Esimerkkejä kilpailumatematiikan lajeista ja periaatteita

Tässä kokoelmassa esitetään näytteitä tyypillisistä kilpailumatematiikan tehtävistä. Matematiikkakilpailujen matematiikka jaetaan tavallisesti neljään pääalueeseen, jotka ovat algebra, geometria, lukuteoria, kombinatoriikka. Seuraavassa on jokaisesta alueesta viisi esimerkkiä. Tehtävien vaikeustaso liikkuu helpon ja keskitasoisen alueilla. Tehtäville esitetään myös ratkaisuehdotuksia. Niin kuin aina, kannattaa miettiä itse vielä toisen ja kolmannen kerran, ennen kuin alkaa tutkia ratkaisuosastoa. Saattaa vaikkapa keksiä parempia ratkaisuja kuin tässä esitetyt! Jos kilpailumatematiikka on sinulle uutta, kannattanee ratkaisuja tällä kertaa katsoa, koska niissä on yritetty hiukan laajemmin esitellä joitain kilpailutehtävien ratkaisemisessa huomioon otettavia asioita.

Tehtävät

1. (A) Jos reaaliluvulle x on voimassa $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = 18$, niin mitä on $x^4 + \dfrac{1}{x^4}$?

2. (A) Osoita, että jos $abc = 1$ ja

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

niin ainakin yksi luvuista a, b ja c on 1.

3. (A) Geometrisen jonon neljän peräkkäisen jäsenen summa on 13. Lukujen neliöiden summa on 1261. Määritä luvut.

4. (A) Olkoon a positiivinen luku ja olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, jolle pätee

$$f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}.$$

Osoita, että f on jaksollinen funktio. [Funktio f on jaksollinen, jos on olemassa b siten, että $f(x + b) = f(x)$ kaikilla x.]

5. (A) Osoita, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n on

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

Osoita vielä, että luvun

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{m^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{m^2}}$$

kokonaisosa on $2m - 2$ tai $2m - 1$.

6. (G) Olkoon S jokin tason pistejoukko. Sanomme, että S *näkyy* pisteestä $A \in S$, jos jana AX on kokonaan joukossa S kaikilla $X \in S$. Osoita, että jos S näkyy pisteistä A ja B, niin se näkyy kaikista janan AB pisteistä.

7. (G) Kolmion sivujen pituudet ovat 10, 17 ja 21. Määritä kolmion lyhimmän korkeusjanan pituus.

8. (G) Suorakulmaisen kolmion ABC hypotenuusa on AB. Pisteet M ja N ovat kolmion sivuille BC ja AC niin, että AM ja BN ovat kolmion kulmanpuolittajia. Kolmion korkeusjana CC' leikkaa janat AM ja BN pisteissä P ja Q. Osoita, että QN:n ja PM:n keskipisteiden kautta kulkeva suora on AB:n suuntainen.

9. (G) Kolmion ABC sivun BC keskipiste on M ja $\angle MAC = 15°$. Määritä kulman $\angle ABC$ suurin mahdollinen arvo.

10. (G) Ympyrän kehä jaetaan mielivaltaisella tavalla neljäksi kaareksi. Kaarien keskipisteet yhdistetään janoilla. Osoita, että kaksi näistä janoista on toisiaan vastaan kohtisuorassa.

11. (L) Kuinka monella tavalla luku 2016 voidaan kirjoittaa kahden neliöluvun erotuksena?

12. (L) Todista, että neljän peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun tulo ei ole neliöluku.

13. (L) Osoita, että $2^{n+2}3^n + 5n - 4$ on kaikilla luonnollisilla luvuilla jaollinen 25:llä.

14. (L) Mikä on pienin kokonaisluku $n > 1$, jolla neliölukujen 1^2, 2^2, $\ldots$, n^2 keskiarvo on neliöluku?

15. (L) Osoita, että jokainen rationaaliluku r, missä $0 < r \leq 1$, voidaan kirjoittaa äärellisen monen eri positiivisen kokonaisluvun käänteislukujen summaksi.

16. (K) Todista yhtälö

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$

[Merkintä $\binom{n}{k}$ tarkoittaa lukua $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ joka on sama kuin n-alkioisen joukon k-alkioisten osajoukkojen lukumäärä.]

17. (K) Joukko M on sellainen joukon $\{1, 2, \ldots, 15\}$ osajoukko, että minkään kolmen M:n alkion tulo ei ole neliöluku. Määritä M:n suurin mahdollinen alkioiden lukumäärä.

18. (K) Seitsemäntoista henkilöä käy kirjeenvaihtoa keskenään. Kirjeenvaihto käsittelee kolmea eri aihetta, mutta jokaiset kaksi kirjeenvaihtajaa käsittelevät keskenään vain yhtä aihetta. Osoita, että jotkin kolme näistä 17:stä käsittelevät keskinäisessä kirjeenvaihdossaan samaa aihetta.

19. (K) Pelaajat A ja B kirjoittavat vuorotellen lukuja 5×5-ruudukkoon. A, joka aloittaa, kirjoittaa aina luvun 1 ja B luvun 0. Kun ruudukko on täytetty, lasketaan jokaisen 3×3-osaneliön lukujen summa. Olkoon S näistä summista suurin. Määritä suurin S, jonka pelaaja A pystyy tuottamaan riippumatta siitä, miten B pelaa.

20. (K) Ympyrä on jaettu seitsemään yhtenevään sektoriin. Kukin näistä väritetään joko siniseksi, punaiseksi, keltaiseksi tai vihreäksi. Mitkään kaksi vierekkäistä sektoria eivät saa olla samanvärisiä. Monellako eri tavalla ympyrä voidaan värittää? (Kaksi väritystä, jotka voidaan muuntaa toisikseen kiertämällä ympyrää, ovat samat.)

