$. Siis $a > 0$ ja $b - a > 0$, joten

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}\right) \le a \le \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}\right)$$

eli $a \le 2b - 2a$, $b - a \le 2a$, $b - a \le 2 - 2b$ ja $1 - b \le 2b - 2a$. Näistä yhtälöistä 1. ja 3. antavat $3a \le 2b$ ja $3b \le 2 + a$, joista eliminoimalla b saadaan $3a \le \frac{4}{3} + \frac{2a}{3}$, $a \le \frac{4}{7}$. Yhtälöistä 4. ja 2. antavat vastaavasti $1 + 2a \le 3b$ ja $b \le 3a$, joista $1 \le 7a$, $\frac{1}{7} \le a$. [Rajoja voidaan parantaa – tarkat ala- ja ylärajat olisivat $\frac{4}{27}$ ja $\frac{76}{135}$.]

P 2001.1. Jaetaan taso ensin kahdeksi joukoksi sijoittamalla y-akselin suuntaiset neliövyöt vuorotellen kumpaankin joukkoon, valkoisiin V ja mustiin M Joukoista $A \cap V$ ja $A \cap M$ ainakin toinen sisältää ainakin puolet joukon A neliöistä. Olkoon tämä joukko A_1. Jaetaan ne neliövyöt, jotka sisältävät A_1:n kahdeksi joukoksi E ja F niin, että kumpaankin joukkoon tulee joka toinen vyön neliö. Kummassakaan joukossa olevilla neliöillä ei ole yhtään yhteistä pistettä muiden samaan joukkoon kuuluvien neliöiden kanssa. Nyt ainakin toisessa joukoista $E \cap A_1$, $F \cap A_1$ on ainakin puolet joukon A_1 neliöistä ja siten ainakin neljäsosa joukon A neliöistä. Tämä joukko kelpaa joukoksi B.

P 2001.2. Olkoon $g(6x) = f(x)$. Silloin g on rajoitettu ja $g(t+2) = f\left(\frac{t}{6} + \frac{1}{3}\right)$, $g(t+3) = f\left(\frac{t}{6} + \frac{1}{2}\right)$, $g(t+5) = f\left(\frac{t}{6} + \frac{5}{6}\right)$ ja $g(t+2) + g(t+3) = g(t) + g(t+5)$,

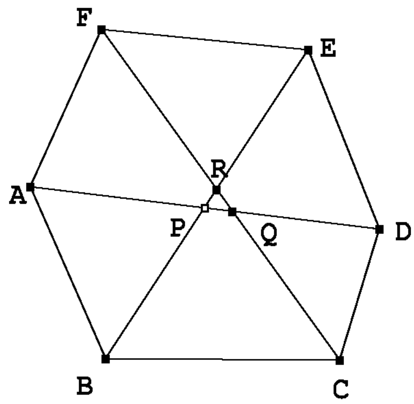
$g(t+5)-g(t+3)=g(t+2)-g(t)$ kaikilla reaaliluvuilla t. Mutta silloin $g(t+12)-g(6)=g(t+12)-g(t+10)+g(t+10)-g(t+8)+g(t+8)-g(t+6)=g(t+9)-g(t+7)+g(t+7)-g(t+5)+g(t+5)-g(t+3)=g(t+6)-g(t+4)+g(t+4)-g(t+2)+g(t+2)-g(t)=g(t+6)-g(t)$. Induktiolla nähdään, että $g(t+6n)-g(t)=n(g(t+6)-g(0))$. Ellei ole $g(t+6)-g(t)=0$ kaikilla reaaliluvuilla t, johdutaan ristiriitaan sen kanssa, että g on rajoitettu. Päätellään, että f on jaksollinen ja että ainakin eräs jakso on 1.

P 2001.3. Koska

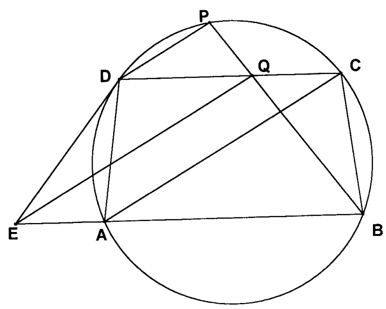
$$\begin{aligned} &x^8-x^7+2x^6-2x^5+3x^4-3x^3+4x^2-4x+\frac{5}{2}\\ &=x(x-1)(x^6+2x^4+3x^2+4)+\frac{5}{2}\end{aligned}$$

ja $x(x-1)\geq 0$, kun $x\leq 0$ ja $x\geq 1$, näillä x:n arvoilla yhtälöllä ei ole ratkaisuja. Jos $0<x<1$, niin $0>x(x-1)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\geq -\frac{1}{4}$ ja $x^6+2x^4+3x+4<1+2+3+4=10$. Lausekkeen arvo on nyt suurempi kuin $-\frac{1}{4}\cdot 10+\frac{5}{2}=0$, joten näilläkään x:n arvoilla yhtälöllä ei ole ratkaisua.

P 2001.4. Kuvion alaa merkitään $|\cdot|$. Leikatkoot AD ja BE pisteessä P, AD ja CF pisteessä Q ja BE ja CF pisteessä R. Oletetaan, että P, Q ja R ovat eri pisteitä. Ei merkitse rajoitusta, kun oletetaan, että P on B:n ja R:n ja Q C:n ja R:n välissä. Koska $|ABP|$ ja $|DEP|$ eroavat kumpikin $\frac{1}{2}|ABCDEF|$:sta määrällä $|BCDP|$, ABP:llä ja DEP:llä on sama ala. Koska $\angle APB=\angle DPE$, on $AP\cdot BP=DP\cdot EP=(DQ+QP)(ER+RP)$. Samoin $CQ\cdot DQ=(AP+PQ)(FR+RQ)$ ja $ER\cdot FR=(CQ+QR)(BP+PR)$. Kun edelliset kolme yhtälöä kerrotaan keskenään, saadaan $AB\cdot BP\cdot CQ\cdot DQ\cdot ER\cdot FR=DQ\cdot ER\cdot AP\cdot FR\cdot CQ\cdot BP+$ positiivisia termejä, jotka sisältävät PQ:n, QR:n ja PR:n. Tämä on ristiriita. Siis P:n, Q:n ja R:n on oltava yksi ja sama piste.



P 2002.1. Koska $AD<CD$, $\angle PDC=\angle DCA<\angle DAC$. Tästä seuraa, että kaari CP on pienempi kuin kaari CD, joten P on sillä kaarista CD, joka ei sisällä A:ta ja B:tä. Osoitetaan, että kolmiot ADE ja CBQ ovat yhtenevät. Ympyrän sisään piirrettynä puolisuunnikkaana $ABCD$ on tasakylkinen (koska $AB\|CD$, niin $\angle BAC=\angle DCA$, siis $BC=AD$). Koska $DP\|AC$, niin $\angle PDC=\angle CAB$. Mutta $\angle EDA=\angle CAB$ (yhtä suurta kaarta vastaavat kehäkulmat) ja $\angle PBC=\angle PDC$ (samasta syystä). Siis $\angle EDA=\angle QBC$. Koska $ABCD$ on jännenelikulmio,



on $\angle EAD = 180° - \angle DAB = \angle DCB$. Siis $\angle EAD = \angle QCB$. Kolmiot ADE ja CBQ ovat siis yhtenevät (ksk). Mutta silloin $EA = QC$. Koska lisäksi $EA \| QC$, niin $EACQ$ on suunnikas. Suunnikkaan vastakkaisina sivuina AC ja EQ ovat yhtä pitkät.

