Pythagoraan polku 5.4.2008 – RATKAISUT

1. Määritä se a, jolla yhtälön

$$x^2 + ax - a - 2 = 0$$

ratkaisujen neliöden summa on pienin.

Ratkaisu:
Kun 2. asteen termin kerroin on 1, niin ratkaisujen summa on 1. asteen termin kertoimen vastaluku ja ratkaisujen tulo vakiotermi. Siis

$$x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2-2x_1x_2 = a^2-2(-a-2) = a^2+2a+4 = a^2+2a+4 = (a+1)^2+3 \geq 3.$$

Edellisessä epäyhtälössä on yhtäsuuruus, kun $a = -1$.

2. Kaksi "2×2-nastan" Lego-palikkaa voidaan liittää toisiinsa kolmella eri tavalla. Tavat näkyy alla olevasta kuvasta (punaisten palikoiden yhdistelmiä ei hyväksytä: vasempi on rotaatio ja oikealla olevat palikat eivät ole kiinni). Kuinka monta erilaista rakennelmaa (rotaatiot poislukien) voi kolmesta kuvan mukaisesta Lego-palikasta tehdä?

Ratkaisu:
Kahden palikan torniin kolmas voidaan laittaa 5 tavalla, portaisiin 16 tavalla ja kolmanteen kahden palikan muotoon 8 tavalla. Siis vastaus on 29.

3. Etsi kaikki kokonaisluvut x ja y, jotka toteuttavat yhtälön

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{7}.$$

Ratkaisu:
Huomataan, että $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow 7x + 7y = xy \Leftrightarrow (x-7)(y-7) = 7^2$. Näin ollen termit $x-7$ ja $y-7$ ovat luvun 49 tekijöitä eli $\pm 1, 7$ tai ± 49 (-7 ei käy). Siis viisi ratkaisuparia ovat (taulukossa $t_1 t_2 = 49$)

$x = t_1 + 7$	8	56	6	-42	14
$y = t_2 + 7$	56	8	-42	6	14

4. Suorakulmaisen särmiön muotoisen huoneen lattian nurkkien koordinaatit ovat (0,0,0), (5,0,0), (5,7,0) ja (0,7,0). Huoneen korkeus on 3. Lattialla pisteessä (1,1,0) on hämähäkki. Se pystyy ryömimään lattiaa, seiniä ja kattoa pitkin. Hämähäkki aikoo liikkua katossa sijaitsevaan pisteeseen (4,5,3) lyhintä mahdollista reittiä pitkin. Kuinka pitkä on tämä reitti?

   Ratkaisu:
   Levitetään huone xy-tasoon neljällä tavalla ja piirretään reitin alku- ja loppupisteiden väliin suora. Valitaan suorista lyhin; sen pituus on $\sqrt{4^2+8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$. Alla kaksi esimerkki tasolevitystä, joista vasemmanpuoleinen on etsitty lyhin.

   (kuva)

5. Kuinka monta nollaa on luvun 100! lopussa? $(100! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100)$

   Ratkaisu:
   Luvun perässä olevia nollia on yhtä monta kuin luvussa on tekijöinä kymppejä. Koska $10 = 2 \cdot 5$ ja lukua 2 esiintyy tulon 100! joka toisessa tekijässä, luvun 5 esiintymiskerrat tulossa 100! ovat ratkaisevia. Luvuista $1, 2, \ldots, 100$ 20 on viitosen monikertoja ja lisäksi 25, 50, 75 ja 100 ovat tuplamonikertoja. Siis tulossa on 24 viitosta ja luvun 100! lopussa on 24 nollaa.

6. Henkilö A maalaa talon 20:ssa tunnissa ja henkilö B maalaa saman talon 30:ssä tunnissa. Kuinka kauan talon maalaus kestäisi jos molemmat henkilöt maalaisivat taloa yhtä aikaa?

   Ratkaisu:
   A:n maalaamisnopeus on $\frac{1}{20}$ taloa tunnissa ja B:n $\frac{1}{30}$ taloa tunnissa. Yhdessä heidän maalaamisnopeutensa on siis $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{1}{12}$ taloa tunnissa. Siten talon maalaaminen yhteispelillä veisi 12 tuntia.

