Pythagoraan polku 2009

Kilpailussa on 20 tehtävää. Aikaa tehtävien ratkaisemiseen on 3 tuntia. Jokainen palautettu tehtävä arvostellaan asteikolla 0-5. Jokaisen tehtävän ratkaisu on palautettava **omalla arkillaan**.

Tehtävät ja ratkaisut

1. Sijoitetaan numerosarjan 987654321 numeroiden väliin yhteenlaskumerkkejä. Kuinka monella eri tavalla yhteenlaskumerkit voidaan sijoittaa, jotta summaksi saadaan 99?

   Ratkaisu. Yhteenlaskumerkit on selvästi sijoitettava siten, että yhdessäkään yhteenlaskettavassa ei ole enempää kuin kaksi numeroa. Jos jokaiseen väliin laitetaan yhteenlaskumerkki, summaksi saadaan 45. Kaksinumeroisia lukuja on siis oltava vähintään yksi. Summa

   $$9 + 8 + 7 + 65 + 4 + 3 + 2 + 1 = 99$$

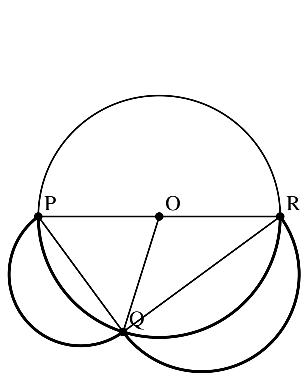
   on ainoa mahdollisuus, jos kaksinumeroisia lukuja on tasan yksi. Jos kaksinumeroisia lukuja on tasan kaksi, niin ainoa mahdollisuus on

   $$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 43 + 21 = 99;$$

   muut mahdolliset summat ovat selvästi tätä suurempia. Myös kolmen tai useamman kaksinumeroisen luvun tapauksessa kaikki mahdolliset summat ovat liian suuria. Tapoja sijoittaa yhteenlaskumerkit vaaditulla tavalla on siis kaksi.

2. Tarkastellaan mielivaltaista suorakulmaista kolmiota. Piirretään kolmion ulkopuolelle puoliympyrät C_1 ja C_2, joiden halkaisijat ovat kolmion kateetit. Piirretään vielä ympyrä C, jonka halkaisija on kolmion hypotenuusa. Olkoon S tason niiden pisteiden joukko, jotka ovat jommankumman puoliympyrän C_1 tai C_2 sisällä, mutta ympyrän C ulkopuolella. Laske joukon S pinta-alan suhde kolmion alaan.

   Ratkaisu. Olkoon PQR suorakulmainen kolmio ja O sen hypotenuusan PR keskipiste. Kehäkulmalauseen mukaan O-keskinen OP-säteinen ympyrä C kulkee pisteen Q kautta.



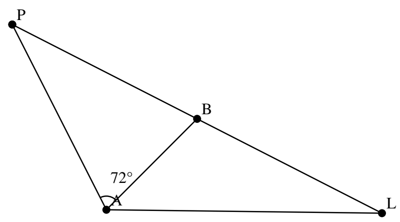
Kysytty ympyräkaarien rajaama ala saadaan laskettua, kun puoliympyröiden C_1 ja C_2 aloista vähennetään jänteiden PQ ja QR ympyrästä C rajaamat alat. Jänteen PQ ympyrästä C rajaama ala taas saadaan vähentämällä sektorin QOP alasta kolmion QOP ala ja vastaavasti jänteen QR rajaama ala saadaan vähentämällä sektorin ROQ alasta kolmion ROQ ala. Merkitään $\angle QOP = \alpha$ ja $\angle ROQ = \beta$. Tällöin kysytylle alalle voidaan siis muodostaa lauseke

$$\begin{aligned} \text{ala} &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{PQ}{2}\right)^2 + \left(\frac{QR}{2}\right)^2 - \frac{\alpha\pi}{360^\circ}\left(\frac{PR}{2}\right)^2 - \frac{\beta\pi}{360^\circ}\left(\frac{PR}{2}\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{PR}{2}\right)^2 \sin\alpha \frac{1}{2}\left(\frac{PR}{2}\right)^2 \sin\beta \\ &= \frac{\pi}{8}\left(PQ^2 + QR^2 - \frac{\alpha+\beta}{180^\circ}PR^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{PR}{2}\right)^2 (\sin\alpha + \sin\beta). \end{aligned}$$

