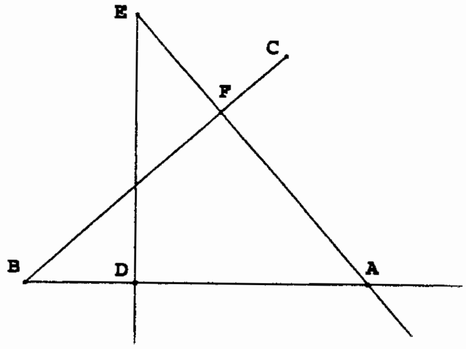
Euklidisen tasogeometrian lauseiden todistushahmotelmia

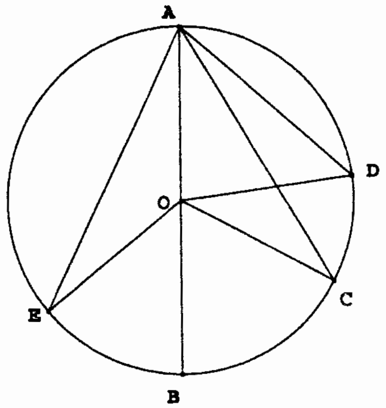
Periaatteessa tunnetuksi oletettua tietoutta: kolmioiden kulmien perusominaisuudet, yhtenevyyden ja yhdenmuotoisuuden kriteerit, tasakylkisten kolmioiden perusominaisuudet, suorakulmaisten kolmioiden perusominaisuudet ja trigonometriset funktiot. – Kolmion ABC sivujen pituudet ovat $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, kulmat $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$.

1. *Kulmat, joiden vastinkyljet ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, ovat yhtä suuret: jos $\angle ABC$ ja $\angle DEF$ ovat joko molemmat teräviä tai molemmat tylppiä ja jos $AB \perp DE$ ja $BC \perp EF$, niin $\angle ABC = \angle DEF$.*



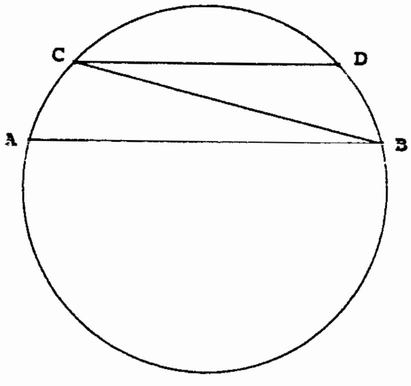
(Terävien kulmien tapaus.) Voidaan olettaa, että A on suoralla EF, D suoralla AB ja F suoralla BC. Suorakulmaisista kolmioista AED ja ABF saadaan $\angle ABC = 90° - \angle BAF = 90° - (90° - \angle DEF) = \angle DEF$. Tylppien kulmien tapaus palautuu tähän, koska kulmien terävät vieruskulmat toteuttavat lauseen ehdot.

2. *Ympyrässä samaa jännettä vastaavat kehäkulmat (mukaan lukien kulma, jonka toinen kylki on jänne ja toinen ympyrän tangentti) ovat yhtä suuret ja puolet vastaavasta keskuskulmasta.*



Riittää, kun todistetaan, että kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta. Jos AB on ympyrän halkaisija, AC jänne ja O ympyrän keskipiste, niin kolmio OCA on tasakylkinen, joten $\angle OAC = \angle OCA$. Toisaalta $\angle BOC = \angle OAC + \angle OCA = 2\angle OAC$. Olkoon nyt AD toinen jänne, niin että AC ja AD ovat samalla puolen AB:tä ja $\angle BAD > \angle BAC$. Edellisen perusteella $\angle COD = \angle BOD - \angle BOC = 2\angle BAD - 2\angle BAC = 2\angle DAC$. Jos taas AE on jänne, joka on eri puolella AB:tä kuin AC, on $\angle EOC = \angle EOB + \angle BOC = 2\angle EAB + \angle BAC = 2\angle EAC$.

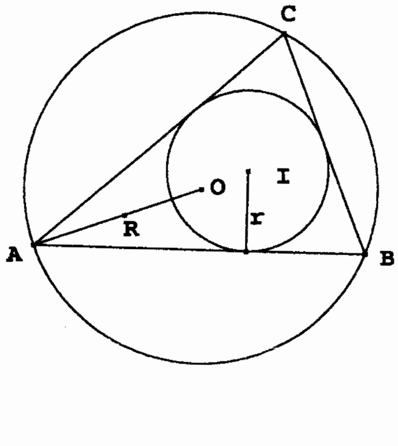
3. *Kaksi yhdensuuntaista jännettä erottaa ympyrän kehästä yhtä suuret kaaret.*



Olkoot yhdensuuntaiset jänteet AB ja CD, sijaitkoot B ja C A:n ja D:n välisillä kaarilla. Koska $AB \| CD$, $\angle ABC = \angle BCD$. Samaa kehäkulmaa vastaavina kaarina AC ja BD ovat yhtä suuret.

4. *Jokaisen kolmion ympäri voidaan piirtää ympyrä: sen keskipiste on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspiste O; jokaisen kolmion sisään voidaan piirtää ympyrä: sen keskipiste on kolmion kulmien puolittajien leikkauspiste I. (Ympäri piirretyn ympyrän säde R, sisään piirretyn r.)*

Janan keskinormaalin jokainen piste on yhtä etäällä janan päätepisteistä; kahden sivun keskinormaalinen leikkauspiste O on näin ollen yhtä etäällä jokaisesta kolmion kärjestä, ja kelpaa kolmion ympäri piirretyn ympyräm keskipisteeksi. Jos kulman puolittajan pisteestä P piirretään kohtisuorat kulman kyljille, saadaan yhtenevät suorakulmaiset kolmiot; piste on siis yhtä etäällä molemmista kyljistä ja P keskipisteenä voidaan piirtää ympyrä, joka sivuaa kulman kylkiä. Kolmion kahden kulmanpuolittajan leikkauspiste I on yhtä etäällä kaikista kolmesta sivusta, joten se kelpaa kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipisteeksi.



sivusta, joten se kelpaa kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipisteeksi.

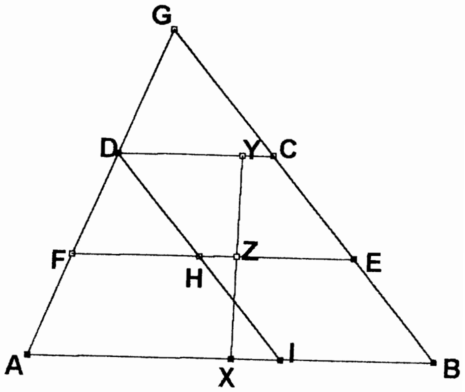
5. *Puolisuunnikkaan $ABCD$ ei-yhdensuuntaisten sivujen BC ja AD keskipisteet yhdistävällä janalla EF on seuraavat ominaisuudet:*

(a) $EF \parallel AB$;

(b) $|EF| = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)$;

(c) EF puolittaa jokaisen janan, jonka toinen päätepiste on AB:llä ja toinen CD:llä.

Koska kolmio ABC on puolisuunnikkaan $ABCD$ surkastuma, ominaisuudet (a), (b) ja (c) koskevat myös kolmion sivujen keskipisteiden yhdysjanaa.