7. Todista, että on olemassa irrationaaliluvut x ja y, siten että $x^y = \frac{1}{2}$ ja $xy = 1$.

   Ratkaisu:
   Olkoon $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, joka on hyvin määritelty ja jatkuva joukossa $\mathbb{R}_+$. Nyt $f(\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{27} < \frac{1}{2}$ ja $f(1) = 1 > \frac{1}{2}$. Koska f on jatkuvat, niin on olemassa jokin $\frac{1}{3} < x < 1$, siten että $f(x) = \frac{1}{2}$. Tehdään vastaoletus:

olkoon $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, p ja q suhteellisia alkulukuja (eli syt$(p,q) = q$). Nyt koska $\frac{p}{q} = x < 1$ eli $q > p$.

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p}} = \frac{1}{2} \Rightarrow p^q 2^p = q^q \Rightarrow 2|q.$$

Nyt koska $q > p$, niin luvussa q^q on tekijöinä alkulukuja 2 enemmän kuin p kappaletta, jolloin myös $2|p$ ja syt$(p,q) \geq 2$. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä p ja q olivat oletuksen mukaan suhteellisia alkulukuja. Siis löydetty x on oltava irrationaalinen. Valitaan siten $y = \frac{1}{x}$, jolloin $x^y = \frac{1}{2}$ ja $xy = 1$. (Tehtävän laatinut Raitis Ozols, Latvia)

8. Neljä merirosvoa ovat saaneet aarteekseen 100 kultarahaa. Heillä on tarkka säännöstö kuinka rahat jaetaan. Yksi merirosvoista on kapteeni, toinen adjutantti, kolmas korpraali ja neljän tavallinen rivimies. Kapteeni saa ensimmäiseksi ehdottaa kuinka rahat jaetaan kullekin merirosvolle. Kaikki merirosvot äänestävät hyväksytäänkö ehdotus vaiko ei, mukaanlukien kapteeni itse. Mikäli yli 50% äänistä hyväksyy, rahat jaetaan kuten on ehdotettu ja he jatkavat matkaa. Mikäli 50% tai yli äänistä hylkää ehdotuksen, kapteeni heitetään laidan yli mereen ja jäljelle jääneet tekevät uuden iteraation samaa prosessia, jossa nyt adjutantti saa ehdottaa rahojen jakamista. Mikäli adjutantin ehdotus hylätään, hänetkin heitetään mereen ja seuraavaksi korpraali saa ehdottaa rahan jakoa kahdelle jäljelle jääneelle samalla prosessilla. Jos korpraalikin lentää laidan yli, rivimies saa kaiken. Merirosvot ovat täysin loogisia sekä ajavat viimeiseen lanttiin asti omaa etuaan ohi kaiken muun. He myös priorisoivat toisen merirosvon laidan yli heittämisen oman kuolemansa ohi, eli mieluummin kuolevat itse ja tapattavat lisäksi jonkun toisen kuin eivät ketään. Mikä on kapteenin paras ehdotus, jolla hän saa eniten rahaa?

   Ratkaisu:
   Numeroidaan merirosvot, kapteeni on nro 4, adjutantti nro 3, korpraali nro 2 ja rivimies nro 1. Mikäli nro 1 olisi enää tähteellä, hän saisi kaiken. Siis tilanteessa, jossa vain nrot 1 ja 2 ovat jäljellä, nro 1 äänestää aina ”ei”. Silloin hän saa itselleen kaiken. Jos nrot 1, 2 ja 3 ovat jäljellä, niin nro 3 tekee ehdotuksen ja tarjoaa 2:lle yhden kolikon. Nyt nro 2 äänestää ”kyllä”, sillä muutoin hän jää kaksin 1:n kanssa ja lentää yli laidan. 1:lle ei siis tarvitse tarjota mitään, sillä kahdella äänellä nro 3

voittaa tällä taktiikalla kisan ja saa 99 lanttia. Kun kaikki ovat vielä hengissä, nro 4:n pitäisi tarjota 3:lle yli 99 lanttia, jotta nro 3 äänestäisi "kyllä", jolloin muille ei jäisi mitään. Muutenhan 3 äänestää "ei", sillä hän voi vain parantaa asemaansa, jos nro 4 lentäisi laidan yli. Täten numerolle 3 ei kannata tarjota lanttiakaan, koska hänen ääntään ei voi voittaa. Koska nro 2 saisi 4:n lentäessä laidan yli yhden kolikon, on hänelle tarjottava nyt kaksi kolikkoa. Nro 1:lle kannattaa tarjota yksi kolikko, jolloin hän äänestää "kyllä" ja tulos onkin jo varma. Kapteeni siis saa 97 kolikkoa, adjutantti ei mitään, korpraali kaksi kolikkoa ja rivimies yhden.