Ratkaisuja

1. Tehtävän ratkaisulinja näyttäisi olevan ”ratkaise x kuudennen asteen yhtälöstä $x^6 - 18x^3 + 1 = 0$ ja sijoita saatu x lausekkeeseen $x^4 + x^{-4}$”. Helpommin pääsee käyttämällä aika usein esiintyvää temppua. Merkitään

$$u = x + \frac{1}{x}$$

ja käytetään hyväksi oletusta. Saadaan

$$u^3 = x^3 + 3x + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = 3u + 18.$$

Tästä kolmannen asteen yhtälöstä näkee melko helposti, että yksi ratkaisu on $u = 3$. (Jos haluaa edetä systemaattisesti, voi etsiä yhtälön mahdollisia kokonaislukuratkaisuja vakiotermin 18 tekijöiden ±1, ±2, ±3, ±6, ±18 joukosta.) On helppo päätellä (ts. tehdä jakolasku), että $u^3 - 3u - 18 = (u-3)(u^2 + 3u + 6)$. Yhtälöllä $u^2 + 3u + 6 = 0$ ei ole reaalilukuratkaisuja, koska sen diskriminantti on $9 - 24 < 0$. Tehtävän kannalta ainoa mahdollisuus on siis $u = 3$. Nyt päästään helposti eteenpäin: koska

$$9 = u^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2},$$

niin

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7.$$

Edelleen

$$49 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = x^4 + 2 + \frac{1}{x^4},$$

joten

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 47.$$

2. Mistä voidaan tietää, että ainakin yksi kolmesta luvusta on tasan 1? Yksi mahdollisuus on tehdä vastaoletus, esimerkiksi $a < 1 < b \leq c$ ja etsiä tähän perustuen jokin ristiriita tehtävän oletusten kanssa. Tämä ei onnistu helposti. Mutta jos voimme näyttää, että $(a-1)(b-1)(c-1) = 0$, tiedämme. että ainakin yksi tulon tekijä on 0, ja väite on todistettu. Lasketaan:

$$(a-1)(b-1)(c-1) = abc - ab - bc - ac + a + b + c - 1.$$

Kun termeihin abc, ab, bc ja ac sovelletaan tietoa $abc = 1$, saadaankin

$$(a-1)(b-1)(c-1) = -\frac{1}{c} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + a + b + c = 0.$$

3. Tämäntehtävän ratkaisemineen vaatii jonkin verran laskemista. Olkoot jonon jäsenet a, aq, aq^2 ja aq^3. Jonon jäsenten neliöt ovat a^2, a^2q^2, a^2q^4 ja a^2q^6. Molemmat jonot ovat geometrisia; sovelletaan geometrisen jonon summan kaavaa ($q \neq 1$)

$$a + aq + \cdots + aq^k = a\frac{1-q^{k+1}}{1-q},$$

(jonka perustelu on $S = a + aq + \cdots aq^k$, $qS = aq + aq^2 + \cdots + aq^{k+1}$, joista vähentämällä $(1-q)S = a(1-q^{k+1})$.) Siis

$$a\frac{1-q^4}{1-q} = 13, \quad \text{ja} \quad a^2\frac{1-(q^2)^4}{1-q^2} = 1261.$$

Luvut 13 ja 1261 on valittu hyvällä maulla: 1261 on 13:lla jaollinen, $1261 = 13 \cdot 97$. Jälkimmäisen yhtälön molemmat puolet voidaan siis jakaa tekijöihin ja ottaa huomioon ensimmäinen yhtälö:

$$a^2\frac{1-q^8}{1-q^2} = a\frac{1-q^4}{1-q} \cdot a\frac{1+q^4}{1+q} = 13a\frac{1+q^4}{1+q} = 13 \cdot 97,$$

joten

$$a\frac{1+q^4}{1+q} = 97.$$

Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} a - aq^4 = 13 - 13q \\ a + aq^4 = 97 + 97q. \end{cases}$$

Kun yhtälöt lasketaan puolittain yhteen, saadaan $2a = 110 + 84q$. Siis $a = 110 + 84q$. Sijoitetaan tämä parin ensimmäiseen yhtälöön. Yhtälöä $(55 + 2q)(1 - q^4) = 13(1 - q)$ supistetaan $(1-q)$:lla. Poistetaan sulkeet ja jaetaan yhtälö q^2:lla. Saadaan

$$42q^4 + 97q^3 + 97q^2 + 97q + 42 = 0 \quad \text{ja} \quad 42\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) + 97\left(q + \frac{1}{q}\right) + 97 = 0.$$

Neljännen asteen yhtälön ratkaisemiseksi sovelletaan nyt samaa ideaa kuin tehtävässä 1: otetaan käyttöön uusi tuntematon $u = q + \dfrac{1}{q}$. Silloin

$$u^2 = q^2 + \frac{1}{q^2} + 2.$$

Yhtälömme saa muodon

$$42(u^2 - 2) + 97u + 97 = 0 \quad \text{eli} \quad 42u^2 + 97u + 13 = 0.$$

Koska $97^2 = 9409$, $4 \cdot 41 \cdot 13 = 2184$ ja $9409 - 2184 = 7225 = 85^2$, toisen asteen yhtälön ratkaisukaava antaa suoraan

$$u = \frac{-97 \pm 85}{84}$$

eli $u = -\dfrac{1}{7}$ tai $u = -\dfrac{13}{6}$. Koska $|u| = \left|q + \dfrac{1}{q}\right| \geq 2$, vain jälkimmäinen u:n arvo voi tulla kyseeseen. Toisen asteen yhtälön $q + \dfrac{1}{q} = -\dfrac{13}{6}$ ratkaisut ovat $q_1 = -\dfrac{3}{2}$ ja $q_2 = -\dfrac{2}{3}$. Jos $q = -\dfrac{3}{2}$, niin $a = -8$ ja jonon luvut ovat -8, 12, -18, 27; jos $q = -\frac{2}{3}$, niin $a = 27$ ja jonon luvut ovat 27, -18, 12, -8.