Koska $\alpha+\beta = 180^\circ$ ja $PQ^2+QR^2 = PR^2$, ensimmäinen yhteenlaskettava häviää. Jäljelle jäävä osa on kolmioiden QOP ja ROQ alojen summa eli kolmion PQR ala. Kysytty suhde on siis 1.

3. Kaksi kirahvia, A ja B, seisovat savannilla 100 m päässä toisistaan. Kirahvit näkevät edessään akasiapuun, joka on yhtä kaukana kummastakin kirahvista. Kirahvi A näkee akasiapuun ja kirahvin B 72 asteen kulmassa toisiinsa nähden. Kirahvin B takana on leijona, joka on yhtä kaukana siitä kuin akasiapuu, mutta täsmälleen päinvastaisessa suunnassa. Näkeekö kirahvi A leijonan, jos se katsoo suoraan kohti kirahvia B ja sen näkökenttä on 90 astetta leveä?

   Ratkaisu. Olkoon akasiapuu pisteessä P ja leijona pisteessä L. On annettu, että $\angle PAB = 72^\circ$, $AB = 100$ ja $AP = BP = BL$. Määritetään yhtälö kulmalle $\angle BAL$.



Kolmio ABP on tasakylkinen. Sen kannan pituus on 100 ja sen kyljen pituus saadaan ratkaistua sinilauseella.

$$\begin{aligned} \frac{AP}{\sin 72^\circ} &= \frac{100}{\sin(180^\circ - 2\cdot 72^\circ)} \iff \\ AP &= 100\frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = 100\frac{2\sin 36^\circ\cos 36^\circ}{\sin 36^\circ} \\ &= 200\cos 36^\circ \end{aligned}$$

Kolmiosta ABL tunnetaan nyt sivut AB ja BL. Kolmiosta ALP laskemalla voidaan määrittää $\angle ALB = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ - \angle BAL = 72^\circ - \angle BAL$.

Sinilauseesta saadaan taas

$$\begin{aligned}
\frac{BL}{\sin \angle BAL} &= \frac{AB}{\sin(72^\circ - \angle BAL)} \iff \\
\frac{\sin(72^\circ - \angle BAL)}{\sin \angle BAL} &= \frac{AB}{BL} \\
&= \frac{100}{200 \cos 36^\circ} = \frac{1}{2 \cos 36^\circ}.
\end{aligned}$$

Sinin summakaavaa käyttämällä saataisiin tästä yhtälö kulman $\angle BAL$ tangentille ja kulma voitaisiin tästä ratkaista. Tehtävän ratkaisemiseen riittää kuitenkin huomata, että funktio $f : [0^\circ, 72^\circ] \to \mathbb{R}$,

$$f(\alpha) = \frac{\sin(72^\circ - \alpha)}{\sin \alpha},$$

on vähenevä koko määrittelyjoukossaan ja

$$f(45^\circ) = \frac{\sin 27^\circ}{\sin 45^\circ} > \frac{1}{2 \cos 36^\circ} = \frac{\sin(72^\circ - \angle BAL)}{\sin \angle BAL} = f(\angle BAL).$$

Nyt siis $45^\circ < \angle BAL$ eli kirahvi A ei näe leijonaa.

4. Osoita, että ei ole olemassa kahta perättäistä positiivista kokonaislukua, jotka ovat kokonaislukujen parillisia potensseja.