9. Määritä käyrän $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ sen tangentin yhtälö, joka ei ole samansuuntainen minkään muun tangentin kanssa.

   Ratkaisu:
   Derivaatta $y' = 3x^2 + 2ax + b$ saa kaikki arvot kaksi kertaa, paitsi minimiarvonsa. Koska $y'' = 6x + 2a$, niin minimikohta on $x = -\frac{a}{3}$. Sijoittamalla saadaan, että kysytty tangentti on

$$y = -\frac{a^3}{27} + c + (b - \frac{a^2}{3})x.$$

10. Kun yksikköympyrä vierii pitkin x-akselia, niin ympyrän kehän kiinteä piste piirtää *sykloidi*-käyrän. Tällöin ympyrän keskipiste liikkuu suoralla $y = 1$. Olkoon käyrän piirtävä piste on origossa, kun ympyrän keskipiste on pisteessä (0,1). (a) Määritä tämän sykloidin yhtälö parametrimuodossa. (b) Mikä on sykloidi-käyrän pituus, kun ympyrä on vierinyt kulman t verran? $(0 \leq t \leq 2\pi)$

    Ratkaisu:

    (a) Kuvassa sykloidi on vierinyt kulman t. Määritetään tällöin pisteen $P = (x, y)$ koorditaatit. Huomaa, että $OT = kaari\ TP = t$. Pituudet PQ ja CQ saadaan kolmiosta CQP. Nyt

$$x = OT - PQ = t - \sin(\pi - t) = t - \sin t$$
$$y = TC + CQ = 1 + \cos(\pi - t) = 1 - \cos t$$

(kuva)

(b) Tarkastellaan pientä käyrän pätkää

$$ds = \frac{ds}{dt}dt = \sqrt{(\frac{ds}{dt})^2}dt = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}dt.$$

Nyt käyrän pituus välillä $0 \leq t \leq t_0$ on

$$s = \int_0^{t_0} ds = \int_0^{t_0} \sqrt{(1-\cos t)^2 + (\sin t)^2}dt = \int_0^{t_0} \sqrt{2 - 2\cos t}dt.$$

11. Laske

$$\int_0^2 \sqrt{1-(x-1)^2}dx$$

Ratkaisu:
$y^2 + (x-1)^2 = 1^2$ on ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on $(1, 0)$ ja säde 1. Ratkaisemme tästä muuttujan y:

$$y^2 = 1 - (x-1)^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1-(x-1)^2}.$$

Tästä huomaamme, että integraali on tämän ympyrän yläosan pinta-ala, joka on siis puolet koko ympyrän alasta. Tulos on siis $\frac{\pi}{2}$.

12. Olkoon P erään tasokuvion reunan pituus ja S kyseisen kuvion pinta-ala. Määritellään suhde α kaavalla

$$\alpha = \frac{S}{P^2}.$$

Onko neliö mahdollista jakaa kahteen osaan siten että jokaisen osan α suhdeluku on suurempi kuin alkuperäisen neliön? Perustele.

Ratkaisu:

Neliön reuna 10 yksikköä ja pienen viisikulmion sivut ovat 1, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ja $\frac{1}{2}$. (Tehtävän laatinut Raitis Ozols, Latvia)

13. Suorakulmio on leikattu osiin kuten alla olevasta kuvasta käy ilmi. Kuvioon on annettu joidenkin osien pituuksia. Todista että kuvioista voidaan niitä siirtelemällä ja kääntelemällä muodostaa neliö.