P 2002.2. Olkoon siinä maljassa, josta pallo siirretään, alkuaan n palloa ja olkoon niissä olevien lukujen summa a. Olkoon vastaavasti m toisen uurnan pallojen määrä ja b palloissa olevien lukujen summa. Jos q on siirrettävässä pallossa oleva luku, niin tehtävän ehdoista seuraa

$$\begin{cases} \dfrac{a-q}{n-1} = \dfrac{a}{n} + x, \\ \dfrac{b+q}{m+1} = \dfrac{b}{m} + x \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} a = nq + n(n-1)x \\ b = mq - m(m+1)x. \end{cases}$$

Koska $n + m = N$ ja $a + b = \dfrac{1}{2}N(N+1)$, saadaan

$$\frac{1}{2}N(N+1) = Nq + x(n^2 - m^2 - N) = Nq + xN(n - m - 1)$$

ja $q = \frac{1}{2}(N+1) - x(n-m-1)$, $b = \dfrac{1}{2}m(N+1) - xmn$. Nyt $b \ge 1+2+\cdots+m = \dfrac{1}{2}m(m+1)$. Siis $\dfrac{1}{2}(N+1) - xn = \dfrac{1}{2}(m+n+1) - xn \ge \dfrac{1}{2}(m+1)$ eli $\dfrac{n}{2} - xn \ge 0$. Siis $x \le \dfrac{1}{2}$. Yhtäsuuruus $x = \dfrac{1}{2}$ saavutetaan, kun ensimmäisessä maljassa ovat pallot numerot $m+1$, $m+2$, $\ldots$, N ja jälkimmäisessä pallot 1, 2, $\ldots$, m ja kun $q = m + 1$.

P 2002.3. Olkoon $P(x) = (x + b_1)(x + b_2)\cdots(x + b_n)$. Olkoon $P(a_1) = P(a_2) = \ldots = P(a_n) = d$. Silloin a_1, a_2, $\ldots$, a_n ovat n:nnen asteen polynomin $P(x) - d$ nollakohdat. Siis $P(x) - d = c(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)$. Koska $P(x)$:n ja $P(x) - d$:n n:nnen asteen termit ovat samat, on oltava $c = 1$. Nyt $P(-b_j) = 0$ kaikilla b_j. Siis kaikilla j on

$$-d = (-b_j - a_1)(-b_j - a_2)\cdots(-b_j - a_n) = (-1)^n(a_1 + b_j)(a_2 + b_j)\cdots(a_n + b_j),$$

mistä väite seuraakin.

P 2002.4. Kirjoitetaan tarkasteltavat luvut $n = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + \cdots + 10^8a_8$ muotoon

$$\begin{gathered} a_0 + (11-1)a_1 + (99+1)a_2 + (1001-1)a_3 + (9999+1)a_4 + (100001-1)a_5 \\ +(999999+1)a_6 + (10000001-1)a_7 + (99999999+1)a_8 \\ = (a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8) + 11k \\ = (a_0 + a_1 + \cdots + a_8) - 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7) + 11k = 44 + 1 + 11k - 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7). \end{gathered}$$

Luku n on jaollinen 11:llä silloin ja vain silloin, kun $2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7) - 1$ on jaollinen 11:llä. Olkoon $s = a_1 + a_3 + a_5 + a_7$. Silloin $1 + 2 + 3 + 4 = 10 \le s \le 6 + 7 + 8 + 9 = 30$

ja $19 \leq 2s - 1 \leq 59$. Ainoat 11:llä jaolliset parittomat luvut halutulta väliltä ovat 33 ja 55, joten $s = 17$ tai $s = 28$. Jos $s = 17$, joukon $A = \{a_1, a_3, a_5, a_7\}$ pienin alkio on 1 tai 2 $(3 + 4 + 5 + 6 = 18)$. Käymällä läpi eri mahdollisuudet nähdään, että eri joukkoja A on 9: $\{2, 4, 5, 6\}$, $\{2, 3, 5, 7\}$, $\{2, 3, 4, 8\}$, $\{1, 4, 5, 7\}$, $\{1, 3, 6, 7\}$, $\{1, 3, 5, 8\}$, $\{1, 3, 4, 9\}$, $\{1, 2, 6, 8\}$ ja $\{1, 2, 5, 9\}$. Kun $s = 28$, A:n suurimman alkion on oltava 9 $(5+6+7+8 = 26)$ ja toiseksi suurimman 8 $(5 + 6 + 7 + 9 = 27)$. Ainoat mahdollisuudet ovat $\{4, 7, 8, 9\}$ ja $\{5, 6, 8, 9\}$. Eri tapoja valita joukko A on $\binom{9}{4} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$ kappaletta. Näistä 11:llä jaolliseen lukuun johtavia on edellisen mukaan $9 + 2 = 11$. Todennäköisyys, että valittu luku olisi jaollinen 11:llä on siis $\dfrac{11}{126} < \dfrac{11}{121} = \dfrac{1}{11}$.

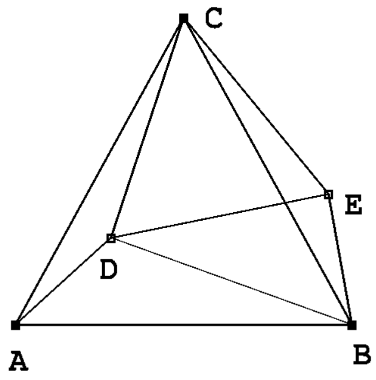
P 2003.1. Koska rivien tai sarakkeiden keskinäisen järjestyksen vaihto ei vaikuta rivien tai sarakkeiden kivilukumääriin eikä myöskään mustilla ruuduilla olevien kivien lukumääriin, voidaan rivit ja sarakkeet järjestää niin, että ruudukon vasemman yläkulman ja oikean alakulman 5×7-osasuorakulmiot ovat mustia ja muut kaksi samankokoista osasuorakulmiota valkoisia. Jos nyt mustilla ruuduilla olisi pariton määrä kiviä, jommassakummassa mustassa suorakaiteessa olisi pariton määrä kiviä ja toisessa parillinen. Koska kivien määrä on kaikkiaan parillinen, olisi toisessa valkeassa suorakaiteessa pariton ja toisessa parillinen määrä kiviä. Mutta nyt syntyisi joko viiden rivin tai seitsemän sarakkeen joukko, jossa olisi parillinen määrä kiviä. Tämä taas ei ole mahdollista, koska jokaisessa rivissä ja jokaisessa sarakkeessa on pariton määrä kiviä, joten parittomalla määrällä sarakkeita tai rivejä on pariton määrä kiviä.