(a) Voimme olettaa, että $|CD| < |AB|$, silloin AD ja BC leikkaavat pisteessä G. Merkitään $AD = 2x$, $DG = z$, $GC = t$, $CB = 2y$. Kolmioiden ABG ja DCG yhdenmuotoisuudesta (samat kulmat) seuraa, että

$$\frac{z+2x}{z} = \frac{t+2y}{t},$$

josta $xt = yz$, $zt + xt = yz + tz$ ja

$$\frac{z+x}{z} = \frac{t+y}{t}.$$

Mutta viimeinen verranto kertoo, että kolmiot FEG ja DCG ovat yhdenmuotoiset (sks). Siis $EF \parallel DC \parallel AB$.

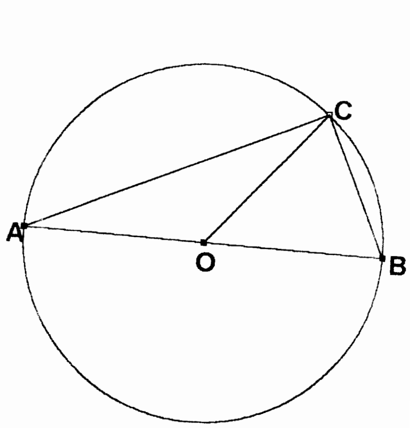
(b) D:n kautta piirretty CB:n suuntainen suora leikkaa FE:n pisteessä H ja AB:n pisteessä I. (a):n perusteella $HECD$ ja $IBCD$ ovat suunnikkaita, joten $HE = IB = CD$. Yhdenmuotoisista kolmioista AID ja FHD saadaan

$$2 = \frac{AI}{FH} = \frac{AB - DC}{EF - DC},$$

josta (b)-kohdan kaava seuraa.

(c) Seuraa (a):sta: oletuksen mukainen jana XY voidaan siirtää niin, että $AXYD$ on puolisuunnikas; XY:n keskipisteen Z ja pisteen F kautta kulkeva suora on AX:n suuntainen ja kulkee F:n kautta. Sen on näin ollen yhdyttävä suoraan EF.

6. *Suorakulmaisen kolmion hypotenuusaa vastaan piirretty keskijana on puolet hypotenuusasta; jos kolmiossa jokin keskijana on puolet vastaisesta sivusta, niin kolmio on suorakulmainen.*

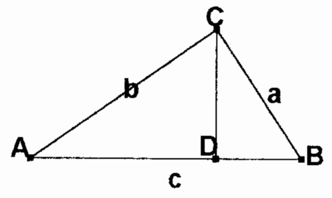


Suorakulmaisen kolmion ABC hypotenuusa AB on sen ympäri piirretyn ympyrän halkaisija. Ympyrän keskipiste O on siis halkaisijan keskipiste. Ympyrän säteenä keskijana OC on $= AO = OB$. Jos kääntäen kolmiossa ABC keskijana CC' on puolet sivusta AB, on C' yhtä etäällä kaikista kolmion kärjistä ja siis kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. AB on tämän ympäri piirretyn ympyrän halkaisija, joten $\angle ACB = 90°$.

7. *Jos kolmio ABC on suorakulmainen, niin*

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1}$$

Jos kolmion sivuille on voimassa (1), niin kolmio on suorakulmainen. (Pythagoras.)



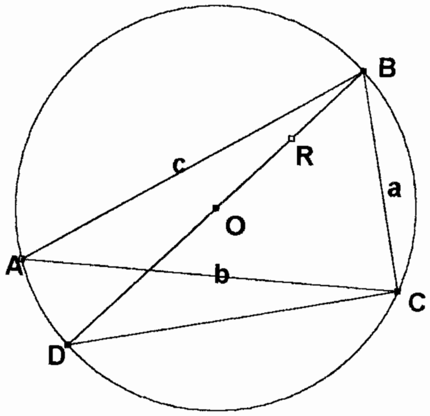
Hypotenuusaa AB vastaan piirretty korkeusjana CD synnyttää suorakulmaiset kolmiot CAD ja BCD, jotka molemmat ovat yhdenmuotoisia kolmion ABC kanssa. Verrantoja

$$\frac{AD}{b} = \frac{b}{c} \quad \text{ja} \quad \frac{BD}{a} = \frac{a}{c}$$

käyttäen saadaan $c^2 = c(BD + AD) = a^2 + b^2$. Olkoon toisaalta (1) voimassa. Piirretään pisteestä A kohtisuora AC' suoralle BC. Olkoon $BC' = a'$, $AC' = b'$ ja $CC' = x$. Kolmio CAC' on suorakulmainen, joten $b^2 = b'^2 + x^2$. Kolmio ABC' on suorakulmainen, joten $c^2 = a'^2 + b'^2$. Saadaan $a^2 + x^2 = a'^2$. Mutta $a' = a \pm x$, joten $a'^2 = a^2 + x^2 \pm 2ax$. Siis $ax = 0$, $x = 0$ ja $C = C'$. ABC on suorakulmainen.

8.

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{1}{2R}$$

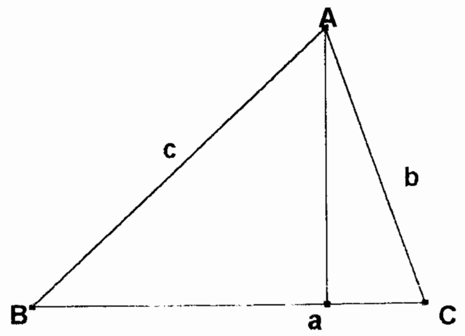


(*laajennettu sinilause.*)

Piirretään kolmion ympäri ympyrä. Jos BD on sen halkaisija, niin $\angle BDC = \angle BAC = \alpha$ tai $\angle BDC = 180° - \angle BAC = 180° - \alpha$. Suorakulmaisesta kolmiosta DBC saadaan $a = 2R\sin(BDC) = 2R\sin\alpha$. Symmetrian perusteella myös $b = 2R\sin\beta$ ja $c = 2R\sin\gamma$.

9.

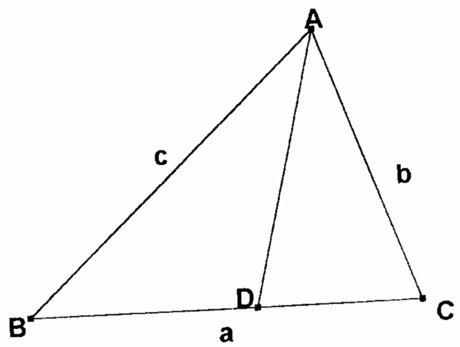
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$



Selvästi $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$ eli $c^2\cos^2\beta = (a - b\cos\gamma)^2 = a^2 + b^2\cos^2\gamma - 2ab\cos\gamma$. Sinilauseen nojalla $c^2\sin^2\beta = b^2\sin^2\gamma$. Kun yhtälöt lasketaan puolittain yhteen, saadaan $c^2 = c^2\cos^2\beta + c^2\sin^2\beta = a^2 + b^2(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma) - 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

10. *Kolmion ABC kulman A puolittaja AD jakaa sivun BC sivun sivujen AB ja AC suhteessa:*

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$



Kolmiosta BDA ja DCA saadaan

$$\frac{BD}{AB} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(\angle ABD)} \quad \text{ja} \quad \frac{DC}{AC} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(\angle ADC)}.$$

Koska $\angle BDA = 180° - \angle ADC$, kulmien BDA ja ADC sinit ovat samat. Siis $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$.

11. *Kolmion ABC ala on* $\dfrac{abc}{4R}$.

Käytetään sinilausetta; ala on $\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma = \dfrac{1}{2}ab\dfrac{c}{2R}$.