4. Tämä tehtävä on tyyppiä *funktionaaliyhtälö*, yhtälö, jossa etsittävä tuntematon ei ole luku vaan funktio – nyt ei kuitenkaan itse funktio ole haussa, vaan sen eräs mahdollinen ominaisuus, nimittäin jaksollisuus. Tällaisessa tehtävässä toimitaan yleensä niin, että oletetaan tuntematon funktio olemassa olevaksi ja etsitään sille sellaisia ominaisuuksia, joiden perusteella funktio tulisi tarkemmin yksilöityä. Tässä tapauksessa funktio f von jo olemassa, ja voidaan lähteä selvittämään, miten se käyttäytyy, jos sen argumenttia kasvatetaan a:n sijasta a:n monikerroilla. Selvintä on lähteä katsomaan, mitä on $f(x+2a)$. Nyt havaitaan heti, että tehtävässä annetusta ehdosta on seurauksia: $f(x) \geq \dfrac{1}{2}$ ja $f(x)^2 \leq f(x)$ eli $f(x) \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Siis mielivaltaisella reaaliluvulla pätee

$$\begin{aligned}
f(x+2a) &= f((x+a)+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - f(x+a)^2} \\
&= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2} - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2} - \frac{1}{4} - \sqrt{f(x) - f(x)^2} - f(x) + f(x)^2} \\
&= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f(x)^2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2} + f(x) - \frac{1}{2} = f(x).
\end{aligned}$$

Funktio f on siis jaksollinen ja sen jakso on $2a$.

5. Erilaiset epäyhtälötehtävät ovat suosittuja kilpailutehtäviä. Itse asiassa kilpailijoiden oletetaan tuntevan muutamia perusepäyhtälötyyppejä, sillä kilpailutehtävät perustuvat usein niihin. Tämän tehtävän a-kohta ratkeaa kuitenkin algebrallisten lausekkeiden manipuloinnin avulla. Lausekkeita, joissa esiintyy neliöjuurien summia tai erotuksia voi usein kehitellä identiteetin $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ avulla. Niin tässäkin:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

koska $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$. Oikeanpuoleinen epäyhtälö tulee todistetuksi aivan samoin.

Tehtävän jälkimmäinen osa perustuu edelliseen osaan ja tärkeään "teleskooppisumma"-ideaan. Teleskooppisumma on sellainen monen yhteenlaskettavan summa, jossa ensimmäistä ja viimeistä yhteenlaskettavaa lukuun ottamatta jokaisen yhteenlaskettavan kumoavat yhdessä edellinen ja seuraava termi. Merkitään lyhyyden vuoksi

$$S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{m^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{m^2}}.$$

Kun edellä todistetuista epäyhtälöistä vasemmanpuolinen kirjoitetaan kaikilla n:n arvoilla 1:stä m^2:een ja kaikki epäyhtälöt lasketaan puolittain yhteen, saadaan

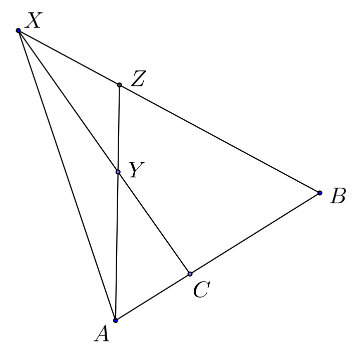
$$2\left((\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{m^2} - \sqrt{m^2-1}) + (\sqrt{(m^2+1} - \sqrt{m^2})\right) < S$$

eli $2(\sqrt{m^2+1} - 1) < S$ Koska $\sqrt{m^2+1} > m$, saadaan $2m - 2 < S$. S:n kokonaisosa on siis ainakin $2m-2$. Vastaavasti tehtävän alussa todistetun epäyhtälön oikeat puolet antavat

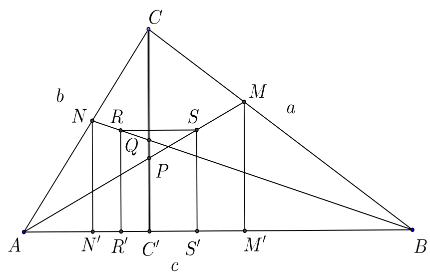
$$S < 2\left((\sqrt{1} - \sqrt{0}) + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + \cdots + (\sqrt{m^2} - \sqrt{m^2-1})\right) = 2m.$$

Luvun S kokonaisosan on siis oltava pienempi kuin $2m$. Tämä todistaa väitteen.

6. Tämä tehtävä on varsin tyypillinen geometrian tehtävä. Ratkaisu on puhdas päättely, ilman mitään laskennallisia elementtejä. Päättely on epäsuora. Kun on osoitettava, että S näkyy jokaisesta janan AB pisteestä, lähdetään oletuksesta, että näin ei olisikaan, ja katsotaan, mitä seuraa. Olkoon siis C jokin sellainen janan AB piste, että S ei näy C:stä. Se merkitsee, että S:ssä on ainakin yksi piste X niin, että jana CX ei kokonaan sisälly S:ään. Janalla CX on siis ainakin yksi piste Y, joka ei kuulu joukkoon S. Tarkastellaan kolmiota ABX. C on kolmion sivulla AB, joten jana CX ja piste Y ovat kolmion ABX sisällä. Puolisuora AY leikkaa kolmion sivun BX; olkoon leikkauspiste Z. Koska S näkyy pisteestä B ja X on S:n piste, niin jana BX ja siis myös piste Z sisältyy joukkoon S. Koska joukko S näkyy pisteestä A ja Z on S:n piste, jana AZ ja siis sen piste Y sisältyy joukkoon S. Nyt on saatu kaksi keskenään ristiriitaista tulosta: Y ei ole joukon S piste ja Y on joukon S piste. Tämä merkitsee, että tehty oletus, jonka mukaan S ei näy pisteestä C, on väärä. Mutta näin onkin tullut todistetuksi se, mitä haluttiin. S näkyy jokaisesta janan AB pisteestä.