   Ratkaisu. Tehdään vastaoletus eli oletetaan, että on olemassa positiiviset kokonaisluvut x, y, n, m joilla pätee

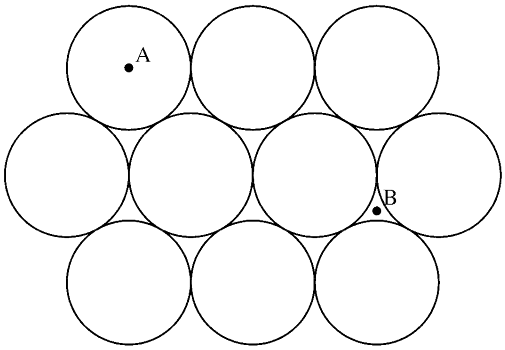
   $$x^{2n} = y^{2m} + 1.$$

   Siirtämällä y^{2m} yhtälön vasemmalle puolelle saadaan

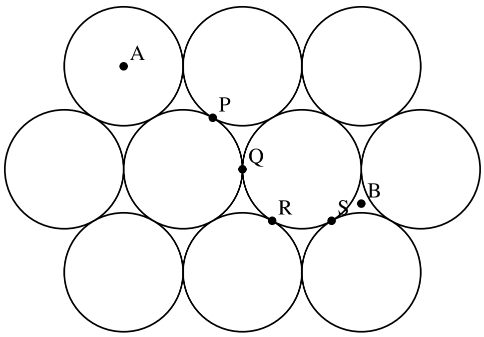
   $$x^{2n} - y^{2m} = (x^n - y^m)(x^n + y^m) = 1.$$

   Tekijät $x^n - y^m$ ja $x^n + y^m$ ovat myös positiivisia kokonaislukuja. Koska niiden tulo on 1, pitäisi molempien tekijöiden olla siis 1. Tämä on mahdotonta, sillä kaikkien muuttujien ollessa positiivisia kokonaislukuja pätee $x^n + y^m \geq 2$.

5. Muurahainen kävelee nupukivikadulla. Kivet ovat puolipalloja ja ne on asetettu tasamaalle kuusikulmiohilaan mahdollisimman lähelle toisiaan. Kivien säde on 5 cm ja niiden väleissä on tasaista. Erään kiven laelta pisteestä A muurahainen havaitsee sokeripalan kolmen kiven välin keskipisteessä B. Mikä on lyhin reitti, jota pitkin muurahainen pääsee sokeripalan luo? Mikä on tämän reitin pituus?



Ratkaisu. Pallojen geometriasta tiedetään, että lyhin reitti kahden pallon pinnan pisteen välillä kulkee pisteiden välistä isoympyrän kaarta pitkin. (Eli pallon ja kyseisten pisteiden ja pallon keskipisteen virittämän tason leikkausympyrää pitkin.) Koska puolipallon muotoisten kivien keskipiste on maanpinnan tasolla, seuraa tästä, että lyhin reitti kahden saman puolipallon maanpinnan tasolla olevan pisteen välillä kulkee pallon maanpinnalla olevaa kaarta pitkin. Ennen kaikkea tästä seuraa, että muurahaisen laskeuduttua pisteen A sisältävän pallon päältä voidaan rajoittua tarkastelemaan maanpintaa pitkin kulkevia reittejä.



Tilanne on symmetrinen pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran suhteen, joten voidaan olettaa, että muurahainen kulkee tämän suoran alapuolella. Tällöin lyhin reitti maanpintaa pitkin pisteestä B kohti pistettä A kulkee pisteiden S, R, Q ja P kautta: muiden pallojen sivuamispisteiden kautta kulkeminen antaisi selvästi pidemmän reitin. Pisteiden S ja B välinen lyhin reitti on selvästi suora. Lyhin reitti pisteestä A pisteeseen P on myös (ylhäältäpäin katsottuna) suora.