P 2003.2. Tunnetun kaavan (jonka voi keksiä esim. toteamalla, että jos vasemmanpuoleinen lauseke on x:n polynomi, niin $x = -(y + z)$ on sen nollakohta) mukaan

$$
\begin{aligned}
x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\
&= (x + y + z)\frac{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}{2}.
\end{aligned}
$$

Tulon jälkimmäinen tekijä on ei-negatiivinen. Kokeilemalla nähdään, että 2003 on alkuluku. Tehtävän ratkaisuluvut toteuttavat siis joko ehdon $x + y + z = 1$ ja $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 4006$ tai $x + y + z = 2003$ ja $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 2$. Koska neliöluvut antavat kolmella jaettaessa jakojäännöksen 0 tai 1. edellisessä tapauksessa tasan kaksi neliöistä $(x - y)^2$, $(y - z)^2$ ja $(z - x)^2$ on kolmella jaollisia. Tämä on selvästi mahdotonta. On siis oltava $x + y + z = 2003$ ja $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 2$. Tämä onnistuu silloin ja vain silloin, kun neliöistä yksi on $= 0$ ja kaksi on $= 1$. Luvuista kahden on oltava samoja ja yhden erottava näistä yhdellä. Helposti nähdään, että luvuista kahden on oltava $= 668$ ja yhden $= 667$. Alkuperäiseen yhtälöön sijoittamalla nähdään, että tämä välttämätön ratkaisuehto on myös riittävä.

P 2003.3. Kierretään kuviota vastapäivään 60° pisteen C ympäri. Koska ABC on tasasivuinen, $\angle BAC = 60°$, joten A kuvautuu B:ksi. Olkoon D:n kuva E. Kierron ominaisuuksien takia $AD = BE$ ja $\angle BEC = 150°$. Koska kolmio DEC on tasasivuinen, $DE = DC$ ja $\angle DEC = 60°$. Mutta näin ollen $\angle DEB = 150° - 60° = 90°$. Tehtävän janojen pituiset janat ovat suorakulmaisen kolmion DBE sivut.



P 2003.4. Tehtävän yhtälöstä seuraa, kun $x \neq y$,

$$f(y) + f(x-y) = f(y(x-y)f(x)).$$

Koska $f(y) \neq 0$, ei voi olla $f(x-y) = f(y(x-y)f(x))$ eikä siis $x - y = y(x-y)f(x)$. Millään $x \neq y$ ei siis saa olla $yf(x) = 1$. Tästä seuraa, että on oltava $f(x) = \frac{1}{x}$. On helppo nähdä, että funktio f, $f(x) = \frac{1}{x}$, todella toteuttaa tehtävän ehdon.

P 2004.1. Olkoot pallojen lukumäärät punaisessa maljassa P, sinisessä S ja keltaisessa K. Keskiarvoehdosta seuraa, että $S \leq 5$ (palloja, joiden numero on < 3 on enintään kaksi, joten palloja, joiden numero on > 3, voi olla enintään 2). P, S ja K toteuttavat yhtälöt

$$P + S + K = 27$$
$$15P + 3S + 18K = \sum_{j=1}^{27} j = 14 \cdot 27 = 378.$$

Kun näistä eliminoidaan S, saadaan $4P + 5K = 99$. Kokeilemalla huomataan, että yhtälön toteuttavat positiiviset kokonaislukuparit ovat $(P, K) = (21, 3), (16, 7), (11, 11), (6, 15)$ ja $(1, 19)$. Kaksi viimeistä ei kuitenkaan toteuta ehtoa $S = 27 - (P + K) \leq 5$. On vielä tarkistyettava, että kolme ensimmäistä ovat mahdollisia. Tapauksessa $P = 21$, voidaan valita punaiseen maljaan pallot 5, 6, ..., 25, siniseen 2, 3 ja 4; tapauksessa $P = 16$ punaiseen 7, 8, ..., 14, 16, 17, ..., 23, siniseen 1, 2, 4 ja 5 seka tapauksessa $P = 11$ punaiseen 10, 11, ...20, siniseen 1, 2, 3, 4, 5. Punaisessa maljassa voi siis olla 21, 16 tai 11 palloa.

P 2004.2. Fibonaccin jono on muodostamisperiaatteensa mukaisesti jaksollinen modulo kokonaisluku, kaikilla kokonaisluvuilla. Joillakin kokonaisluvuilla jaksoon eivät kuulu kaikki mahdolliset jakojäännökset. Esimerkiksi modulo 11 jono on 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1, 0, 1, 1, ... Jonossa ei ole esimekrkiksi lukua 4. Näin ollen mikään luku, joka on muotoa $4 + 11k$ ei ole Fibonaccin luku; tässä onkin kysytynlainen aritmeettinen jono.

P 2004.3. Lasketaan ensimmäistä indeksiä modulo n, ts. $x_{1k} = x_{n+1,k}$. Olkoon $M_k = \max_j x_{jk}$ ja $m_k = \min_j x_{jk}$. Selvästi (M_k) on vähenevä ja (m_k) kasvava jono. Lisäksi $M_{k+1} = M_k$ vain, jos $x_{jk} = x_{j+1,k} = M_k$ jollain j:n arvolla. Jos tasan p peräkkäistä lukua $x_{jk} = M_k$, niin tasan $p-1$ peräkkäistä lukua $x_{j,k+1} = M_k = M_{k+1}$. Näin ollen äärellisen monen askelen jälkeen tullaan tilanteeseen $M_{k+1} < M_k$. Vastaavasti $m_{k+1} > m_k$ joillain k. Jos kaikkien jonojen kaikki luvut olisivat kokonaislukuja, myös kaikki m_k:t ja M_k:t olisivat kokonaislukuja. Äärellisen askelmäärän jälkeen $m_k = M_k$, ja kaikki luvut x_{jk} ovat samoja. Tällöin on oltava $x_{1,k-1} + x_{2,k-1} = x_{2,k-1} + x_{3,k-1} = \cdots = x_{n-1,k-1} + x_{n,k-1} = x_{n,k-1} + x_{1,k-1}$. Jos n on pariton, on $x_{1,k-1} = x_{3,k-1} = \cdots = x_{n,k-1}$ ja $x_{1,k-1} = x_{n-1,k-1} = \cdots = x_{2,k-1}$. Mutta samoin olisivat kaikki luvut $x_{j,k-2}$ samoja ja edelleen kaikki luvut $x_{j,1}$ samoja. Jos n on parillinen, kaikki $x_{i,k}$:t voivat olla kokonaislukuja: olkoon esimerkiksi $x_{1,1} = x_{3,1} = \cdots = x_{n-1,1} = 0$, $x_{2,1} = x_{4,1} = \cdots = x_{n,1} = 2$. Silloin jokainen $x_{j,k} = 1$, $k \geq 2$.