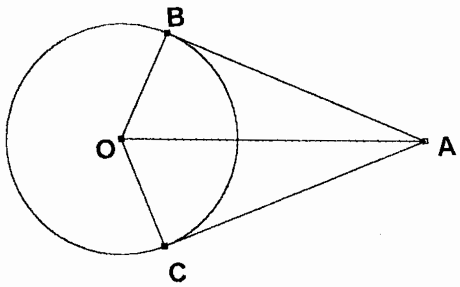
12. *Jos X on kolmion ABC sivun BC piste, $BX = m$, $XC = n$ ja $AX = p$, niin*

$$a(p^2 + mn) = b^2m + c^2n.$$

(Stewartin lause).

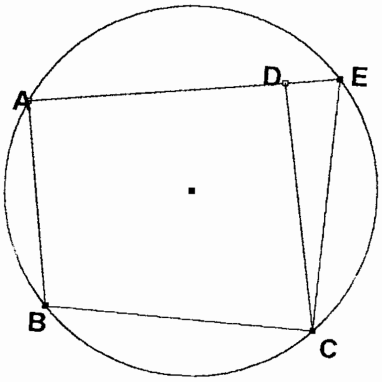
Jos $\angle BXA = \delta$, niin $c^2 = m^2 + p^2 - 2mp\cos\delta$ ja $b^2 = n^2 + p^2 + 2np\cos\delta$. Kun $\cos\delta$ eliminoidaan ja otetaan huomioon, että $m + n = a$, saadaan väite.

13. *Ympyrän ulkopuolisesta pisteestä ympyrälle piirretyissä tangenteissa yhteisen pisteen ja sivuamispisteiden yhdysjanat ovat yhtä pitkät ja tangenttien ja pisteen ympyrän keskipisteeseen yhdistävän suoran väliset kulmat yhtä suuret.*

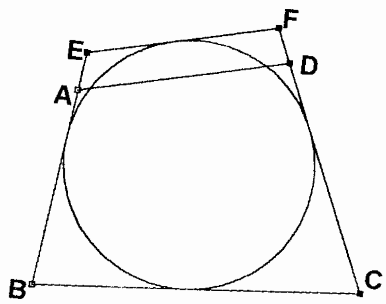


Jos ympyrän ulkopuolinen piste on A, sivuamispisteet B ja C sekä ympyrän keskipiste O, niin AOB ja AOC ovat yhtenevät suorakulmaiset kolmiot (ssk), joten $AB = AC$ ja $\angle BAO = \angle CAO$.

14. *Nelikulmion ympäri voidaan piirtää ympyrä silloin ja vain silloin, kun nelikulmion vastakkaisten kulmien summa on* $180°$ *($\alpha + \beta = 180°$). Nelikulmion sisään voidaan piirtää ympyrä silloin ja vain silloin, kun sen vastakkaisten sivujen pituuksien summa on sama ($a + c = b + d$).*



Jos nelikulmion $ABCD$ ympäri on piirretty ympyrä, niin kulmia $\angle ABC$ ja $\angle CDA$ vastavien kaarien summa $360°$. Tällöin $\angle ABC + \angle CDA = 180°$. Olkoon $ABCD$ nelikulmio, jolle $\angle ABC + \angle CDA = 180°$. Piirretään kolmion ABC ympäri ympyrä. Oletetaan, että D on ympyrän sisäpiste. Leikatkoon CD ympyrän pisteessä E. Silloin $\angle ABC + \angle CEA = 180°$. Nyt kuitenkin kolmion AED kulmien ja vieruskulmien suuruussuhteiden perusteella $\angle AEC < \angle ADC$, mikä on ristiriita. Vastaavalla tavalla myös oletuksesta, että D olisi ympyrän ulkopuolella, seuraa ristiriita.
Olkoon sitten nelikulmion $ABCD$ sisään piirretty ympyrä ja olkoot sivuamispisteet X, Y, Z ja T. Silloin (edellisessä numerossa esitetyn tangenttien ominaisuuden perusteella) $AB + CD = AX + XY + CZ + ZD = AT + BY + YC + DT = BC + AD$. Olkoon toisaalta $ABCD$ nelikulmio, jolle $AB + CD = BC + DA$. Piirretään ympyrä $\mathcal{Y}$, joka sivuaa AB:tä, BC:tä ja CD:tä. Oletetaan, että AD leikkaa tämän ympyrän. Piirretään $EF \| AD$ niin, että AD sivuaa ympyrää. Silloin $EB + CF = EA + AB + CD + DF = BC + FE$. Kun oletus otetaan huomioon, saadaan $EF = EA + AD + DF$, joka on mahdollista vain, jos A, E, D ja F ovat samalla suoralla. Vastaavanlainen päättely käy myös tapaukseen, jossa AD ei kosketa ympyrää $\mathcal{Y}$.



15. *Jos X, Y ja Z ovat kolmion ABC sivujen BC, CA ja AB pisteitä, niin AX, BY ja CZ leikkaavat samassa pisteessä jos ja vain jos*

$$\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB} = 1 \qquad (1)$$

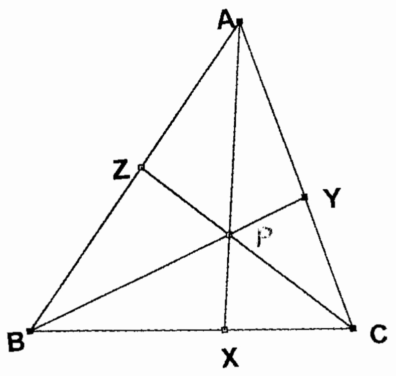
(Cevan lause.)

Merkitään kolmion KLM alaa $|KLM|$. Oletetaan, että AX, BY ja CZ kulkevat pisteen P kautta. Silloin

$$\frac{BX}{XC}=\frac{|BXP|}{|XCP|}=\frac{|BXA|}{|XCA|}=\frac{|BPA|}{|CPA|}$$

(viimeinen yhtälö perustuu siihen, että jos $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, niin $\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}$). Samoin todistetaan, että

$$\frac{CY}{YA}=\frac{|CPB|}{|ABP|} \text{ ja } \frac{AZ}{ZB}=\frac{|APC|}{|BPC|}.$$



Kun saadut kolme lauseketta kerrotaan, saadaan tulokseksi 1. Olkoon kääntäen ABC kolmio ja AX, BY , CZ janoja, joille (1) pätee. Olkoon P AX:n ja BY:n leikkauspiste. Leikatkoon suora CP janan AB pisteessä Z'. Silloin

$$\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ'}{Z'B}=1.$$

Tästä seuraa

$$\frac{AZ}{ZB}=\frac{AZ'}{Z'B}$$

ja edelleen $Z=Z'$

16. *Kolmion keskijanoilla, kulmanpuolittajilla, korkeusjanoilla ja kolmion kärjet kolmion sisään piirretyn ympyrän ja kolmion sivuamispisteisiin yhdistävillä janoilla kullakin on yhteinen piste. (Pisteet ovat kolmion painopiste, sisään piirretyn ympyrän keskipiste, ortokeskus ja Gergonnen piste.)*

Jos AX, BY ja CZ ovat keskijanoja, niin $\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB}=1\cdot 1\cdot 1=1$. Jos vastaavat janat ovat kolmion kulmanpuolittajia, niin $\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB}=\frac{AB}{AC}\frac{BC}{BA}\frac{CA}{CB}=1$. Jos janat ovat korkeusjanoja, niin $\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB}=\frac{c\cos\beta}{b\cos\gamma}\frac{a\cos\gamma}{c\cos\alpha}\frac{b\cos\alpha}{a\cos\beta}=1$. Jos X, Y ja Z ovat kolmion sisään piirretyn ympyrän ja kolmion sivujen sivuamispisteet, niin $BX=BZ$, $CX=CY$ ja $AY=AX$. Cevan kaava toteutuu nytkin.