Lasketaan vielä lyhimmän reitin pituus. Puolipallon isoympyrän pituus on 10π cm. Kolmen toisiaan pareittain sivuavan puolipallon keskipisteistä muodostuvan tasasivuisen kolmion korkeus on $5\sqrt{3}$ cm. Pisteiden A ja P välisestä matkasta siis kuljetaan maanpinnalla $5\sqrt{3} - 5$ cm. Piste B sijaitsee kolmen toisiaan sivuavan puolipallon sivuamispisteiden keskipisteessä. Sivuamispisteet muodostavat tasasivuisen kolmion, jonka sivun pituus on 5 cm; niinpä etäisyys kolmion kärjestä S mediaanien leikkauspisteeseen B on 2/3 korkeusjanasta $\frac{\sqrt{3}}{2}5$ cm.

$$\begin{aligned}
\text{reitin pituus} &= AP + PQ + QR + RS + SB \\
&= \left(\frac{\pi/2}{2\pi}10\pi + (5\sqrt{3} - 5)\right) \text{ cm } + 3\frac{\pi/3}{2\pi}10\pi \text{ cm } + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}5 \text{ cm} \\
&= \left(\frac{15}{2}\pi + \frac{20}{3}\sqrt{3} - 5\right) \text{ cm} \\
&\approx 30{,}1 \text{ cm}
\end{aligned}$$

6. Olkoon $\mathcal{A}$ ääretön kokoelma ympyröitä xy-tasossa. Onko mahdollista, että $\mathcal{A}$:n ympyröiden pinta-alojen summa on äärellinen ja että jokainen tasolle asetettu suora leikkaa jotain $\mathcal{A}$:n ympyrää?

   Ratkaisu. On mahdollista konstruoida kokoelma $\mathcal{A}$ siten, että tehtävässä annetut ehdot täyttyvät. Ajatuksena on asettaa koordinaattiakseleille mahdollisimman tiheään ympyröitä, joiden säteet ovat $\frac{1}{n}$.

   Merkitään ympyrää, jonka keskipiste on (x, y) ja säde r symbolilla $C(x, y, r)$. Määritellään jokaisella $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ luku

$$c_n = 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{2}{k} + \frac{1}{n}.$$

   (Tapauksessa $n = 2$ esiintyy tyhjä summa, jonka arvo on 0.) Olkoon A_1 origokeskinen yksikköympyrä. Jokaista $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ kohti määritellään neljä ympyrää

$$A_{1,n} = C(c_n, 0, \frac{1}{n}), \quad A_{2,n} = C(0, c_n, \frac{1}{n}),$$

$$A_{3,n} = C(-c_n, 0, \frac{1}{n}), \quad A_{4,n} = C(0, c_n, \frac{1}{n}).$$

   Kokoelma $\mathcal{A}$, johon kuuluvat ympyrät A_1 ja $A_{i,n}$ missä $i = 1, 2, 3, 4$ ja $n \geq 2$, toteuttaa vaaditut ehdot.

   On selvää, että xy-tason koordinaattiakselit leikkaavat jokaisen xy-tasolle asetetun suoran. Osoitetaan, että edellä määritelty kokoelma $\mathcal{A}$ sisältää koordinaattiakselit. Symmetrian vuoksi riittää tarkastella positiivinen x-akseli. Ympyröiden $A_{1,n}$ määritelmästä todetaan, että ympyrä $A_{1,k}$ sisältää x-akselin sen osan, jolla $x \in [c_k - 1/k, c_k + 1/k]$. Lukujen c_n määritelmästä todetaan tämän avulla, että ympyröiden $A_1, A_{1,1}, A_{1,2}, \ldots, A_{1,n}$ yhdiste sisältää x-akselin sen osan, jolla $x \in [0, c_n + 1/n]$. Koska

$$c_n + \frac{1}{n} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k}$$

   ja harmoninen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ hajaantuu, saadaan koko positiivinen x-akseli peitettyä ympyröillä $A_1, A_{1,n}$, $n \geq 2$.