P 2004.4. *1. ratkaisu.* Tunnetun (Eulerin) lauseen nojalla kolmion sisään piirretyn ympyrän säde r ja ympäri piirretyn ympyrän säde R toteuttavat epäyhtälön $2r \leq R$ (Itse asiassa kolmion sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden keskipisteiden etäisyys d toteuttaa yhtälön $d^2 = R(R-2r)$). Kolmion ala A voidaan lausua toisaalta muodossa

$$A = \frac{r}{2}(a+b+c),$$

toisaalta sinilauseen avulla muodossa

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{4}\frac{abc}{R}.$$

Näin ollen

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{2A}{r} \cdot \frac{1}{4RA} = \frac{1}{2rR} \geq \frac{1}{R^2}.$$

2. ratkaisu. Olkoot $a \leq b \leq c$. Silloin $b = a + x$ ja $c = a + x + y$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Nyt $abc - (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = a(a+x)(a+x+y) - (a-y)(a+2x+y)(a+y) = ax^2 + axy + ay^2 + 2xy^2 + y^3 \geq 0$. Siis $abc(a+b+c) \geq (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = 16A^2$. Viimeinen yhtälö perustuu Heronin kaavaan. Kun tähän sijoitetaan $A = \dfrac{abc}{4R}$ (vrt. 1. ratkaisu), saadaan sievennyksen jälkeen

$$a + b + c \geq \frac{abc}{R^2},$$

josta väite seuraa.

P 2005.1. Olkoon

$$a = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k, \qquad 0 \leq a_k \leq 9, \text{ kun } 0 \leq k \leq n-1, \ 1 \leq a_n \leq 9.$$

Asetetaan

$$f(a) = \prod_{k=0}^{n} a_k.$$

Koska

$$f(a) = \frac{25}{8}a - 211 \geq 0,$$

niin $a \geq \frac{8}{25} \cdot 211 = \frac{1688}{25} > 66$. Koska $f(a)$ on kokonaisluku ja 8:n ja 25:n suurin yhteinen tekijä on 1, niin $8 \mid a$. Toisaalta

$$f(a) \leq 9^{n-1}a_n \leq 10^n a_n \leq a.$$

Siis

$$\frac{25}{8}a - 211 \leq a$$

eli $a \leq \frac{8}{17} \cdot 211 = \frac{1688}{17} < 100$. Ainoat 66:n ja 100:n välissä olevat 8:n monikerrat ovat 72, 80, 88 ja 96. Kokeillaan niitä: $25 \cdot 9 - 211 = 14 = 7 \cdot 2$, $25 \cdot 10 - 211 = 39 \neq 8 \cdot 0$, $25 \cdot 11 - 211 = 64 = 8 \cdot 8$, and $25 \cdot 12 - 211 = 89 \neq 9 \cdot 6$. 72 ja 88 ovat siis ainoat ratkaisut.

P 2005.2. *1. ratkaisu.* Käytetään raakaa voimaa. Kun yhtälön lausekkeet tehdään samannimisiksi, sulkeet poistetaan ja samanmuotoiset termit yhdistetään, epäyhtälö saadaan yhtäpitäväksi epäyhtälön

$$\begin{aligned}0 \leq 2a^4&+2b^4+2c^4+a^3b+a^3c+ab^3+b^3c+ac^3+bc^3-2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2-2abc^2-2ab^2c-2a^2bc\\ &= a^4+b^4-2a^2b^2+b^4+c^4-2b^2c^2+c^4+a^4-2a^2c^2\\ &\quad +ab(a^2+b^2-2c^2)+bc(b^2+c^2-2a^2)+ca(c^2+a^2-2b^2)\\ &= (a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\\ &\quad +ab(a-b)^2+bc(b-c)^2+ca(c-a)^2+ab(2ab-2c^2)+bc(2bc-2a^2)+ca(2ca-2b^2)\end{aligned}$$

kanssa. Oikean puolen kuusi ensimmäistä termiä ovat ei-negatiivisia ja viimeiset kolme voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned}&2a^2b^2-2abc^2+2b^2c^2-2a^2bc+2c^2a^2-2ab^2c\\ &= a^2(b^2+c^2-2bc)+b^2(a^2+c^2-2ac)+c^2(a^2+b^2-2ab)\\ &= a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Tehtävän epäyhtälö on siis tosi.

2. ratkaisu . Epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön

$$2\left(a^2(a+b)(a+c)+b^2(b+c)(b+a)+c^2(c+a)(c+b)\right) \geq (a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)$$

kanssa. Tämän epäyhtälön vasen puoli voidaan jakaa tekijöihin $2(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+abc)$. Koska $a+b+c$ on positiivinen, epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön

$$2(a^3+b^3+c^3+abc) \geq (a+b)(b+c)(c+a) \tag{1}$$

kanssa. Kun oikeasta puolesta poistetaan sulkeet ja vähennetään $2abc$, saadaan epäyhtälö

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a^2b + b^2c + c^2a) + (a^2c + b^2a + c^2b),$$

joka edelleen on alkuperäisen epäyhtälön kanssa yhtäpitävä. Mutta nyt voidaan kahdesti käyttää tunnettua epäyhtälöä

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x \quad \text{eli} \quad x^2(x-y) + y^2(y-z) + z^2(z-x) \geq 0, \qquad (2)$$

ja todistus on valmis. [Epäyhtälön (2) todistus: Voidaan olettaa, että $x \geq y$, $x \geq z$. Jos $y \geq z$, kirjoitetaan $z - x = z - y + y - z$, jolloin saadaan alkuperäisen kanssa yhtäpitävä ja tosi epäyhtälö $(y^2 - z^2)(y - z) + (x^2 - z^2)(x - y) \geq 0$. Jos $z \geq y$, kirjoitetaan puolestaan $x - y = x - z + z - y$, jolloin saadaan $(x^2 - z^2)(x - z) + (x^2 - y^2)(z - y) \geq 0$.]

3. ratkaisu. Epäyhtälö on symmetrinen a:n b:n ja c:n suhteen. Voidaan siis olettaa, että $a \geq b \geq c$. Siis

$$\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}.$$

Tšebuševin epäyhtälön perusteella on

$$\frac{2a^2}{b+c} + \frac{2b^2}{c+a} + \frac{2c^2}{a+b} \geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right). \qquad (1)$$

Käytetään sitten potenssikeskiarvoepäyhtälöä, jonka perusteella saadaan.