17. *Kolmion keskijanat jakavat kolmion kuuteen yhtä suureen kolmioon.*

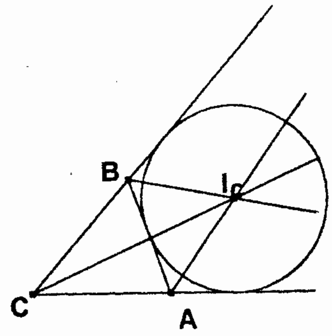
Kohdan 16 merkinnöin ja saman kohdan todistuksen perusteella $|BXP|=|XCP|$, $|AZP|=|ZBP|$ ja $|BCP|=|APB|$. Siis myös $|BXP|=|BPZ|$. Samoin todetaan, että myös kolmiot APY ja PCY ovat yhtä suuret kuin neljä muuta kolmiota.

18. *Kolmion painopiste jakaa keskijanat suhteessa* 1 : 2.

Edellisen kohdan perusteella $\frac{XP}{PA}=\frac{|BXP|}{|BPA|}=\frac{1}{2}$.

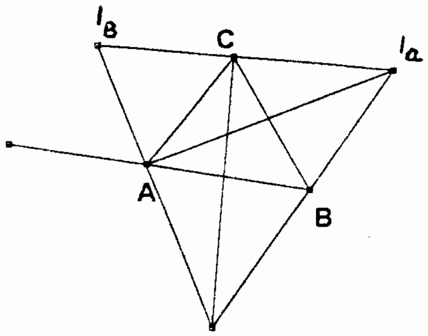
19. *Suorakulmaisessa kolmiossa (c hypotenuusa) on $r = p - c$.*

Koska ympyrän tangenttien leikkauspisteen etäisyys molemmista sivuamispisteistä on sama, on $c = a - r + b - r$ eli $r = \frac{1}{2}(a + b - c) = p - c$



20. *Kolmion ABC kulmien A ja B vieruskulmien puolittajat ja kulman C puolittaja leikkaavat toisensa samassa pisteessä. (Sivuympyrän keskipiste I_c; ympyrän säde on r_c.)*

Piste, joka on kulman A vieruskulman puolittajalla, on yhtä etäällä suorista AC ja AB, piste, joka on kulman B vieruskulman puolittajalla, on yhtä etäällä suorista AB ja BC. Molempien kulmanpuolittajien leikkauspiste on kulman C aukeamassa ja yhtä etäällä suorista AC ja BC ja siis kulman C puolittajalla.



21. *ABC on kolmion $I_aI_bI_c$ ortokolmio. [Kolmion ortokolmio on kolmio, jonka kärjet ovat ABC:n korkeusjanojen kantapisteet.]*

Riittää, kun osoitetaan, että $I_aA \perp AI_b$. Mutta koska AI_a on kulman CAB puolittaja ja AI_B on kulman BAC vieruskulman puolittaja, on $\angle I_aAI_b = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$.

22. *Kolmion ala on $= pr = (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c$.*

$|ABC| = |ABI| + |BCI| + |CAI| = \frac{1}{2}(rc + ra + rb) = rp$. Vastaavasti esimerkiksi $|ABC| = |ABI_B| + |CBI_B| - |ACI_B| = \frac{1}{2}(r_bc + r_ba - r_bb) = r_b(p - b)$.

23. *Jos h_a, h_b ja h_c ovat kolmion korkeusjanat, niin*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

Merkitään kolmion alaa S:llä. Silloin $2S = ah_a = bh_b = ch_c$. Edellisen lauseen mukaan $\frac{1}{r} = \frac{p}{S} = \frac{1}{2S}(a + b + c) = \frac{a}{ah_a} + \frac{b}{bh_b} + \frac{c}{ch_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$. Vastaavasti $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{S}((p - a) + (p - b) + (p - c)) = \frac{1}{S}(3p - (a + b + c)) = \frac{1}{S}(3p - 2p) = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$.

24. *Kolmion ala on*

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}, \quad 2p = a + b + c,$$

(Heronin kaava).

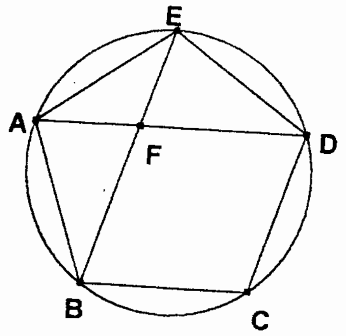
Muotoillaan Heronin kaavan oikean puolen neliötä (kerrottuna luvulla $16 = 2^4$) ja käytetään lopuksi kosinilausetta: $16p(p - a)(p - b)(p - c) = (a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) = (-a^2 + (b + c)^2)(a^2 - (b - c)^2) = (2bc - (a^2 - (b^2 + c^2))(2bc + (a^2 - (b^2 + c^2)) = 4b^2c^2 - (a^2 - (b^2 + c^2))^2 = 4b^2c^2 - (2bc\cos\alpha)^2 = 4b^2c^2\sin^2\alpha = 16S^2$.

25. *Suunnikkaan sivujen a ja b neliöiden summa on sama kuin sen lävistäjien d_1 ja d_2 neliöiden summa: ${d_1}^2 + {d_2}^2 = 2a^2 + 2b^2$ (suunnikaslause).*

Jos suunnikas on $ABCD$ ja $AB = a$, $BC = b$, $AC = d_1$, niin kosinilauseesta $d_1^2 + d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\angle ABC) + a^2 + b^2 - 2ab\cos(\angle DAB) = 2(a^2 + b^2)$, sillä $\angle ABC + \angle DAB = 180°$.

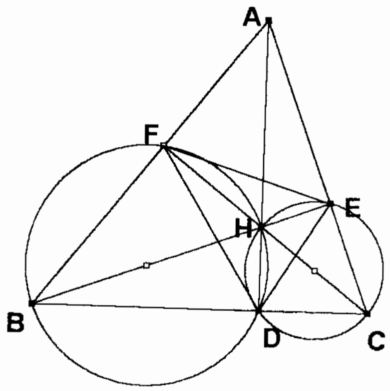
26. *Säännöllisen viisikulmion ABCDE lävistäjät AD ja BE leikkaavat pisteessä F. Osoita, että*

$$\frac{DF}{AD} = \frac{AF}{DF}.$$



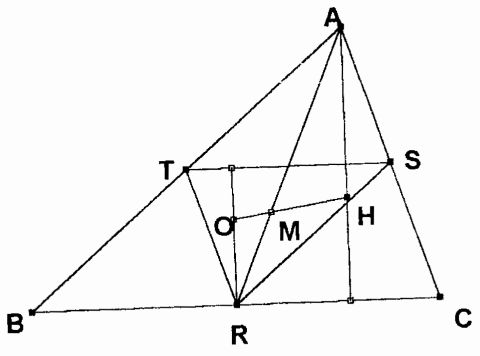
Kehäkulmalauseesta ja viisikulmion säännöllisyydestä seuraa, että kolmiot AFE ja DEA ovat tasakylkisiä ja yhdenmuotoisia. Siis $\frac{AF}{DE} = \frac{DE}{AD}$. Kehäkulmalauseesta seuraa edelleen, että $\angle DEB = 2\angle BEA$. Toisaalta $\angle DFE = \angle FAE + \angle FEA = 2\angle BEA$. Kolmio DEF on siis myös tasakylkinen, joten $DE = DF$. Väite seuraa.