7. Tämä tehtävä on kilpailumatematiikan geometristen laskutehtävien helpoimmasta päästä. Tarvitaan kuitenkin havainto, että kolmion lyhin korkeusjana on se, joka on piirretty pisintä sivua vastaan. Suoraviivainen ratkaisu etenee Pythagoraan lausetta hyödyntäen. Jos kolmio on ABC ja $AB = 10$, $BC = 21$, $CA = 17$, piirretään korkeusjana $AD = h$ ja merkitään $BD = x$. Suorakulmaisista kolmioista ABD ja ADC voidaan kummastakin muodostaa Pythagoraan lauseen mukainen lauseke AD^2:lle eli h^2:lle. Kun ne merkitään yhtä suuriksi, saadaan $10^2 - x^2 = 17^2 - (21 - x)^2$. Tämä sievenee herlposti ensimmäisen asteen yhtälöksi $42x = 252 = 6 \cdot 42$. Siis $x = 6$ ja $h^2 = 100 - 36 = 64 = 8^2$. Siis $h = 8$. – Toinen ratkaisu voisi perustua kolmion alan lausumiseen kolmion sivujen pituuksien avulla. Tämä onnistuu käyttämällä Heronin kaavaa, (joka kuuluu olevan koulussa ja ylioppilaskirjoituksissa jotenkin epäkelpo tieto, mutta kilpailumatematiikassa toki sallittua kalustoa) jonka mukaan kolmion ala S toteuttaa yhtälön $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, missä a, b ja c ovat kolmion sivujen pituudet ja $2p = a + b + c$ on kolmion piirin pituus. Tässä $2p = 21+17+10 = 48$, $p = 24$, ja $S^2 = 24\cdot3\cdot7\cdot14 = 2^2\cdot3^2\cdot7^2$. Siis $S = 3\cdot4\cdot7 = 84 = 4\cdot21$. Koska $2S = 21 \cdot h$, on $h = 8$.



8. Merkitään janojen PM ja QN keskipisteitä S:llä ja R:llä ja pisteiden N, R, S ja M kohtisuoria projektioita hypotenuusalla AB N':lla, R':lla, S':lla ja M':lla. Väite, että RS on AB:n suuntainen, tulee todistetuksi, jos $RR'S'S$ osoitetaan suorakulmioksi. Tähän riittää se, että osoitetaan $RR' = SS'$. Huomataan, että RR' ja SS' ovat puolisuunnikkaiden $NN'C'Q$ ja $PC'M'M$ kylkien keskipisteitä yhdistäviä janoja. Tällaisen janan pituus on puolisuunnikkaan kantojen pituuksien keskiarvo. Ei haittaa, jos pituusyksiköksi valitaan CC'. Siis $CC' = 1$. Kolmion ABC sivujen BC, CA ja AB pituuksia merkitään tavanomaisesti a:lla , b:llä ja c:llä.

Kun tehtävässä esiintyy kulmanpuolittajia, on hyvä arvaus, että voi käyttää kulmanpuolittajalausetta: ”Kolmion kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa.” Jotta tätä voitaisiin käyttää janojen $C'P$ ja $C'Q$ pituuksien määrittämiseen, on tiedettävä janojen AC' ja BC' pituudet. Nämähän saadaan siitä, että CAC' ja CBC' ovat kolmion ABC kanssa yhdenmuotoisia. Helpon laskun perusteella

$$AC' = \frac{b^2}{c} \quad \text{ja} \quad BC' = \frac{a^2}{c}.$$

Kulmanpuolittajalauseen perusteella (koska $CC' = 1$) on

$$C'P = \frac{AC'}{AC' + AC} = \frac{\dfrac{b^2}{c}}{\dfrac{b^2}{c} + b} = \frac{b}{b+c}.$$

Samoin

$$C'Q = \frac{a}{a+c}.$$

Tarvitaan vielä puolisuunnikkaiden $NN'C'Q$ ja $PC'M'M$ toisten kantojen NN' ja MM' pituudet. Yhdenmuotoisista kolmioista ANN' ja $AC'C$ saadaan, koska $CC' = 1$,

$$NN' = \frac{AN}{AC}.$$

Mutta kulmanpuolittajalauseen perusteella

$$\frac{AN}{AC} = \frac{c}{c+a}.$$

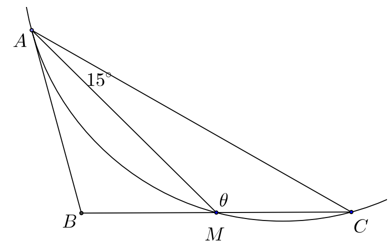
Aivan samoin saadaan

$$MM' = \frac{BM}{BC} = \frac{c}{c+b}$$

Siis

$$NN' + C'Q = \frac{c}{a+c} + \frac{a}{a+c} = 1$$

ja aivan samoin $MM' + C'P = 1$. Puolisuunnikkaiden $NN'C'Q$ ja $PC'M'M$ kantojen summa on sama, joten $RR' = SS'$, ja väite on todistettu. – Itse asiassa todistettiin vähän enemmänkin: suora RS on korkeusjanan CC' keskinormaali.