12

5

10

9

3

Ratkaisu:

Kuvion (alla vasemmalla) lävistäjä on $10 + 5 = 15$ yksikköä pitkä. x voidaan ratkaista Pythagoraan lauseella, sillä suorakaiteessahan kulmat ovat suoria. Siis $x = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$. Näistä kolmesta sivusta, pituudeltaan 9, 12 ja 15 muodostunut kolmio on yhdenmuotoinen kolmion kanssa jonka hypotenuusa on 5:n pituinen ja toinen sivu y. Tämä johtuu siitä, että sivut pituuksiltaan 9 ja y ovat yhdensuuntaiset ja siten sivujen 5 ja y välinen kulma ja sivujen pituuksiltaan 9 ja 15 välinen kulma ovat samat. Nyt yhdenmuotoisten kolmioiden perusteella vastinsivujen suhteet ovat samat eli

$$\frac{5}{y} = \frac{15}{9} \Leftrightarrow y = 3.$$

Nyt edelleen Pythagoraan lauseella $z = \sqrt{5^2 - y^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Koska suorakulmion vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät, niin $w = z = 4$. Nyt onkin asia selvä. Alla oikean puoleiseen kuvaan on kasattu osista neliö.

z

y

12

5

10

9

3

x

w

14. Lattiafunktio $\lfloor x \rfloor$ antaa ulos kokonaisluvun, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin x. Eli esimerkiksi $\lfloor 1,73 \rfloor = 1$ ja $\lfloor 7 \rfloor = 7$. Määritä funktio

$f(n)$ siten että $\lfloor f(n) \rfloor$ muodostaa jonon

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots$$

kun n käy läpi kaikki kokonaisluvut yhdestä eteenpäin.

Ratkaisu:
Olkoon u_n annetun jonon n:s termi. Kokonaisluku k esiintyy jonossa ensimmäisen kerran kun

$$n = 1 + 2 + \ldots + (k-1) + 1 = \frac{(k-1)k}{2} + 1.$$

Siten $u_n = k$, aina kun

$$n = \frac{(k-1)k}{2} + 1 + m,$$

missä $m = 0, 1, \ldots, k-1$. Tästä seuraa, että

$$\frac{k^2 - k + 2}{2} = \frac{(k-1)k}{2} + 1 \leq n \leq \frac{(k-1)k}{2} + 1 + k - 1 = \frac{k^2 + k}{2}.$$

Kun kerrotaan edellinen epäyhtälö puolittain 8:lla saamme

$$\begin{aligned} 4k^2 - 4k + 8 \leq 8n \leq 4k^2 + 4k &\Leftrightarrow \\ (2k-1)^2 + 7 \leq 8n \leq (2k+1) - 1 &\Leftrightarrow \\ (2k-1)^2 \leq 8n - 7 \leq (2k+1)^2 - 8 < (2k+1)^2 &\Leftrightarrow \\ 2k - 1 \leq \sqrt{8n-7} < 2k + 1 &\Leftrightarrow \\ 2k \leq \sqrt{8n-7} + 1 < 2k + 2 &\Leftrightarrow \\ k \leq \frac{\sqrt{8n-7} + 1}{2} &< k + 1. \end{aligned}$$

Tästä saamme siis halutun funktion $f(n) = \frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}$.

15. Tässä tehtävässä noppa tarkoittaa tavallista kuusitahkoista noppaa, jonka silmäluvut ovat 1 – 6. Nopan heittosarja 2–1–1 tarkoittaa, että noppaa heitetään kolmesti, ensimmäisen heiton silmäluku on 2 ja kahden muun heiton silmäluku on 1. Tämän heittosarjan summa on 4 (2 + 1 + 1). Kaikkiaan summan 4 tuottaa kahdeksan eri heittosarjaa, nimittäin sarjat 1–1–1–1, 1–1–2, 1–2–1, 2–1–1, 1–3, 3–1, 2–2 ja 4.

(a) Kuinka monta eri heittosarjaa tuottaa summan 12?

(b) Kuinka monessa a-kohdan heittosarjoista on parillinen määrä heittoja?