27. *Kolmion ABC korkeusjanojen kantapisteet kärkinä piirretyn kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion ABC ortokeskus.*



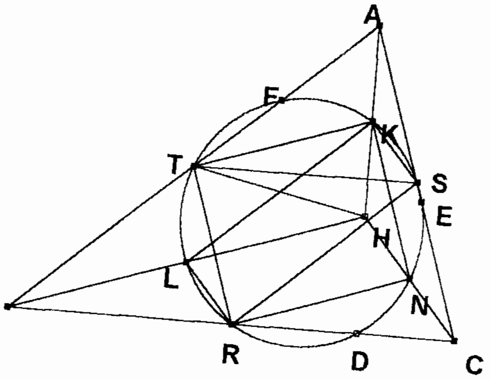
Olkoot AD, BE ja CF kolmion korkeusjanat. Väite tulee todistetuksi, jos osoitetaan, että nämä korkeusjanat ovat kolmion DEF kulmanpuolittajia. Olkoon H ortokeskus. Koska HFB ja HDB ovat suoria kulmia, nelikulmion $HFBD$ ympäri voidaan piirtää ympyrä. Samoin nelikulmion $HDCE$ ympäri voidaan piirtää ympyrä. Kehäkulmalauseen nojalla $\angle HDF = \angle FBH$ ja samoin $\angle HDE = \angle HCE$. Mutta $\angle FBH = \angle FCA$, mistä väite seuraa.

28. *Kolmion painopiste, kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste ja kolmion korkeusjanojen leikkauspiste ovat samalla suoralla (Eulerin suora).*



Olkoot R, S ja T kolmion ABC sivujen keskipisteet, H ABC:n ortokeskus ja O sen ympäri piirretyn ympyrän keskipiste sekä M ABC:n keskijanojen leikkauspiste. Silloin $RO \perp ST$, $SO \perp RT$, joten O on RST:n (joka on yhdenmuotoinen ABC:n kanssa) ortokeskus. Lisäksi AR ja ST ovat suunnikkaan $ATRS$ lävistäjät, joten ne puolittavat toisensa. Tästä seuraa, että M on myös kolmion RST keskijanojen leikkauspiste. Yhdenmuotoisuudesta seuraa, että molemmissa kolmioissa kärjen, ortokeskuksen ja painopisteen muodostamat kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Siis $\angle OMR = \angle HMA$. Mutta tämä merkitsee, että O, M ja H ovat samalla suoralla (ja yhdenmuotoisuussuhteen perusteella $HM = 2OM$).

29. *Kolmion korkeusjanojen kantapisteet, kolmion sivujen keskipisteet ja korkeusjanojen leikkauspisteen ja kolmion kärkien välisten janojen keskipisteet ovat samalla ympyrällä (yhdeksän pisteen ympyrä).*



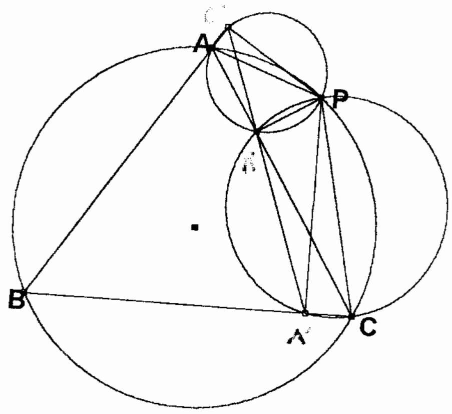
Käytetään edellisen tehtävän merkintöjä, ja merkitään vielä janojen AH, BH ja CH keskipisteitä K:lla, L:llä ja N:llä ja A:sta, B:stä ja C:stä piirrettyjen korkeusjanojen kantapisteitä D:llä, E:llä ja F:llä. Kolmiosta AHC saadaan $KN \| AC \| RT$ ja kolmioista ABH, BCH $TK \| BH$, $RN \| BH$. Koska $BH \perp AC$, on $RNKT$ suorakaide. Sen ympäri piirretyn ympyrän $\mathcal{Y}$ halkaisijoita ovat RK ja TN; koska kulmat RDK ja NFT ovat suoria, niin D ja F ovat $\mathcal{Y}$:llä. Samoin todetaan, että $SKLR$ on suorakaide ja että E on tämän suorakaiteen ympäri piirretyllä ympyrällä $\mathcal{Y}'$. Koska ympyröillä $\mathcal{Y}$ ja $\mathcal{Y}'$ on yhteinen halkaisija RK, ne ovat samat.

30. *Olkoot pisteen P etäisyydet kolmion ABC kärjistä x, y ja z. Todista, että jos pisteen P kohtisuorat projektiot suorilla BC, CA ja AB ovat A', B' ja C', niin kolmion $A'B'C'$ sivut ovat*

$$a' = \frac{ax}{2R}, \quad b' = \frac{by}{2R}, \quad c' = \frac{cz}{2R}.$$

Koska kulmat $AC'P$ ja $PB'A$ ovat suoria, $AC'PB'$ on jännenelikulmio ja $AP = x$ tämän nelikulmion ympäri piirretyn ympyrän halkaisija. Laajennetun sinilauseen mukaan $\dfrac{a'}{\sin\alpha} = x$. Toisaalta laajennetun sinilauseen mukaan $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$. Ensimmäinen todistettavista yhtälöistä saadaan tästä, muut kaksi samoin.

31. *Olkoon P kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän piste. Todista: jos A', B' ja C' ovat kuten edellisessä tehtävässä, niin A', B' ja C' ovat samalla suoralla (Simsonin suora).*



Oletetaan, että P on kaarella AC. Silloin $\angle APC = 180° - \angle B$. Myös $\angle A'PC' = 180° - \angle B$. Tästä seuraa, että $\angle A'PC = \angle C'PA$. Toisaalta nelikulmioiden $AB'PC'$ ja $PB'A'C$ ympäri piirrettyjen ympyröiden samaa kaarta vastaavina kulmina $\angle AB'C' = \angle APC'$ ja $\angle A'B'C = \angle A'PC$. Siis $\angle AB'C' = \angle A'B'C$, ja C', B' ja A' ovat samalla suoralla. Päättely voidaan kääntää: jos $\angle AB'C' = \angle A'B'C$, niin (kehäkulmapäättelyn perusteella) $\angle APC = \angle C'PA' = 180° - \angle B$, joten P on ABC:n ympäri piirretyllä ympyrällä.

32. *Todista: jos $ABCD$ on jännenelikulmio, niin*

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

Jos D ei ole kolmion ABC ympäri piirretyllä ympyrällä, niin

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD.$$

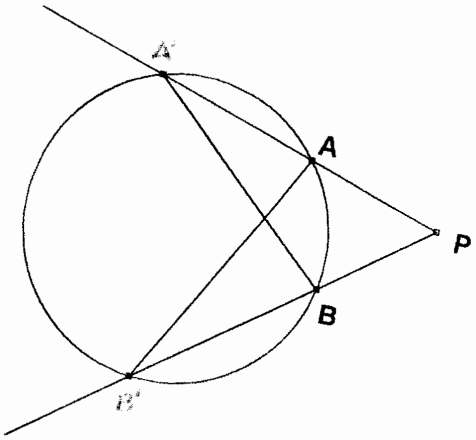
Edellisen numeron mukaan (korvataan P D:llä) kolmio $A'B'C'$ on surkastunut, jos D on kolmion ABC ympäri piirretyllä ympyrällä. Numeron 30 merkinnöin on $a' + c' = b'$ eli $ax + cz = by$ eli $BC \cdot AD + AB \cdot CD = AC \cdot BD$. Jos D ei ole ABC:n ympäri piirretyllä ympyrällä, $A'B'C'$ on aito kolmio, ja $a' + b' > b'$ eli $BC \cdot AD + AB \cdot CD > AC \cdot BD$.