9. Tehtävän ratkaisussa esiintyy kaksi usein kilpailutehtävissä esiintyvää komponenttia: kehäkulma ja trigonometrinen päättely. Kolmion kärki A on aina ympyrällä, jonka jänne on MC ja jonka säteen määrittää se, että $\angle MAC = 15°$. On selvää, että $\angle ABC$ on suurin, kun A sijaitsee niin, että AB on tämän ympyrän tangentti. Nyt ympyrän kehäkulmien ominaisuuksien perusteella $\angle BAM = \angle MCA$. Tästä seuraa, että kolmiot ABM ja CBA ovat yhdenmuotoiset, joten

$$\frac{BM}{AB} = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{2 \cdot BM}.$$

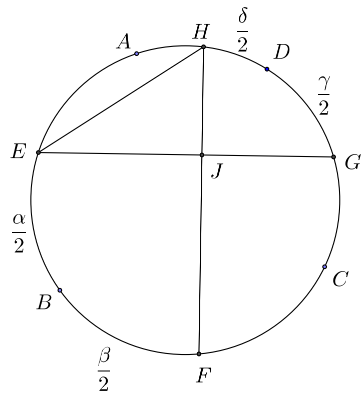
Tämä merkitsee sitä, että $AB = \sqrt{2} \cdot BM$. Olkoon $\angle AMC = \theta$. Silloin $\angle BAM = \angle MCA = 165° - \theta$. Sovelletaan sinilausetta kolmioon ABM; otetaan huomioon, että $\sin(\angle BMA) = \sin\theta$. Saadaan

$$\frac{1}{\sin 45°} = \sqrt{2} = \frac{AB}{BM} = \frac{\sin\theta}{\sin(165° - \theta)} = \frac{\sin\theta}{\sin(15° + \theta)}.$$

Siis $\sin 45° \sin\theta = \sin(15° + \theta) = \cos 15° \sin\theta + \sin 15° \cos\theta$. Tästä ratkaistaan

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin 15°}{\sin 45° - \cos 15°} = \frac{\sin 15°}{\cos 45° - \cos 15°} = \frac{\sin 15°}{-2\sin 30 \sin 15°} = -1.$$

(Tässä käytettiin hyväksi trigonometrista identiteettiä $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$.)
On siis $\theta = 135°$ joten $\angle ABC = 180° - (180° - \theta) - (165 - \theta) = 105°$.



10. Tässä tehtävässä keskeistä osaa näyttelee kehäkulmalause. Sama pätee suureen joukkoon geometrisia kilpailutehtäviä. Olkoot tehtävän kaaret ja niiden suuruudet asteissa $\overset{\frown}{AB} = \alpha$, $\overset{\frown}{BC} = \beta$, $\overset{\frown}{CD} = \gamma$ ja $\overset{\frown}{DA} = \delta$. Olkoot vielä kaarien keskipisteet järjestyksessä E, F, G ja H. (Kun "kehä on jaettu neljäksi kaareksi", pisteiden järjestys ympyrän kehällä on $AEBFCGDH$, eli pelkästään päätepisteiden avulla ilmaistun kaaren ja sen keskipisteen kaksitulkintaisuus ei tässä pääse haittaamaan.) Olkoon J janojen EG ja FH leikkauspiste. Nyt $\overset{\frown}{EF} = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2}$. Kehäkulmalauseen perusteella on siis $\angle FHE = \dfrac{1}{4}(\alpha+\beta)$. Aivan samoin perustein saadaan $\angle HEG = \dfrac{1}{4}(\gamma+\delta)$. Mutta $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360°$. Kolmiossa EJH on kulmien JHE ja HEJ summa $\dfrac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 90°$. Kolmion kolmas kulma $\angle EJH$ on silloin $90°$. Siis $EG \perp FH$.

11. Tehtävässä etsitään yhtälön $2016 = x^2 - y^2$ kokonaislukuratkaisua. Koska $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, lukujen $x-y$ ja $x+y$ on oltava luvun $2016 = 32 \cdot 63 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ tekijä. Tekijöistä pienempi, $x - y$, on enintään $\sqrt{2016} = 4 \cdot 3 \cdot \sqrt{14} < 12 \cdot 4 = 48$. Luvuista $x - y$ ja $x + y$ ainakin toisen on oltava parillinen. Mutta jos $x \pm y = 2k$, niin $x \mp y = x \pm y \mp 2y = 2(k \mp y)$, joten molempien lukujen $x + y$ ja $x - y$ on oltava parillisia. Yhtälöparilla

$$\begin{cases} x + y = 2m \\ x - y = 2n \end{cases}$$

on aina kokonaislukuratkaisu $x = m+n$, $y = m-n$. Ratkaisujen lukumäärä on siten sama kuin sellaisten luvun 2016 parillisten tekijöiden n määrä, jotka ovat < 48 ja joille $\dfrac{1}{n} \cdot 2016$ on parillinen. Näitä ovat $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$, $2 \cdot 3^2 = 18$, $2 \cdot 7 = 14$, $2 \cdot 3 = 6$, $4 \cdot 9 = 63$, $4 \cdot 7 = 28$, $4 \cdot 3 = 12$, $8 \cdot 3 = 24$, 2, 4, 8 ja 16. Eri tapoja on siis 12.

12. Neljä peräkkäistä kokonaislukua ovat $n - 1$, n, $n + 1$ ja $n + 2$ $(n \geq 2)$. Niiden tulo on $n(n+1)(n-1)(n+2) = (n^2+n)(n^2+n-2) = (n^2+n-1+1)(n^2+n-1-1) = (n^2+n-1)^2-1$. Koska $n \geq 2$, $n^2+n-1 \geq 5$. Ainoa neliöluku, joka on yhtä suurempi kuin toinen neliöluku on 1. Neljän peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun tulo ei siis ole neliöluku.