Ratkaisu:
Tietyn summan tuottavien heittosarjojen määrä on helppoa selvittää, jos ensin on laskettu kaikkien pienemmät summat tuottavien heittosarjojen määrät. Esimerkiksi jos lasketaan summan 8 tuottavien heittosarjojen määrää, voidaan tutkia erikseen tapaus, jolloin sarjan viimeisen heiton silmäluku on 1. Tällaisia sarjoja on yhtä monta kuin summan 7 tuottavia heittosarjoja. Vastaavasti heittosarjoja, joissa viimeinen silmäluku on 2, on yhtä monta kuin summan 6 tuottavia heittosarjoja, heittosarjoja, joissa viimeinen silmäluku on 3, on yhtä monta kuin summan 5 tuottavia heittosarjoja jne.

Seuraavassa taulukossa näkyvät heittosarjojen määrät summaan 12 asti:

summa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
sarjat	1	2	4	8	16	32	63	125	248	492	976	1936

Esimerkiksi summa 8 saadaan aiempien summien perusteella 125 tavalla $(2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 63)$ siis kuuden edellisen tuloksen summa. Tehtävän a-kohdan vastaus paljastuu taulukon viimeisestä sarakkeesta: yhteensä 1936 eri heittosarjaa tuottaa summan 12.

Samalla tavalla voidaan laskea, kuinka monta parillista heittosarjaa tuottaa tietyn summan. Tällöin kuitenkin täytyy laskea sekä parillisia ja parittomia summia, koska parillisen summan laskemiseksi tarvitaan pienempiä parittomia summia ja päinvastoin.

Tässä ovat parillisten ja parittomien heittosarjojen määrät summaan 12 asti:

summa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
parilliset	0	1	2	4	8	16	32	62	124	246	488	968
parittomat	1	1	2	4	8	16	31	63	124	246	488	968

Esimerkiksi parillinen summa 8 saadaan aiempien parittomien summien perusteella 62 tavalla $(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31)$. Viimeinen sarake kertoo tehtävän b-kohdan vastauksen: parillisia summan 12 tuottavia heittosarjoja on 968.

Tässä tapauksessa parillisia ja parittomia summia on yhtä monta, mutta tämä ei ole yleinen sääntö, niin kuin taulukosta näkyy.

16. Laske tarkka arvo lausekkeelle

$$\ln \sin \frac{\alpha}{2^{100}} + \ln \cos \alpha + \ln \cos \frac{\alpha}{2} + \ln \cos \frac{\alpha}{2^2} + \ldots + \ln \cos \frac{\alpha}{2^{100}}$$

kun $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Ratkaisu:

Muistetaan kaava $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ ja logaritmin laskusäännöt, jolloin tilanne alkaa purkautua seuraavasti

$$\begin{aligned}
\ln \sin \frac{\alpha}{2^{100}} + \ln \cos \alpha + \ln \cos \frac{\alpha}{2} + \ldots + \ln \cos \frac{\alpha}{2^{100}} &= \\
\ln \sin \frac{\alpha}{2^{100}} + \ln \cos \frac{\alpha}{2^{100}} + \ldots + \ln \cos \frac{\alpha}{2} + \ln \cos \alpha &= \\
\ln(\sin \frac{\alpha}{2^{100}} \cdot \cos \frac{\alpha}{2^{100}}) + \ln \cos \frac{\alpha}{2^{99}} + \ldots + \ln \cos \frac{\alpha}{2} + \ln \cos \alpha &= \\
\ln(\frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{2^{99}}) + \ln \cos \frac{\alpha}{2^{99}} + \ldots + \ln \cos \frac{\alpha}{2} + \ln \cos \alpha &= \\
\ln(\frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{2^{99}} \cdot \ln \cos \frac{\alpha}{2^{99}}) + \ln \cos \frac{\alpha}{2^{98}} + \ldots + \ln \cos \frac{\alpha}{2} + \ln \cos \alpha &= \\
\ln(\frac{1}{2^2} \sin \frac{\alpha}{2^{98}}) + \ln \cos \frac{\alpha}{2^{98}} + \ldots + \ln \cos \frac{\alpha}{2} + \ln \cos \alpha &= \\
&\vdots \\
\ln(\frac{1}{2^{100}} \sin \alpha) + \ln \cos \alpha = \ln \left(\frac{1}{2^{101}} \sin(2\alpha) \right) &=
\end{aligned}$$

$$-101 \ln 2 + \ln \sin(2 \cdot \frac{\pi}{4}) = -101 \ln 2 + \ln \sin \frac{\pi}{2} = -101 \ln 2 + \ln 1 = -101 \ln 2.$$

17. Olkoon $p(x) = a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0$ kokonaislukukertoiminen polynomi, eli kertoimet $a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$. Jos on olemassa neljä erillistä kokonaislukua $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ siten, että

$$p(a) = p(b) = p(c) = p(d) = 5,$$

niin todista, ettei ole olemassa kokonaislukua m siten että $p(m) = 8$.