33. *Jos pisteen P kautta piirretyt kaksi suoraa leikkaavat ympyrän C pisteissä A, A' ja B, B', niin*

$$PA \cdot PA' = PB \cdot PB'. \tag{2}$$

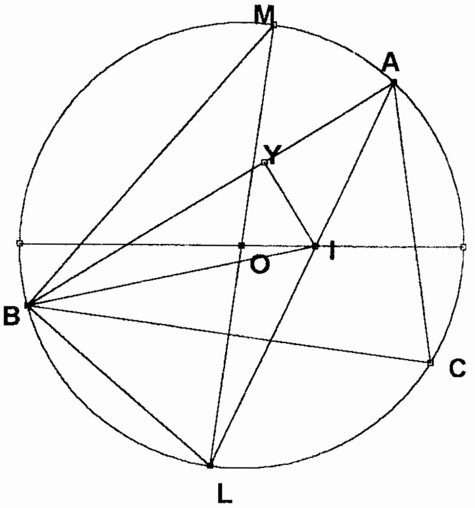
Jos pisteessä P leikkaavilla kahdella suoralla olevat pisteet A, A' ja B, B' toteuttavat yhtälön (2), pisteiden kautta voidaan piirtää ympyrä.

Koska $\angle BA'P = \angle AB'P$ (kehäkulmat) ja $\angle APB' = \angle A'PB$ (samat tai ristikulmat sen mukaan, onko P ympyrän ulko- vai sisäpuolella), niin kolmiot $A'BP$ ja $B'AP$ ovat yhdenmuotoiset. Siis $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{PA'}{PB'}$, ja väite seuraa. Jälkimmäisen väitteen todistamiseksi piirretään ympyrä pisteiden A, A' ja B kautta. se leikkaa suoran BB' pisteessä B'', ja $PA \cdot PA' = PB \cdot PB''$. Tästä seuraa, että $PB' = PB''$ ja $B'' = B'$, joten B' on samalla ympyrällä kuin A, A' ja B.



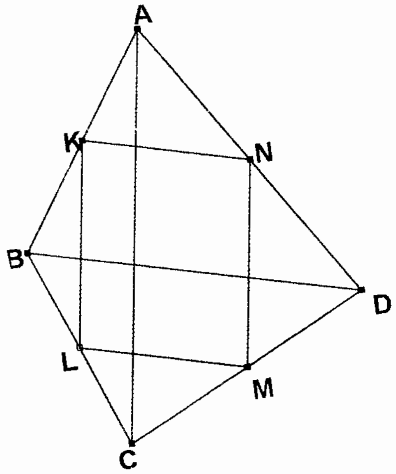
34. *Jos d on kolmion ABC sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden keskipisteiden I ja O etäisyys, niin $d^2 = R(R-2r)$.*

Pisteen I potenssi kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän C suhteen on $(R-d)(R+d) = R^2 - d^2$. Leikatkoon AI ympyrän C pisteessä L ja LO ympyrän C pisteessä M. Nyt $R^2 - d^2 = AI \cdot IL$. Koska I on ABC:n kulmanpuolittajien leikkauspiste, on $\angle ABI = \angle IBC$ ja $\angle CBL = \angle CAL = \angle IAB$. Kolmion ABI kulman vieruskulmana $\angle BIL = \angle IAB + \angle IBA = \angle IBL$. Siis kolmio LIB on tasakylkinen ja $IL = BL$. Siis $R^2 - d^2 = LB \cdot IA$. Olkoon vielä Y pisteen I kohtisuora projektio suoralla AB; silloin $IY = r$. Suorakulmaisista kolmioista MBL ja AYI saadaan $BL = ML\sin(\angle BML)$, $IA = \dfrac{IY}{\sin\angle IAY}$. Mutta $\angle BML = \angle BAL = \angle IAY$, joten $R^2 - d^2 = ML \cdot IY = 2Rr$, ja väite seuraa.



35. *Nelikulmion sivujen keskipisteet ovat suunnikkaan kärjet. Jos nelikulmio on kupera, suunnikkaan ala on puolet nelikulmion alasta (Varignonin lause).*

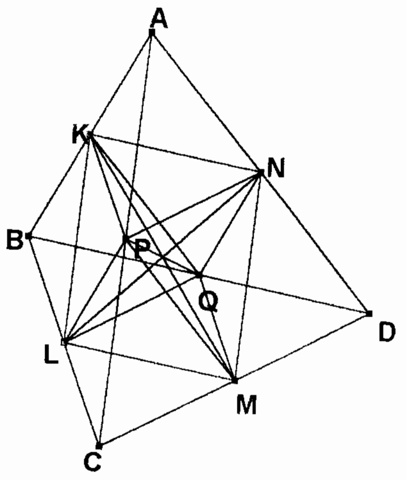
Olkoon $ABCD$ (kupera tai ei) nelikulmio ja K, L, M ja N sen sivujen keskipisteet (alkaen sivusta AB). Silloin $KL \| AC \| MN$ ja $LM \| BD \| KN$. Nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, on suunnikas. Kolmioiden KBL ja MDN ala ovat $\dfrac{1}{4}$ kolmioiden ABC ja CDA aloista eli $\dfrac{1}{4}$ koko nelikulmion $ABCD$ alasta, samoin kolmioiden LCM ja NAK ala on $\dfrac{1}{4}$ nelikulmion $ABCD$ alasta; suunnikkaan $KLMN$ ala on näin ollen $\left(1 - 2 \cdot \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$ nelikulmion $ABCD$ alasta.



36. *Nelikulmion sivujen keskipisteiden yhdistysjanat ja nelikulmion lävistäjien keskipisteiden yhdistysjana leikkaavat toisensa samassa pisteessä ja jakavat toisensa yhtä suuriin osiin.*

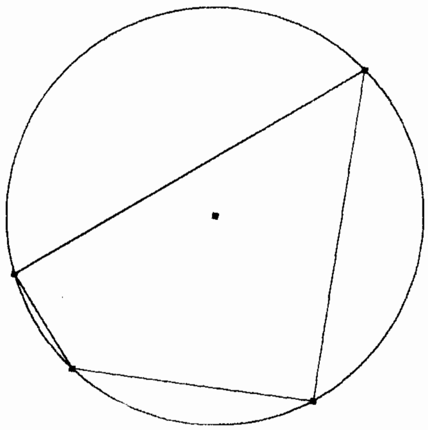
Olkoot sivujen AB, BC jne. keskipisteet edelleen K, L, M ja N ja olkoot P ja Q AC:n ja BD:n keskipisteet. Edellisen numeron perusteella $PMQK$ on suunnikas (nelikulmio $ACDB$) ja

$PLQN$ on suunnikas (nelikulmio $ACBD$). Jana PQ on molempien suunnikkaiden yhteinen lävistäjä. Koska suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa, LN:n ja KM:n keskipisteet ovat molemmat PQ:n keskipisteitä; kaikki kolme tehtävässä lueteltua janaa kulkevat saman pisteen kautta ja puolittavat toisensa.