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2.$$

Siis

$$\frac{2a^2}{b+c} + \frac{2b^2}{c+a} + \frac{2c^2}{a+b} \geq \frac{2}{9}(a+b+c)^2\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right). \qquad (2)$$

On vielä osoitettava, että

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \geq 9. \qquad (3)$$

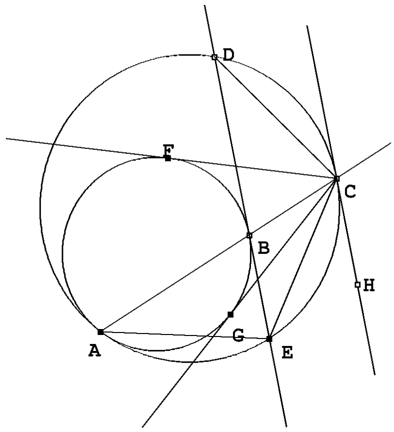
Mutta tämä seuraa harmonisen ja aritmeettisen keskiarvon välisestä epäyhtälöstä

$$\frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leq \frac{x+y+z}{3},$$

kun $x = a + b$, $y = b + c$, $z = c + a$.

P 2005.3. Olkoon tyttöjen lukumäärä t ja poikien p. Sanotaan, että tytön asema on *aika vahva myötäpäivään*, jos hänestä myötäpäivään laskettuna tyttöjen luku on aina suurempi kuin poikien luku. Tyttö, jonka vasemmalla puolella on poika, ei ole aika vahvassa asemassa. Toisaalta pari, joka koostuu tytöstä ja tätä heti seuraavasta pojasta ei vaikuta siihen, ovatko muut tytöt aika vahvassa asemassa. Voimme siis poistaa kaikki tällaiset parit. Jäljelle jää ainakin $t-p$ tyttöä, jotka kaikki ovat (myötäpäivään) aika vahvassa asemassa. Samanlainen lasku vastapäivään, osoittaa, että ainakin $t-p$ tyttöä on aika vahvassa asemassa vastapäivään. Koska tehtävän luvuin $t > 2p$ eli $2(t-p) > t$, ainakin yksi tyttö on aika vahvassa asemassa molempiin suuntiin. Tällainen tyttö on vahvassa asemassa.

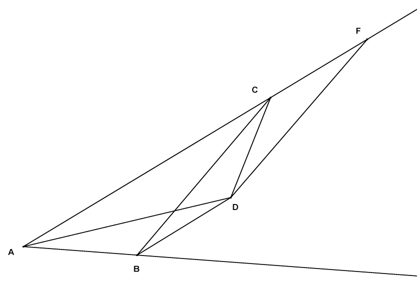
P 2005.4. Piirretään ympyrän $\mathcal{C}_2$ tangentti CH pisteeseen C. Tangentin ja jänteen välistä kulmaa koskevan lauseen nojalla kulmat ABH ja ACH ovat molemmat yhtä suuria kuin BA:n ja ympyröiden pisteeseen A piirretyn yhteisen tangentin välinen kulma. Kulmat ABH ja ACH ovat siis yhtä suuret, ja $CH \| BE$. Mutta tästä seuraa, että C on kaaren DE keskipiste. Tästä seuraa edelleen, että kulmat CEB ja BAE ovat yhtä suuret, ja $CE = CD$. Koska kolmioissa AEC ja CEB on myös yhteinen kulma ECB, ne ovat yhdenmuotoiset. Siis



$$\frac{CB}{CE} = \frac{CE}{AC},$$

ja $CB \cdot AC = CE^2 = CD^2$. Mutta pisteen potenssia ympyrän suhteen koskevan lauseen perusteella $CB \cdot CA = CG^2 = CF^2$. Olemme todistaneet, että $CD = CE = CF = CG$, joten pisteet D, E, F ja G ovat samalla C-keskisellä ympyrällä.

P 2006.1 Olkoot E ja F ne puolisuorien AB ja AC pisteet, joille $AE = AF = AB + AC$. Olkoon D janojen AE ja AF keskinormaalien leikkauspiste. On helppo havaita, esimerkiksi suorakulmaisista kolmioista, joiden hypotenuusa on AD ja toiset kateetit AD:n projektiot AB:llä ja AC:llä, että D on kulman BAC puolittajalla. Lisäksi $\angle ADF = 180^\circ - 2 \cdot \angle CAD = 180^\circ - \angle BAC$. Kolmio ADF on tasakylkinen, joten kolmioissa ABD ja DCF on



$\angle BAD = \angle DAC = \angle CFD$

ja $AD = DF$. Lisäksi $CF = AF - AC = AB$. Kolmiot ADB ja FDC ovat siis yhtenevät (sks). Siis $\angle BDA = \angle CDF$. Mutta tästä seuraa, että $\angle BDC = \angle ADF = 180^\circ - \angle BAC$. Näin ollen $ABDC$ on jännenelikulmio, ja väite on todistettu.

P 2006.2. Olkoon (x, y, z) yhtälöryhmän ratkaisu. Koska

$$x = k - \frac{1}{y} = \frac{ky-1}{y} \quad \text{ja} \quad z = \frac{1}{k-y},$$

on

$$\frac{1}{k-y}+\frac{y}{ky-1}=k,$$

mikä sievenee muotoon

$$(1-k^2)(y^2-ky+1)=0.$$

Siis joko $|k|=1$ tai

$$k=y+\frac{1}{y}.$$

Jälkimmäinen vaihtoehto sijoitettuna alkuperäisiin yhtälöihin antaa heti $x=y$ ja $z=y$. Ainoa mahdollisuus on $k=\pm 1$. Jos $k=1$, esimerkiksi $x=2$, $y=-1$ ja $z=\frac{1}{2}$ on ryhmän ratkaisu, jos $k=-1$, kelpaavat äskeisten vastaluvut. Ainoat mahdolliset k:n arvot ovat siis 1 ja -1.

P 2006.3. Tarkastellaan lauseketta x^5+487 modulo 4. Selvästi $x\equiv 0 \Rightarrow x^5+487\equiv 3$, $x\equiv 1\Rightarrow x^5+487\equiv 0$; $x\equiv 2\Rightarrow x^5+487\equiv 3$ ja $x\equiv 3\Rightarrow x^5+487\equiv 2$. Tunnetusti neliöluuvt ovat $\equiv 0$ tai $\equiv 1 \mod 4$. Jos tutkittavassa jonossa on parillinen neliöluku, kaikki loput jonon luvut ovat joko $\equiv 2$ tai $\equiv 3 \mod 4$, eivätkä siis neliölukuja. Jos jonossa on pariton neliöluku, sitä seuraava jonon luku voi olla parillinen neliöluku, mutta kaikki loput jonon luvut ovat ei-neliölukuja. Jonossa voi siis olla enintään kaksi neliölukua. Tällöin ensimmäinen neliöluku on samalla jonon ensimmäinen luku, sillä mikään jonossa toista lukua seuraava luku ei toteuta ehtoa $x\equiv 1 \mod 4$. Etsitään sellaiset luvut k^2, että $k^{10}+487=n^2$. Koska 487 on alkuluku, on oltava $n-k^5=1$ ja $n+k^5=487$ eli $n=244$ ja $k=3$. Tehtävän ainoa ratkaisu on siis $m=3^2=9$.