13. Kun tehtävä on osoittaa todeksi yhtälö kaikilla luonnollisilla luvuilla, induktiotodistus on usein järkevä vaihtoehto. "Luonnollisiin lukuihin" on Suomessa tapana lukea 0; tässä tapauksessa käytäntö on mukava, koska induktio on helppo käynnistää nollasta: $2^2 \cdot 3^0 - 4 = 0$ ja 0 on jaollinen 25:llä. Otettavaksi jää vielä induktioaskel. Sitä varten oletetaan, että $2^{k+2}3^k + 5k - 4 = 25m$. Tällöin $2^{(k+1)+2}3^{k+1} + 5(k+1) - 4 = 6 \cdot 2^{k+2}3^k + 5k + 1 = 6(25m - 5k + 4) + 5k + 1 = 6 \cdot 25m - 25k + 25$. Kuku $2^{(k+1)+2}3^{k+1} + 5(k+1) - 4$ on siis jaollinen 25:llä. Tehtävän väite on tosi induktioperiaatteen nojalla.

14. Tämä tehtävä edellyttää hiukan muistamista. Tässä tapauksessa muistettava relaatio on

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

(Jos kaavan muistaa suunnilleen, voi hakea tukea muistilleen kokeilemalla pieniä n:n arvoja. Kaavan voi todistaa oikeaksi induktiolla ja sen voi eri tavoin johtaa. Yksi tie on tehdä yrite $1^2+2^2+\cdots+n^2 = An^3+Bn^2+Cn+D$, sijoittaa kaavaan $n = 1, 2, 3$ ja 4 ja ratkaista A, B, C ja D syntyneestä lineaarisesta yhtälöryhmästä.) Lukujen $1^2, \ldots, n^2$ keskiarvo on siis $\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)$. Jotta tämä olisi neliöluku, sen on oltava kokonaisluku. Koska $2n+1$ on pariton, $n+1$ on parillinen. Siis $n = 2k+1$. Jos n olisi jaollinen kolmella, kumpikaan luvuista $n+1$, $2n+1$ ei olisi. Siis n on kolmella jaoton pariton luku eli muotoa $6k \pm 1$ oleva luku. Oletetaan ensin, että $n = 6k-1$. Silloin $\frac{1}{6}(n+1)(2n+1) = k(12k-1)$. Luvuilla p ja $12p-1$ ei ole yhteisiä tekijöitä. Lukujen tulo voi olla neliöluku vain, jos k ja $12k-1$ ovat neliölukuja. Koska $(2r+1)^2 = 4(r^2+r)+1$, jokainen pariton neliöluku antaa 4:llä jaettaessa jakojäännöksen 1. $12k-1$ ei siis voi olla neliöluku. Tarkastellaan sitten tapausta $n = 6k+1$. Nyt $\frac{1}{6}(n+1)(2n+1) = (3k+1)(4k+1)$. Koska $4(3k+1)-3(4k+1) = 1$, lukujen $3k+1$ ja $4k+1$ suurin yhteinen tekijä on 1. Molemmat ovat siis neliölukuja. Kun katsotaan tarkemmin äsken tehtyä päättelyä, jonka mukaan parittoman neliöluvun jakojäännös neljällä jaettaessa on 1, huomataan, että $r(r+1)$ on aina parillinen luku, joten itse asiassa $(2r+1)^2 = 8q+1$; parittoman neliöluvun jakojäännös 8:lla jaettaessa on aina 1. Mutta tämä merkitsee, että $4k+1$ on neliöluku vain, kun k on parillinen. Mutta silloin myös $3k+1$ on pariton neliöluku ja senkin jakojäännös 8:lla jaettaessa on 1. Lukujen erotus, eli k, on siis jaollinen 8:lla: $k = 8p$. Siis $32p+1$ ja $24p+1$ ovat neliölukuja. Kokeilemalla huomataan, että pienin ehdon toteuttava p on 7: $32p+1 = 225 = 15^2$ ja $24p+1 = 169 = 13^2$. Tällöin $n = 6 \cdot 8 \cdot 7 + 1 = 337$.

15. Tämän tehtävän ratkaisussa tulee esiin eräs keskeinen lukuteoriassa hyödynnettävä ilmiö. Jokaisessa positiivisten kokonaislukujen osajoukossa on pienin luku. Kirjoitetaan jokainen positiivinen rationaaliluku muotoon $\frac{p}{q}$, missä p ja q ovat positiivisia kokonaislukuja, joiden suurin yhteinen tekijä on 1. Jos nyt olisi sellaisia rationaalilukuja $\frac{p}{q}$, $p < q$, joita ei voi kirjoittaa eri positiivisten kokonaislukujen käänteislukujen summaksi, olisi olemassa jokin sellainen luku, jolle p on mahdollisimman pieni. Joka tapauksessa $p > 1$. Olkoon $\frac{p_0}{q_0}$ jokin tällainen luku. Olkoon nyt vielä n pienin positiivinen kokonaisluku, jolle

$$\frac{1}{n} < \frac{p_0}{q_0}.$$

Silloin on

$$\frac{1}{n} < \frac{p_0}{q_0} < \frac{1}{n-1}.$$

Siis

$$0 < \frac{p_0}{q_0} - \frac{1}{n} = \frac{p_0 n - q_0)}{q_0 n}, \quad 0 < \frac{1}{n-1} - \frac{p_0}{q_0} = \frac{q_0 - p_0 n + p_0}{q_0(n-1)}.$$

Näin ollen $0 < p_0n - q_0 < p_0$. Mutta

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{n} + \frac{p_0}{q_0} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{p_0n - q}{q_0n}.$$

Koska p_0:stä tehty oletus merkitsee, että $\frac{p_0n - q_0}{q_0n}$ on sellainen rationaaliluku, joka voidaan kirjoittaa eri suurten positiivisten kokonaislukujen käänteislukujen summaksi. Ja

$$\frac{p_0n - q_O}{q_0n} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{1}{n},$$

joten yksikään nimittäjä tässä summassa ei voi olla n. Todistus on valmis.