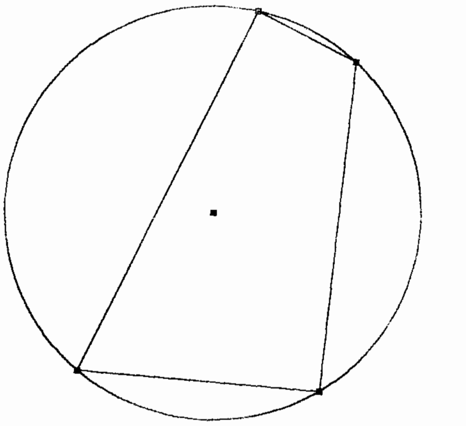
37. *Mitkä hyvänsä neljä eripituista janaa, joista mikään ei ole pitempi kuin kolmen muun summa, voivat muodostaa kolme eri jännenelikulmiota, joilla on kaikilla sama ala.*

Olkoot janojen pituudet a, b, c ja d; muodostetaan näistä mielivaltainen nelikulmio. On mahdollista lisätä tai vähentää kahden vastakkaisen kulma summaa, kunnes se on 180°. Tällöin nelikulmio on syklinen. Leikataan nelikulmio pitkin yhtä lävistäjää, käännetään toinen syntyneistä kolmioista ympäri ja liitetään palat yhteen. Saadaan uusi jännenelikulmio, jolla on sama ala kuin alkuperäisellä. Sama voidaan toistaa leikkaamalla nelikulmio pitkin toista lävistäjäänsä. Jos ensimmäisen nelikulmion lävistäjät ovat l ja n, toisen l ja m, niin kolmannen ovat m ja n. [Nelikulmiot voidaan konstruoida harpilla ja viivoittimella, jos ratkaistaan Ptolemaioksen lauseesta johtuvat yhtälöt $mn = bc + ad$, $nl = ca + bd$ ja $lm = ab + cd$.]



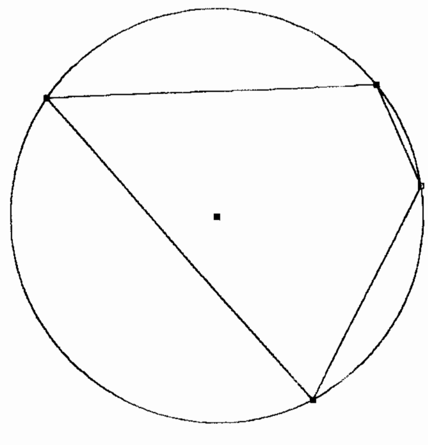
38. *Jos a, b, c ja d ovat jännenelikulmion sivut ja $2s = a + b + c + d$, niin jännenelikulmion ala on $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ (Brahmaguptan kaava).*

Olkoot A ja B kaksi jännenelikulmion vastakkaista kärkeä, kulmat näissä kärjissä α ja $\beta = 180° - \alpha$; A:sta lähtevien sivujen pituus a ja b ja l nelikulmion kahta muuta kärkeä yhdistävä lävistäjä. Jos K on nelikulmion ala, niin $2K = ab\sin\alpha + cd\sin\beta = (ab + cd)\sin\alpha$. Kosinilauseen nojalla $l^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha$. Tästä seuraa $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab + cd)\cos\alpha$ ja edelleen $(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 16K^2 = 4(ab + cd)^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = (2ab + 2cd)^2$. Käyttämällä toistuvasti kaavaa $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ saadaan $16K^2 = (2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = (a^2 + 2ab + b^2 - (c^2 - 2cd + d^2))(c^2 + 2cd + d^2 - (a^2 - 2ab + b^2)) = ((a+b)^2 - (c-d)^2)((c+d)^2 - (a-b)^2) = (a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(-a + b + c + d) = (2s - 2d)(2s - 2c)(2s - 2b)(2s - 2a) = 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$, mistä väite seuraakin.



39. *Jos kolmion ABC sivut kantoina piirretään kolmion ulkopuolelle tasasivuiset kolmiot APB, BQC ja CRA, niin näiden keskipisteet ovat tasasivuisen kolmion kärjet (Napoleonin lause).*

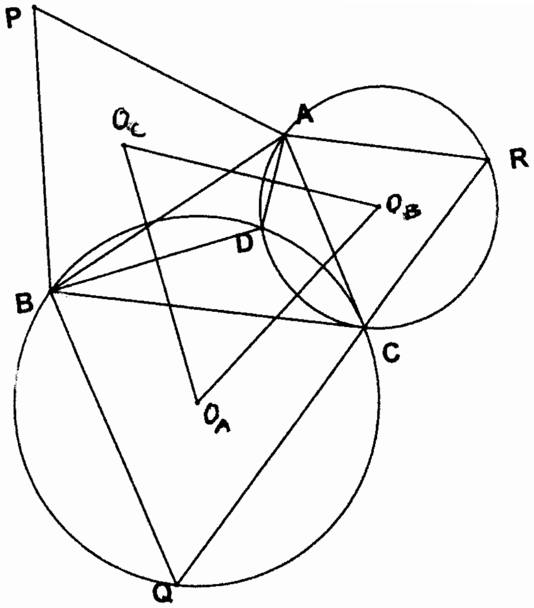
Olkoon D kolmioiden BQC ja CRA ympäri piirrettyjen ympyröiden leikkauspiste. Silloin $\angle BDC = \angle CDA = 180° - 60° = 120°$. Mutta näin ollen myös $\angle ADB = 360° - 2 \cdot 120° = 120°$. Siis $APBD$ on jännenelikulmio eli D on kolmion APB ympäri piirretyllä ympyrällä. Olkoot O_A, O_B ja O_C kolmioiden APB, BQC ja CRA ympäri piirrettyjen ympyröiden keskipisteet. Koska O_AO_B on DC:n keskinormaali ja O_AO_C on BD:n keskinormaali, $\angle BDC + \angle O_CO_AO_B = 180°$. Siis $\angle O_CO_AO_B = 60°$. Samoin osoitetaan, että kolmion $O_AO_BO_C$ muut kulmat ovat $= 60°$, joten $O_AO_BO_C$ on tasasivuinen.



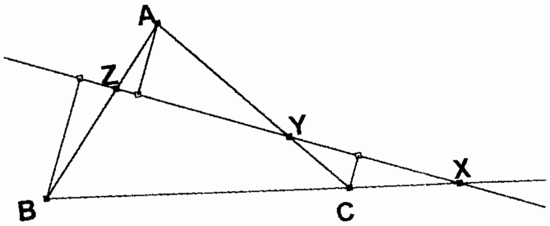
40. *Kolmion ABC sivuilla tai niiden jatkeilla olevat pisteet X, Y ja Z ovat samalla suoralla jos ja vain jos*

$$\frac{BX}{CX}\cdot\frac{CY}{AY}\cdot\frac{AZ}{BZ}=1$$

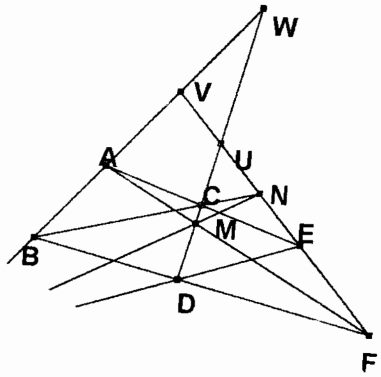
(Menelaoksen lause).