P 2006.4. Olkoon R_i i:nnen vaakarivin ruutujen väritykseen käytettyjen värien määrä ja C_j j:nnen pystyrivin ruutujen väritykseen käytettyjen värien määrä. Olkoon r_k niiden vaakarivien määrä, joilla esiintyy väri k ja olkoon c_k niiden pystyrivien määrä, joilla esiintyy väri k. Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön perusteella $r_k+c_k\geq 2\sqrt{r_kc_k}$. Koska väri k esiintyy enintään c_k kertaa jokaisella niistä r_k:sta pystyrivistä, joilla se esiintyy, niin c_kr_k on $\geq$ kuin värin k esiintymien kokonaismäärä, joka on 100. Siis $r_k+c_k\geq 20$. Summassa $\sum_{i=1}^{100}R_i$ jokainen väri k antaa kontribuution r_k kertaa ja summassa $\sum_{j=1}^{100}C_j$ jokainen väri k antaa kontribuution c_k kertaa. Näin ollen

$$\sum_{i=1}^{100}R_i+\sum_{j=1}^{100}C_j=\sum_{k=1}^{100}r_k+\sum_{k=1}^{100}c_k=\sum_{k=1}^{100}(r_k+c_k)\geq 2000.$$

Mutta jos 200 positiivisen kokonaisluvun summa on ainakin 2000, niin ainakin yksi yhteenlaskettava on ainakin 10. Väite on todistettu.

P 2007.1.

Ratkaisu. Yhtälö on sama kuin

$$x(x-2)=223\cdot(3y)^2.$$

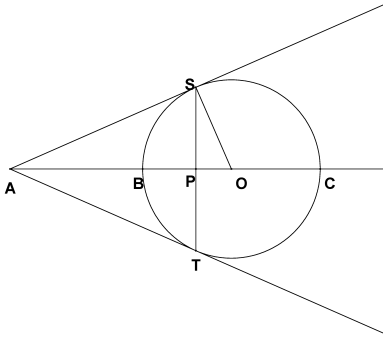
Kokeilemalla todetaan, että 223 on alkuluku. Jotta yhtälöllä olisi kokonaislukuratkaisu, on joko luvun x tai luvun $x-2$ tekijänä oltava 223. Kokeillaan $x-2=223$. Silloin $x=225=15^2$ ja $x(x-2)=223\cdot(3\cdot 5)^2$. Saadaan siis ratkaisu $(x,\,y)=(5,\,225)$.

P 2007.2. Valitaan mielivaltainen kolmion sisäpiste P. Piirretään P:n kautta annetun suoran suuntainen suora ja annettua suoraa vastaan kohtisuora suora. Ne leikkaavat kolmion sivut pisteissä A, B, C ja D. Koska nämä neljä pistettä kukin kuuluvat johonkin tehtävän kolmesta suorakaiteesta, ainakin yksi suorakaiteista, erimerkiksi R, sisältää pisteistä kaksi, esimerkiksi pisteet A ja B. Jos A, B ja P ovat samalla suoralla, jana AB kuuluu kokonaan suorakaiteeseen R ja siten myös piste P kuuluu R:ään. Jos $\angle APB$ on suora kulma, niin murtoviiva APB, jonka sivut ovat R:n sivujen suuntaisia, kuuluu kokonaan suorakaiteeseen R. Siis P kuuluu R:ään.

P 2007.3. Anne voi ensimmäiseksi siirrokseen korvata 10^{2007} luvuilla 2^{2007} ja 5^{2007}. Induktiolla nähdään, että Anne voi pelata niin, että hänen siirtonsa jälkeen taululla ovat luvut 2^{α_1}, 2^{α_2}, $\ldots$, 2^{α_k} ja 5^{α_1}, 5^{α_2}, $\ldots$, 5^{α_k}. Ensimmäisen siirron jälkeen näin on. Jos asetelma on tällainen, Berit voi poistaa luvun p^{α_j} tai kirjoittaa luvun p^{α_j} paikalle luvut $p^{\alpha'_j}$ ja $p^{\alpha_j-\alpha'_j}$. Silloin Anne voi aina tehdä joko siirron, jossa $(7-p)^{\alpha_j}$ poistetaan tai $(7-p)^{\alpha_j}$ korvataan luvuilla $(7-p)^{\alpha'_j}$ ja $(7-p)^{\alpha_j-\alpha'_j}$. Annen siirron jälkeen tilanne on jälleen samanlainen kuin ennen Beritin ja Annen siirtoja. Anne ei siis voi hävitä. Että Anne myös varmasti voittaa, nähdään siitä, että jokainen luvun poisto pienentää taululla olevien lukujen summaa, ja koska $(a-1)(b-1) = ab-(a+b)+1$, niin $ab > a+b$ paitsi jos $a = b = 2$. Jokaisessa Annen ja Beritin siirtoparissa taululla olevien lukujen summa pienenee, joten, peli ei voi jatkua mielivaltaisen pitkään. Annella on siis voittostrategia.

P 2007.4. Osoitetaan, että pisteen P sijainti ei riipu tehtävässä olevan ympyrän valinnasta. Olkoot siis Γ_1 ja Γ_2 pisteiden B ja C kautta kulkevia ympyröitä ja olkoot S_i ja T_i pisteestä A ympyröille Γ_1 ja Γ_2 piirrettyjen tangenttien sivuamispisteet sekä P_1 ja P_2 pisteet, jossa janat S_1T_1 ja S_2T_2 leikkaavat suoran ABC. Lasketaan pisteen A potenssi ympyröiden Γ_1 ja Γ_2 suhteen. Se on kummankin ympyrän suhteen $AB\cdot AD$, mutta myös AS_1^2, AT_1^2 ja AS_2^2 sekä AT_2^2. Mutta tämä merkitsee, että $AS_1 = AT_1 = AS_2 = AT_2$, joten S_1, T_1, S_2 ja T_2 ovat samalla A-keskisellä ympyrällä Γ. Olkoon Q suorien S_1T_1 ja S_2T_2 leikkauspiste. Pisteen Q potenssi ympyrän Γ suhteen on $QS_1\cdot QT_1 = QS_2\cdot QT_2$. Mutta tämä merkitsee, että Q:lla on sama potenssi ympyröiden Γ_1 ja Γ_2 suhteen. Nyt niiden pisteiden joukko, joilla on sama potenssi kahden toisensa leikkaavan ympyrän suhteen on ympyröiden leikkauspisteiden kautta kulkeva suora [sitä kutsutaan ympyröiden *radikaaliakseliksi*; on triviaalia, että suoran pisteillä on tämä ominaisuus, ja jos suoran ulkopuolisen pisteen kautta piirretään ympyröiden toisen leikkauspisteen kautta kulkeva suora, nähdään, että piteellä ei ole sama potenssi molempien ympyröiden suhteen]. Tästä seuraa, että Q on suoralla AB joten $P_1 = P_2 = Q$.