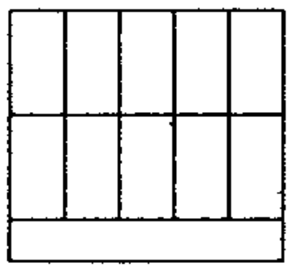
16. Tehtävän ratkaisu on tyypillinen laskennollisen kombinatoriikan tehtävän ratkaisu: lasketaan sama asia kahdella eri tavalla ja näin saadaan kaksi eri lauseketta, joiden onkin siis esitettävä samaa lukua. Tarkastellaan joukkoa A, jossa on $m + n$ alkiota. Jaetaan se jollakin tavalla kahdeksi erilliseksi osajoukoksi B ja C niin, että B:ssä on m alkiota ja C:ssä on n alkiota. Nyt jokainen A:n r-alkioinen osajoukko E jakautuu kahdeksi osajoukoksi $B \cap E$ ja $C \cap E$; jos $B \cap E$:ssä on k alkiota, niin $C \cap E$:ssä on $r - k$ alkiota. Toisaalta, jos otetaan mikä hyvänsä B:n k-alkioinen osajoukko E_1 ja C:n $(r-k)$-alkioinen osajoukko E_2, niin $E_1 \cup E_2 = E$ on A:n r-alkioinen osajoukko. Nyt joukkoja E_1 on $\binom{m}{k}$ kappaletta ja joukkoja E_2 on $\binom{n}{r-k}$ kappaletta. A:n r-alkioinen osajoukko voidaan siis muodostaa valitsemalla jokin B:n k-alkioinen osajoukko ja liittämällä siihen jokin C:n $(r-k)$-alkioinen osajoukko kaikkiaan $\binom{m}{k} \cdot \binom{n}{r-k}$ eri tavalla. Mutta eri k:n arvoilla saadaan eri joukkoja, joten kaikkiaan $\binom{m+n}{r}$ eli A:n r-alkioisten osajoukkojen lukumäärä on lukujen $\binom{m}{k} \cdot \binom{n}{r-k}$ summa eri k:n arvoilla. Mutta tämä yhtäsuuruus on juuri tehtävässä haettu yhtäsuuruus.

17. Tehtävä on lukuteorian ja kombinatoriikan rajamaastossa. Joukkoja käsitteleviä tehtäviä kuitenkin yleensä pidetään kombinatorisina. Havaitaan, että $1 \cdot 4 \cdot 9 = 6^2$, $2 \cdot 6 \cdot 12 = 12^2$, $3 \cdot 5 \cdot 15 = 15^2$ ja $7 \cdot 8 \cdot 14 = 28^2$. Joukolla M ei voi olla osajoukkonaan mikään joukoista $\{1, 4, 9\}$, $\{2, 6, 12\}$, $\{3, 5, 15\}$, $\{7, 8, 14\}$. Joukot ovat erillisiä, joten joka joukosta ainakin yhden luvun on oltava M:n ulkopuolella. M:ssä voi olla enintään $15 - 4 = 11$ alkiota. Jos lisäksi $10 \notin M$, niin M:an alkioidenlukumäärä on enintään 10. Oletetaan että $10 \in M$. Silloin M:llä ei saa olla osajoukkoinaan joukkoja $\{2, 5\}$, $\{6, 15\}$, $\{1, 4, 9\}$ eikä $\{1, 4, 9\}$. Jos näiden ohella $\{3, 12\}$ ei ole M:n osajoukko, M:ssä on enintään 10 alkiota. Jos taas $\{3, 12\} \subset M$, niin mikään viidestä erillisestä joukoista $\{1\}$, $\{4\}$, $\{9\}$, $\{2, 6\}$, $\{5, 15\}$ ei voi sisältyä M:ään. Tällöinkin M alkioiden lukumäärä on enintään 10. On vielä esitettävä jokin tehtävän ehdon toteuttava 10-alkioinen M. Tällainen on