[Tämä ja Cevan lauseen (numero 16) näennäisesti sama yhtälö on ymmärrettävä niin, että suoralla olevien janojen pituuksien suhde on positiivinen, jos janat ovat samansuuntaisten vektorien edustajia, ja negatiivinen, jos janat ovat vastakkaissuuntaisten vektorien edustajia. Tällöin Cevan lauseen ehdossa 1 olisi korvattava -1:llä.] Oletamme, että X, Y ja Z ovat samalla suoralla ℓ. Tämä suora joko leikkaa kaksi kolmion sivua tai ei yhtään. Olkoot h_A, h_B, h_C pisteiden A, B ja C etäisyydet suorasta ℓ. Yhdenmuotoisista suorakulmaisista kolmioista saadaan $\dfrac{BX}{CX}=\dfrac{h_B}{h_C}$, $\dfrac{CY}{AY}=\dfrac{h_C}{h_A}$, $\dfrac{AZ}{BZ}=\dfrac{h_A}{h_B}$. Väitteen "vain jos" -puoli saadaan kertomalla edelliset kolme yhtälöä keskenään. Jos käänäen X, Y ja Z toteuttavat lauseen yhtälön, niin tarkastellaan suoria AB ja XY; niiden leikkauspiste on Z' ja jo todistetun mukaan $\dfrac{BX}{CX}\cdot\dfrac{CY}{AY}\cdot\dfrac{AZ'}{BZ'}=1$. Tästä seuraa, että $\dfrac{AZ'}{BZ'}=\dfrac{AZ}{BZ}$, ja edelleen $Z'=Z$.

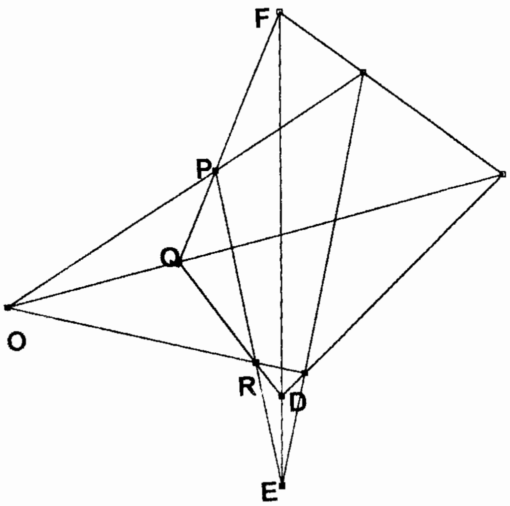


41. *Olkoot A, C ja E kolme pistettä suoralla ja B, D, F kolme pistettä toisella suoralla. Oletetaan, että AB leikkaa DE:n pisteessä L, CD leikkaa FA:n pisteessä M ja EF leikkaa BC:n pisteessä N. Silloin L, M ja N ovat samalla suoralla (Pappuksen lause).*



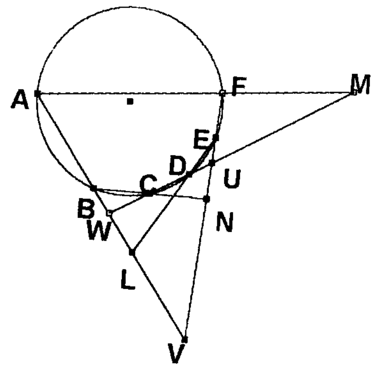
Oletetaan, että mitkään kaksi suorista AB, CD, EF eivät ole yhdensuuntaisia. [Tämä ei ole olennainen rajoitus.] Olkoot U, V ja W suorien CD ja EF, EF ja AB sekä AB ja CD leikkauspisteet. Nyt LDE, AMF, BCN, ACE, ja BDF ovat suoria, joihin voi soveltaa Menelaoksen lausetta kolmion UVW suhteen. Lausekkeiden $\dfrac{VL}{WL}\dfrac{WD}{UD}\dfrac{UE}{VE}$, $\dfrac{VA}{WA}\dfrac{WM}{UM}\dfrac{UF}{VF}$, $\dfrac{VB}{WB}\dfrac{WC}{UC}\dfrac{UN}{VN}$, $\dfrac{VA}{WA}\dfrac{WC}{UC}\dfrac{UE}{VE}$ ja $\dfrac{VB}{WB}\dfrac{WD}{UD}\dfrac{UF}{VF}$ arvo on kunkin 1, joten kolmen ensimmäisen tulo jaettuna kahden viimeisen tulolla on $=1$. Siis $\dfrac{VL}{WL}\dfrac{WM}{UM}\dfrac{UN}{VN}=1$, ja L, M ja N ovat samalla suoralla.

42. *Oletetaan, että kolmiot PQR ja $P'Q'R'$ sijaitsevat niin, että suorat PP', QQ' ja RR' leikkaavat samassa pisteessä O ja että suorat PR ja $P'R'$ leikkaavat pisteessä E, suorat PQ ja $P'Q'$ leikkaavat pisteessä F ja suorat QR ja $Q'R'$ leikkaavat pisteessä D. Silloin E, F ja D ovat samalla suoralla (Desarguesin lause).*



Sovelletaan Menelaoksen lausetta kolmioon OQR ja suoraan $DR'Q'$, kolmioon ORP ja suoraan $EP'R'$ sekä kolmioon OPQ ja suoraan $FQ'P'$. Lausekkeiden $\dfrac{QD}{RD}\dfrac{RR'}{OR'}\dfrac{OQ'}{QQ'}$, $\dfrac{RE}{PE}\dfrac{PP'}{OP'}\dfrac{OR'}{RR'}$ ja $\dfrac{PF}{QF}\dfrac{QQ'}{OQ'}\dfrac{OP'}{PP'}$ arvo on 1, samoin niiden tulon, joka supistamisten jälkeen on $\frac{QD}{RD}\frac{RE}{PE}\frac{PF}{QF}$. Menelaoksen lause sovellettuna kolmioon PQR kertoo, että D, E ja F ovat samalla suoralla.

43. *Jos kuusikulmion kärjet ovat ympyrällä ja jokaiset kolme vastakkaisten sivujen muodostamaa suoraparia leikkaavat, niin leikkauspisteet ovat samalla suoralla (Pascal).*



Tarkastellaan tilannetta kuvion mukaisessa tapauksessa. Olkoot L suorien AB ja DE, M suorien CD ja FA sekä N suorien BC ja EF leikkauspisteet. Oletetaan vielä, että suorat AB, CD ja EF muodostavat kolmion UVW (vrt. Pappuksen lauseen todistukseen). Sovelletaan Menelaoksen lausetta tähän kolmioon ja suoriin LDE, AMF ja BCN. Saadaan $\frac{VL}{WL}\frac{WD}{UD}\frac{UE}{VE} = 1$, $\frac{VA}{WA}\frac{WM}{UM}\frac{UF}{VF} = 1$ ja $\frac{VB}{WB}\frac{WC}{UC}\frac{UN}{VN} = 1$. Kerrotaan yhtälöt keskenään ja otetaan huomioon yhtälöt (pisteen potenssi ympyrän suhteen!) $UE \cdot UF = UC \cdot UD$, $VA \cdot VB = VE \cdot VF$, $WC \cdot WD = WA \cdot WB$. Tulosta jää jäljelle $\frac{VL}{WL}\frac{WM}{UM}\frac{UN}{VN} = 1$, joten L, M ja N ovat samalla suoralla.