Edellä sanotusta seuraa, että riittää, kun tehtävä ratkaistaan tapauksessa, jossa AB on ympyrän halkaisija. Olkoon ympyrän keskipiste O, säde r ja olkoon $AO = a$ ja $PO = b$. Yhdenmuotoisista suorakulmaisista kolmioista AOS ja OSP saadaan



$$\frac{r}{a} = \frac{b}{r}$$

eli $ab = r^2$.

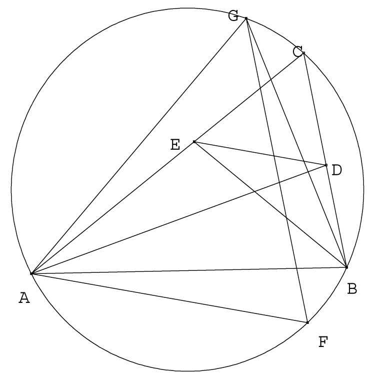
Nyt

$$\frac{AP}{PC} = \frac{a-b}{b+r} = \frac{a^2-ab}{ab+ar} = \frac{a^2-r^2}{r^2+ar} = \frac{a-r}{r} = \frac{AB}{\frac{BC}{2}} = 2\frac{AB}{BC}.$$

P 2008.1. Olkoot f, A, B ja C tehtävän mukaisia. Olkoon z jokin reaaliluku. Asetetaan $x = z - f(0)$ ja $y = 0$. Silloin $f(z) = f(z - f(0) + f(0)) = A(z - f(0)) + B \cdot 0 + C = Az - Af(0) + C$. On siis olemassa luvut a ja b niin, että $f(z) = az+b$ kaikilla reaaliluvuilla z. Täten $Ax+By+C = f(x+f(y)) = a(x+f(y))+b = ax+a(ay+b)+b = ax+a^2y+(a+1)b$. Mahdollisia kolmikkoja $(a,\ B,\ C)$ ocat siis kolmikot $(a,\ a^2,\ c)$, missä c on mielivaltainen ja $a \neq -1$ on mielivaltainen, sekä $(-1,\ 1,\ 0)$.

P 2008.2. Osoitetaan induktiolla, että dominoivia pareja on vähintään $n-3$ kappaletta. Jos $n = 3$, jokaiset kaksi henkilöä istuvat vierekkäin, joten dominoivien parien määrä on $0 = 3 - 3$. Oletetaan, että kun henkilöitä on n, dominoivia pareja on ainakin $n-3$. Olkoon pöydän ääressä $n+1$ henkilöä. Jos aakkosissa viimeinen istujista, sanokaamme Z, poistuu, Z:n kahta puolta istuneet henkilöt, jotka muodostivat dominoivan parin, eivät enää ole dominoiva pari. Jokainen muu dominoiva pari on edelleen dominoiva, sillä tällaisen parin dominoivuus on perustunut siihen, että heidän välissään on muitakin aakkosissa myöhempiä kuin Z. Koska n:n istujan joukossa oli ainakin $n-3$ dominoivaa parin, on $n+1$:n istujan joukossa ainakin $n-3+1 = (n+1)-3$ dominoivaa paria. – Toisaalta, koska sama prosessi, aakkosissa viimeisen poistuminen joukosta, vähentää dominoivia pareja tasan yhdellä ja 3:n joukossa ei ole dominoivia paareja, on dominoivien parien määrän oltava tasan $n-3$, eli $n-3$ on todella dominoivien parien pienin mahdollinen määrä.

P 2008.3. Koska $FG \| BC$, $\angle FGB = \angle GBC$; kehäkulmalauseesta seuraa nyt, että $\angle GAC = \angle BAF$ ja siis $\angle GAB = \angle CAF = \angle CED$, (koska $ED \| AF$). Lisäksi kehäkulmalauseen nojalla $\angle AGB = \angle ACB$. Siis kolmiot ABG ja EDC ovat yhdenmuotoiset. Koska AD on kulman CAB puolittaja,



$$DC = \frac{AC}{AC + AB} \cdot BC.$$

koska BE on kulman ABC puolittaja,

$$EC = \frac{BC}{AB + BC} \cdot AC.$$

Mutta väite seuraa nyt edellä todistetusta kolmioiden yhdenmuotoisuudesta:

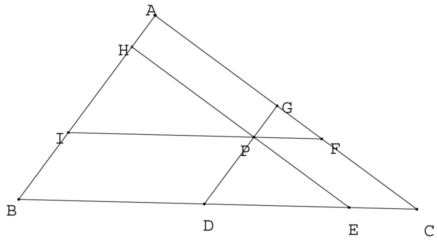
$$\frac{AG}{BG} = \frac{EC}{DC} = \frac{AC + AB}{AB + BC}.$$

– Tämä kuvion perusteella ilmeinen todistus on kuitenkin sikäli puutteellinen, että se olettaa, että $\angle AGB = \angle ACB$, mikä taas edellyttää, että G ja C ovat samalla puolella suoraa AB. On siis todistettava, etä näin todella on. Oletetaan ensin, että $BC = a < b = AC$. Merkitään $\angle BAF = x$. Jos $x < \gamma = \angle BCA$, niin F on kaarella AC eri puolella suoraa AB kuin C; tällöin G tulee olemaan samalla puolen suoraa AB kuin C. Merkitään vielä $AB = c$, $\angle CAB = \alpha$ ja $\angle ABC = \beta$. Kolmiosta EDC saadaan sinilauseen nojalla

$$\frac{\sin(\angle CED)}{\sin(\angle EDC)} = \frac{\sin(\alpha + x)}{\sin(\beta - x)} = \frac{DC}{EC} = \frac{a + c}{b + c} < 1.$$

Koska kaavassa esiintyvä x:n funktio on kasvava, x on pienempi kuin yhtälön $\sin(\alpha + x) = \sin(\beta - x)$ ratkaisu $\frac{1}{2}(\beta - \alpha)$. On helppo nähdä, että $\frac{1}{2}(\beta - \alpha) < \gamma$. Jos $b \le a$, on torjuttava pisteen F joutuminen sille karista AC, joka on eri puolella suoraa AC kuin B; tätä varten riittää osoittaa, että $\angle FAB < \alpha$. Todistus voidaan suorittaa samalla tekniikalla kuin tapauksessa $a < b$.

P 2008.4. Oletamme, että $(m+1)^3 - m^3 = n^2$. Silloin n on pariton ja $4(3m^2 + 3m + 1) = (2n)^2$ ja $3((2m)^2 + 2 \cdot 2m + 1) = (2n)^2 - 1$ eli $3(2m+1)^2 = (2n-1)(2n+1)$. Jos parittomilla luvuilla $2n - 1$ ja $2n + 1$ olisi yhteinen tekijä, se olisi lukujen erotuksen 2 tekijä ja siis 2. Yhteisiä tekijöitä ei ole, joten toinen luvuista on parittoman luvun neliö ja toinen jaettuna 3:lla on neliö. Jos olisi $2n + 1 = (2t + 1)^2$, olisi $2n = 4t^2 + 4t$, ja n olisi parillinen. Siis on oltabva $2n - 1 = (2t + 1)^2$ eli $n = 2t^2 + 2t + 1 = t^2 + (t + 1)^2$.