Ratkaisu:
Koska polynomilla $p(x) - 5$ on neljä nollakohtaa a, b, c, d, niin voimme kirjoittaa polynomin muodossa

$$p(x) - 5 = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)q(x),$$

missä $q(x)$ on myös kokonaislukukertoiminen polynomi (jos se ei olisi kokonaislukukertoiminen, niin tulokaan ei olisi kokonaislukukertoiminen). Oletetaan, että m olisi kokonaislukukertoimisen polynomin $p(x) - 8$ juuri, eli $p(m) - 5 = 3$. Tällöin siis

$$p(m) - 5 = (m - a)(m - b)(m - c)(m - d)q(m) = 3.$$

Koska luvulla kolme on alkuluku, niin jokin tulon $(m-a)(m-b)(m-c)(m-d)q(m)$ termeistä on oltava 3 ja loput neljä termiä koostuvat luvuista 1 ja -1. Koska näistä neljästä termistä ainakin kolme ovat jotkin termeistä $m-a, m-b, m-c$ tai $m-d$, jolloin ainakin kaksi näistä ovat joko molemmat 1 tai molemmat -1. Kummassakin tapauksessa kaksi kyseisen termin juurta olisivat samat, mikä on vastoin alkuperäistä oletusta. Lukua m ei siis voi olla olemassa, jolle $p(m) = 8$.

18. Dodekaedri on säännöllinen 12-tahokas, joka koostuu 12:sta säännöllisestä viisikulmiosta. Alla on esimerkkikuva tällaisesta. Jokaisen kahden vierekkäisen viisikulmion muodostamien tasojen välinen kulma on sama. Laske tämä kulma.

Ratkaisu:
Ajatellaan mitä tahansa dodekahedrin kärkeä, josta lähtee siis kolme sivua. Merkataan näitä kolmea sivua vektoreilla $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$. Olkoon $\bar{a} = \bar{i}$, jolloin myös $\|\bar{b}\| = \|\bar{c}\| = 1$. Koska viisikulmion keskuskulma yhtä sivua kohti on $72°$, niin tätä vastaava kantakulma (katso kuva) on $54°$ ja silloin viisikulmion kahden sivun välinen kulma on $108°$. Nyt voimme kirjoittaa lausekkeen vektorille $\bar{b} = \cos 108°\bar{i} + \sin 108°\bar{j}$. Olkoon $\bar{c} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. Koska $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ ovat toisiinsa nähden symmetrisesti ja niiden väliset kulmat siten samat, niin myös niiden väliset pistetulot ovat oltava samoja. Merkataan $\cos 108° = \alpha$ ja $\sin 108° = \beta$. Nyt siis

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot \bar{b} &= \alpha \\ \bar{a} \cdot \bar{c} &= x = \alpha \\ \bar{b} \cdot \bar{c} = \alpha x + \beta y = \alpha^2 + \beta y &= \alpha \Leftrightarrow y = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta}. \end{aligned}$$

Olkoon $\bar{n}_1$ vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ muodostaman tason normaalivektori ja $\bar{n}_2$ vektoreiden $\bar{c}$ ja $\bar{a}$ muodostaman tason normaalivektori. Voimme laskea tasojen normaalivektorit (vieläpä ykkösen pituisiksi) $\bar{n}_1 = \frac{\bar{a}\times\bar{b}}{\|\bar{a}\times\bar{b}\|}$ ja kun laskemme, että $\bar{a} \times \bar{b} = \beta\bar{k}$, niin saamme $\bar{n}_1 = \bar{k}$. Nyt jälleen, koska vektoreiden väliset kulmat ovat samat niin $\|\bar{c} \times \bar{a}\| = \|\bar{a} \times \bar{b}\| = \beta$ ja saamme

$$\bar{n}_2 = \frac{\bar{c} \times \bar{a}}{\|\bar{a} \times \bar{b}\|} = \frac{z\bar{j} - y\bar{k}}{\beta}.$$