$$M = \{1, 2, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14\}.$$

18. Tehtävässä käsiteltävä rakenne on ns. verkko, jonka "solmuja" ovat henkilöt ja "särmiä" kirjeenvaihtosuhteet. Tehtävä olisi voitu muotoilla esimerkiksi näin. "Verkossa on 17 solmua, ja jokainen on yhdistetty jokaiseen muuhun särmällä. Osoita, että jos kukin särmä väritetään siniseksi, punaiseksi tai keltaiseksi, verkossa on kolmio, jonka särmät ovat samanväriset." – Tehtävän ratkaisu on tyypillinen "laatikkoperiaatteen" sovellus. Valitaan kirjeenvaihtajista yksi; olkoon hän esimerkiksi A. Nyt A vaihtaa kirjeitä 16 muun kanssa ja käsittelee kunkin kanssa jotain kolmesta aiheesta. Ei voi olla niin, että A käsittelisi kutakin aihetta enintään viiden muun kanssa. Jos näin olisi, A:lla olisi enintään 15 kirjeenvaihtokumppania. Jotakin aihetta, sanokaamme aihetta I, A siis käsittelee ainakin kuuden muun kanssa. Jos näiden kuuden muun joukossa on kaksi, sanokaamme B ja C, jotka käsittelevät aihetta I keskinäisessä kirjeenvaihdossaan, A, B ja C muodostavat vaaditun kolmikon. Ellei näin ole, käsittelee ainakin kuusi henkilöä keskinäisissä kirjeenvaihdoissaan vain aiheita II ja III. Otetaan näistä kuudesta yksi, sanokaamme D. D käsittelee viiden kirjeenvaihtokumppaninsa kanssa aiheita II ja III. Nämä viisi käsittelevät myös keskinäisissä kirjeenvaihdoissaan vain aiheita II ja III. Nyt ei voi olla niin, että D käsittelisi kumpaakin aihetta enintään kahden kumppanin kanssa, tällöinhän kumppaneita olisi enintään neljä. Voidaan siis olettaa, että on kolme henkilöä, joiden kanssa D käsittelee esimerkiksi aihetta II. Jos näissä kolmessa on jotkin kaksi, esimerkiksi E ja F, jotka käsittelevät aihetta II keskinäisessä kirjeenvaihdossaan, niin D, E ja F on vaadittu kolmikko. Ellei tällaista paria ole, on ainakin kolme kirjeenvaihtajaa, jotka kaikki käsittelevät aihetta III, ja todistus on valmis.

19. Pelit ja niiden voittostrategiat ovat suosittu kilpatehtävien aihepiiri. Tarkastelu on usein kaksisuuntainen: mitä toinen pelaaja ainakin voi saavuttaa ja mitä toinen pelaaja ainakin voi saavuttaa. Osoitetaan ensin, että B voi aina pelata niin, että $S \leq 6$. Sijoitetaan ruudukkoon kuvan mukaiset 10 1×2-laattaa. Aina kun A kirjoittaa ykkösen toistaiseksi tyhjään laattaan, B kirjoittaa laatan toiseen ruutuun nollan. Jokainen 3×3-neliö sisältää ainakin kolme nollaa, joten $S \leq 6$.



Osoitetaan sitten, että A voi aina pelata niin, että $S \geq 6$. Numeroidaan ruudukon vaakarivit 1, 2, 3, 4, 5 ja pystyrivit a, b, c, d, e. A. ensimmäinen valinta on ruutu $c3$. Kiertosymmetrian vuoksi voidaan olettaa, että B sijoittaa ensimmäisen nollan riveille 4 ja 5. A laittaa sitten ykkösen ruutuun $c2$. Ellei B sijoita seuraavalla vuorolla nollaa ruutuun $c1$, A laittaa siihen vuorollaan ykkösen. Tämän jälkeen ainakin toinen suorakaiteista [$a1$, $b3$] tai [$d1$, $e3$] on vielä tyhjä, ja A voi sijoittaa siihen ainakin kolme ykköstä. Tällöin $S \geq 6$. Jos taas B sijoittaa nollan $c1$:een, niin A pystyy saamaan kaksi ykköstä "suikaleeseen" [$b1$, $b3$] ja ainakin kolme ykköstä yhteensä kahteen suikaleeseen [$a1$, $a3$], [$d1$, $d3$]. Silloin joko neliöön [$a1$, $c3$] tai neliöön [$b1$, $d3$] tulee ainakin kuusi ykköstä.

20. Tämän tehtävän ratkaisu saattaa olla helpompi, jos sen "vierekkäiset sektorit" mallintaa merkkijonon kirjaimina. Olkoon s_n 4:stä aakkosesta (esimerkiksi s, p, v ja k muodostettujen sellaisten n:n merkin pituisten jonojen lukumäärä, joissa koskaan ei sama merkki toistu. Selvästi $S_1 = 4$ ja $S_{n+1} = 3S_n$ (jokaisen n-jonon loppuun voidaan liittää jokin muu kuin jonossa oleva viimeinen merkki). Jos lisätään vaatimus, että jonon ensimmäinen ja viimeinen merkki eivät saa olla samoja, ja merkitään T_n:llä tällaisten, edelleen n:n pituisten jonojen määrää, niin n-jonoja, joissa ensimmäinen ja viimeinen merkki ovat samat, on $S_n - T_n$ kappaletta. Jokaiseen tällaiseen jonoon saa liittää jonkin kolmesta merkistä. Jokaiseen jonoon, joissa ensimmäinen ja viimeinen merkki ovat erilaiset, voi liittää vain kaksi uutta merkkiä. Saadaan siis palautuskaava $T_{n+1} = 3(S_n - T_n) + 2T_n = 3S_n - T_n = S_{n+1} - T_n$. Tässä tehtävässä kiinnostaa T_7. Voidaan laskea suoraan:

n	1	2	3	4	5	6	7
s_n	4	12	36	108	324	972	2916
t_n	0	12	24	84	240	732	2184

Jos nyt seitsemän merkin jono, jossa ensimmäinen ja viimeinen merkki ovat eri merkkejä, kierretään renkaaksi, saadaan malli ympyrän seitsemän sektorin väritykselle eri värein. Toisaalta, jos rengas katkaistaan mistä paikasta tahansa, saadaan seitsemän merkin jono, jossa ensimmäinen ja viimeinen merkki ovat eri merkkejä. Eri katkaisut tuottavat eri jonot. Ellei näin olisi, eli jos paikasta j alkava jono olisi sama kuin paikasta $j + p$ alkava, niin paikoissa j, $j+p$, $j+2p$, $\ldots$, olisi sama merkki; koska 7 on alkuluku, jono $(j+p)$ mod 7 käy läpi kaikki paikat; kaikki merkit olisivat siis samoja, vastoin oletusta. Keskenään erilaisia värityksiä on siis $T_7/7 = 312$ kappaletta.