P 2009.1. Olkoon kolmio ABC ja leikatkoot P:n kautta piirretyt suorat kolmion sivut pisteissä D ja E, F ja G sekä H ja I. Kolmiot ABC, DEP, PFG ja IPH ovat kaikki yhdenmuotoisia ja $BD = IP$, $EC = PF$. Jos $BC = a$, $IP = a_1$, $DE = a_2$ ja $PF = a_3$, niin $a_1 + a_2 + a_3 = a$. Koska yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on vastinsivujen suhteen neliö, niin kolmioiden alat ovat ka^2, ka_1^2, ka_2^2 ja ka_3^2, missä k on kolmioiden muodosta riippuva verrannollisuuskerroin. Mutta näin ollen

$$f = \frac{ka_1^2 + ka_2^2 + ka_3^2}{ka^2} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{(a_1 + a_2 + a_3)^2}.$$

On tunnettua, että aritmeettinen keskiarvo on pienempi tai yhtä suuri kuin kuin neliöllinen keskiarvo eli

$$\frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{9} \le \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3},$$

ja keskiarvot ovat samat jos ja vain jos $a_1 = a_2 = a_3$ [Jos halutaan, todistus: $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \ge 0 \Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \ge 2ab + 2bc + 2ca \Rightarrow 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \ge a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2$; ensimmäisessä epäyhtälössä ja kaikissa seuraavissakin on yhtäsuuruus, jos ja vain jos $a = b = c$.] Mutta tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $f \ge \dfrac{1}{3}$.

Yhtäsuuruustilanteessa on siis $a_1 = a_2 = a_3$. Kolme pikkukolmiota ovat yhteneviä. Silloin myös $CF = FG = GA$ ja $AH = HI = IB$. Koska kolmiot AIF ja ABC ovat yhdenmuotoisia ja P on IF:n keskipiste, AP:n jatke puolittaa sivun BC. P on siis kolmion ABC A:sta piirretyn keskijanan piste. Mutta aivan samoin se on B:stä ja C:stä piirrettyjen keskijanojen piste. Se on siis ABC:n keskijanojen leikkauspiste.

P 2009.2. Olkoon vasemman puolen ensimmäinen tekijä $P(x)$, tonen tekijä $Q(x)$ ja oikea puoli $R(x)$. Todetaan, että $P(0) = P(-1) = a$ ja $R(0) = -90$ ja $R(-1) = -180-4 = -184$. Nyt $90 = 2\cdot 3^2\cdot 5$ ja $184 = 2^3\cdot 23$. Koska a on sekä luvun 90 että luvun 184 tekijä, on oltava $a = \pm 1$ tai $a = \pm 2$. Jos olisi $a = 1$, olisi $P(1) = 3$. Toisaalta $R(1) = 4 - 180 = -176$. $R(1)$:n numeroiden summa on 14, joten $R(1)$ ei ole jaollinen 3:lla. Siis $a \ne 1$. Jos $a = -2$, niin $P(1) = 0$, mutta $R(1) = -176$. Siis $a \ne -2$. On helppo huomata, että $R(x) = (x^4 + 1)(x^{13} + x - 90)$. Jos $a = -1$, niin $P(2) = 5$, mutta $2^4 + 1 = 17$ ja $2^{13} + 2 - 90 = 8\cdot 1024 + 2 - 90$, mistä helposti näkee, että luku ei ole jaollinen viidellä. Koska siis $R(2)$ ei ole jaollinen viidellä, $a \ne 1$. Ainoaksi mahdollisuudeksi jää, että $a = 2$. [Voidaan osoittaa, että $Q(x) = (x^4+1)(x^{11} - x^{10} - x^9 + 3x^8 - x^7 - 5x^6 + 7x^5 + 3x^4 - 17x^3 + 11x^2 + 23x - 45$.]

P 2009.3. Kuvatunlainen lukujen muuttaminen joko vähentää taululla olevien parittomien lukujen määrää tai pitää sen ennallaan (jos a ja b ovat parittomia, niin $a + b$ on parillinen ja ab pariton; jos a on pariton ja b parillinen, $a + b$ on pariton ja ab parillinen, ja jos a ja b ovat molemmat parillisia, niin myös ab ja $a + b$ ovat). Lisäksi operaatio kasvattaa lukuja tai pitää toisen ennallaan (jos toinen luvuista a, b on 1). Jotta taululle saataisiin kolme lukua 2009, ei missään vaiheessa voida operoida kahdella parittomalla luvulla.

Oletetaan, että vaadittu tilanne olisi saavutettavissa. Ensimmäiseksi taululle kirjoitetun luvun 2009 on silloin oltava $a + b$. Tällöin joko $ab > 2009$ tai $ab = 2008$. Jälkimmäisessä tapauksessa luku 1 on pyyhitty pois, ja lukua 2008 ei siten voi käyttää uuden luvun 2009 synnyttämiseen. Kummassakin tapauksessa taululla on enää kolme sellaista lukua, joista voi muodostaa uuden luvun 2009. Olkoon nyt c ja d sellaiset kaksi näistä, että $c+d = 2009$. Jälleen joko $cd > 2009$ tai $cd = 2008$, ja ykkönen pyyhkiytyy pois, eikä cd ole enää käytettävissä. Koska lukuja on viisi, ja neljä niistä on sellaisia, että niistä ei halutulla tavalla voi muodostaa lukua 2009, kolmatta lukua 2009 ei voi muodostaa. Haluttuun tilanteeseen ei siis päästä.

P 2009.4 Kultamitalisti selviää viidellä ottelukierroksella. Ensimmäisellä kierroksella on 16 ottelua, näiden voittajien kesken 8, sitten 4, 2 ja 1 eli yhteensä 31 ottelua. Nyt toiseksi paras on jollain kierroksella hävinnyt voittajalle. Olkoot V_1, V_2, $\ldots$, V_5 voittajan vastustajat eri kierroksilla. Jos nyt V_1 ja V_2 ottelevat, voittaja ottelee V_3:n kanssa jne., niin neljän ottelun perusteella on saatu selville hopeamitalisti. Pronssimitalistin on ollut hävittävä vain voittajalle tai hopeamitalistille (ei hän muuten olisi kolmanneksi paras. Jos hopeamitalisti on V_k, niin tämä on voittanut $k - 1$ kertaa ennen kuin on kohdannut voittajan kierroksella k. V_k on lisäksi voittanut hopeamitaliotteluissa $5 - k$ vastustajaa $V_{k+1}, \ldots, V_5$ ja jos $k > 1$ yhden vastustajan V_j, $j < k$. Kolmanneksi parhaan tilalle on siis tarjolla $k - 1 + 5 - k = 4$ tai $4 + 1 = 5$ ehdokasta. Jälleen enintään neljä ottelua tarvitaan näistä parhaan selvittämiseksi. Otteluita tarvitaan siis enintään $31 + 4 + 4 = 39$.