Merkitään tasojen välistä kulmaa $180 - \gamma$, jossa γ on tutkittavien tasojen normaalivektorien välinen kulma. Nyt pistetulon määritelmästä $\cos\gamma = \frac{\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2}{\|\bar{n}_1\|\|\bar{n}_2\|} = \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = \frac{-y}{\beta} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{\beta^2}$, josta sitten itse kulma

$$\gamma = \arccos\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{\beta^2}\right) \approx 63,4°.$$

Vastaus: $180 - \gamma \approx 116,6°$.

19. Pisteet $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ muodostavat tetraedrin. Kuinka monta palloa voidaan sijoittaa avaruuteen niin että ne sivuavat jokaista tämän tetraedrin tahkon sisältävää tasoa?

Ratkaisu:
Ajatellaan kahta toisiaan leikkaavaa tasoa avaruudessa ja kaikkia pisteitä jotka ovat yhtä kaukana molemmista tasoista. Pisteet, jotka ovat yhtä kaukana molemmista tasoista muodostavat kaksi toisiaan leikkaavaa tasoa, siten että tasot ovat alkuperäisten leikkaavien tasojen kulman puolittajatasoja. Olkoon T_1, T_2 ja T_3 kolme toisiaan leikkaavaa tasoa avaruudessa. Tasojen T_1 ja T_2 muodostamat kaksi kulmanpuolittajatasoa ja tasojen T_1 ja T_3 muodostamat kaksi kulmanpuolittajatasoa leikkaavat toisensa, niin että muodostuu neljä suoraa, joiden jokainen piste on yhtä kaukana tasoista T_1, T_2 ja T_3. Nyt jos ajattelemme että tetraedrin neljän tahkon muodostamat tasot ovat T_1, T_2, T_3 ja T_4, niin näistä kolme ensimmäistä muodostavat siis neljä suoraa, joiden pisteet olivat yhtä kaukana tasoilta T_1, T_2 ja T_3. Nyt tasot T_1 ja T_4 muodostavat, kuten mainittu, kaksi risteävää kulmanpuolittajatasoa, joiden pisteet ovat yhtä kaukana tasoilta T_1 ja T_4. Kumpikin näistä kahdesta tasosta voi leikata kerran neljää suoraa jotka olivat kolme tasoa vastaan kohtisuorassa. Ne lisäksi leikkaavat ne väistämättä eri pisteissä, sillä suorien ja tasojen yhteiset pisteet kuuluvat kaikki tetraedrin

sivuille ja kärjille, jolloin ne eivät selvästi voi olla leikkauspisteitä jotka ovat yhtä kaukana kaikista tasoista. Siis pisteitä jotka ovat yhtä kaukana kaikista tetraedrin tasoista on korkeintaan kahdeksan. Nyt osoitetaan vielä, että niitä on tässä tapauksessa tasan kahdeksan. Pisteitä voi olla vähemmän kuin kahdeksan, jos jokin neljästä suorasta ei leikkaa jompaakumpaa kulmanpuolittajatasoista. Tehtävän tetraedrin tapauksessa valitaan tasot T_1, T_2 ja T_3 xy-, xz- ja yz-tasoiksi. Nyt neljä suoraa jotka ovat yhtä kaukana näistä tasoista ovat suuntavektoreiltaan $(1,1,1)$, $(1,1,-1)$, $(1,-1,1)$ ja $(1,-1,-1)$. Nyt tason T_4 normaalivektori on $\bar{n}_4 = (1,1,1)$ ja xy-tason normaalivektori puolestaan $\bar{n}_1 = (0,0,1)$. Tasojen kulmanpuolittajatasojen normaalivektorit ovat alkuperäisten tasojen normaalivetoreiden suuntaisten suorien kulmanpuolittajilla. Nämä suuntavektorit saadaan esim kolmion kulmanpuolittajalauseen (ja laskimen) avulla vektoreiksi

$$\frac{1}{\|\bar{n}_1\| + \|\bar{n}_4\|} \left(\|\bar{n}_4\|\bar{n}_1 + \|\bar{n}_1\|\bar{n}_4\right) = \frac{1}{1+\sqrt{3}}(1,1,1+\sqrt{3})$$

ja tämän kohtisuora kaveri

$$\frac{1}{\|\bar{n}_1\| + \|\bar{n}_4\|} \left(\|\bar{n}_4\|\bar{n}_1 + \|\bar{n}_1\| - \bar{n}_4\right) = \frac{1}{1+\sqrt{3}}(-1,-1,-1+\sqrt{3}).$$

Pikainen pistetulos varmistaa ettei kumpikaan näistä ole kohtisuorassa mitään annetuista neljästä suoran suuntavektorista ja näin ollen kaikki kahdeksan suoran ja tason leikkauspistettä löytyvät. Annetun tetraedrin tahkoja voidaan siis asettaa sivuamaan kahdeksan palloa. Havainnollistuksen vuoksi pallot sijaitsevat 1) tetraedrin sisällä, 2-5) kunkin tahkon ulkopuolella, niin että pallo sivuaa yhtä tahkoa ulkopuolelta (eri puolelta kuin tetraedri) ja muiden tahkojen sisäpuolelta (samalta puolelta kuin tetraedri) ja 6-8) koordinaattiakselien suuntaisten sivujen "takana", jolloin pallo sivuaa kahta koordinaattitasoa ulkopuolelta ja kahta muuta tasoa sisäpuolelta.

Tästä ongelmasta voidaan todistaa seuraava yleinen lause: Olkoon mielivaltaisen tetraedrin tahkojen pinta-alat A_1, A_2, A_3 ja A_4. Tahkojen kautta kulkevia tasoja sivuavia palloja saadaan sijoiteltua avaruuteen kahdeksan kappaletta vähennettynä seuraavasta yhtälöryhmästä toteutuneiden yhtälöiden määrällä:

$$A_1 + A_2 = A_3 + A_4$$

$$A_1 + A_3 = A_2 + A_4$$
$$A_1 + A_4 = A_2 + A_3$$

20. Ympyrän sisäpuolelle asetetaan satunnaisesti piste. Sitten ympyrän sisäpuolelle asetetaan toinen piste ja näiden kahden pisteen kautta piirretään suora, joka leikkaa ympyrän kahdessa pisteessä. Nämä kaksi pistettä määräävät ympyrälle kaksi kaarta. Mikä on todennäköisyys asettaa ensimmäinen piste niin, että laitettiinpa toinen piste miten tahansa, niin pisteiden kautta muodostuvien molempien kaarien pituus on enemmän kuin $\frac{1}{3}$ ympyrän kehän pituudesta?

    Ratkaisu:
    Jos ympyrän sisälle voidaan piirtää tasasivuinen kolmio niin että pisteiden kautta kulkeva jänne ei leikkaa kolmiota, niin tällöin muodostuvista kaarista lyhyempi on alle $\frac{1}{3}$ ympyrän kehän pituudesta (katso kuva). Jos tätä ei voida tehdä niin silloin muodostuvat kaaret ovat molemmat pidempiä kuin $\frac{1}{3}$ ympyrän kehän pituudesta. Siis mikäli ensimmäinen piste saadaan ylipäänsä ympyrän sisään piirretyn tasasivuisen kolmion ulkopuolelle, niin silloinhan voimme asettaa toisen pisteistä myös samalle segmentille ensimmäisen pisteen kanssa ja muodostuva kaari on alle $\frac{1}{3}$ ympyrän kehän pituudesta. Ensimmäinen piste tulisi siis olla paikassa missä se sijaitsee minkä tahansa ympyrän sisään piirretyn tasasivuisen kolmion sisällä, tämä alue on kolmion sisään piirretty ympyrä (katkoviivalla oikean puoleisessa kuvassa). Jos ulomman ympyrän säde on R, niin sen sisään piirretyn tasasivuisen kolmion sivu $a = \sqrt{3}R$ ja siten vastaavasti tämän tasasivuisen kolmion sisään piirretyn ympyrän säde on $\frac{1}{6}\sqrt{3}a = \frac{1}{6}\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}R = \frac{1}{2}R$, jolloin kysytty todennäköisyys on pienemmän ympyrän pinta-alan suhde isomman ympyrän

    pinta-alaan, eli $\frac{1}{4}$.