Kokoelman $\mathcal{A}$ ympyröiden yhteenlaskettu pinta-ala on kuitenkin äärellinen. Ympyrän A_1 pinta-ala on π; ympyrän $A_{i,n}$, $i = 1, 2, 3, 4$, $n \geq 2$, pinta-ala on $\pi \frac{1}{n^2}$. Kokoelman $\mathcal{A}$ ympyröiden yhteenlaskettu pinta-ala on siis

$$\pi + 4 \sum_{n=2}^{\infty} \pi \frac{1}{n^2}.$$

Tämä on äärellinen luku, sillä sarja $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ suppenee, mikä nähdään esimerkiksi vertaamalla sarjaa integraaliin $1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

7. A ja B lyövät vetoa kolikonheittosarjasta. He sopivat, että kolikkoa heitetään, kunnes *lopetusehto* toteutuu. Lopetusehdon toteutuessa A voittaa, mikäli *voittoehto* on voimassa, muutoin B voittaa. Määritä lopetus- ja voittoehto siten, että kolikonheitto päättyy todennäköisyydellä 1 ja että A voittaa todennäköisyydellä 7/13. (Oletetaan, että kolikko on reilu eli että sekä kruunan että klaavan todennäköisyys on 1/2.)

   Ratkaisu. Tarkastellaan neljän perättäisen heiton sarjoja. Erilaisia heittosarjoja on yhteensä 16 kappaletta. Valitaan näistä kolme *jatkosarjoiksi* A ja seitsemän muuta *voittosarjoiksi* B. Olkoon muiden neljän heiton sarjojen joukko C. Selvästi $\mathbb{P}(A) = 3/16$, $\mathbb{P}(B) = 7/16$ ja $\mathbb{P}(C) = 6/16$. Näiden perusteella voidaan laskea ehdollinen todennäköisyys sille, että osutaan voittosarjaan silloin kun tiedetään, että ei ole osuttu jatkosarjaan; se on $\mathbb{P}(B|A^c) = \mathbb{P}(B \cap A^c)/\mathbb{P}(B) = (7/16)/(13/16) = 7/13$.

   Määritellään siis lopetus- ja voittoehto tarkastamalla kolikonheittosarja aina järjestysluvultaan neljällä jaollisen heiton jälkeen. Olkoon lopetusehto se, että tällöin viimeiset neljä heittoa eivät ole tuottaneet jatkosarjaa. Voittoehdoksi määritellään se, että viimeiset neljä heittoa ovat tuottaneet voittosarjan.

   On selvää, että käsitellyt neljän heiton sarjat ovat toisistaan riippumattomia. Tästä seuraa, että koska viimeisessä neljän heiton sarjassa ei ole osuttu jatkosarjaan, voidaan todennäköisyys koko kolikonheiton päättymiselle voittosarjaan laskea suoraan ehdollisena todennäköisyytenä $\mathbb{P}(B|A^c) = 7/13$. Edelleen riippumattomuuden nojalla todennäköisyys sille, että kolikonheitto ei ole loppunut n neljän heiton sarjan jälkeen on $P(A^c)^n = (3/16)^n$. Koska $(3/16)^n \to 0$ kun $n \to \infty$, nähdään että äärettömien kolikonheittosarjojen todennäköisyys on 0. Niinpä kolikonheitto päättyy todennäköisyydellä 1.

8. Kuinka monella eri tavalla voidaan tavalliselle 8×8 -shakkilaudalle asettaa ratsu ja lähetti siten, että kumpikaan nappuloista ei uhkaa toista?

   (Shakkia pelataan 8×8 -ruudukolla. Pelinappulan sanotaan uhkaavan toista, jos ensimmäinen nappula voi yhdellä siirrolla liikkua ruutuun, jossa toinen on. Lähetti voi siirtyä mielivaltaisen matkan ruudukossa vinottain. Ratsu voi siirtyä mihin tahansa ruutuun, johon se pääsee liikkumalla L-kirjaimen muotoisesti ensin kaksi ruutua suoraan ja vielä yhden ruudun ensimmäistä suuntaa vastaan kohtisuoraan.)

   Ratkaisu. Todetaan aluksi, että lähetti ja ratsu eivät milloinkaan voi molemmat uhata toisiaan. Jos siis lähetti asetetaan johonkin shakkilaudan ruutuun, saadaan ratsun mahdollisten asetuspaikkojen lukumäärä vähentämällä vapaiden ruutujen lukumäärästä niiden ruutujen lukumäärä, joita lähetti uhkaa ja niiden ruutujen lukumäärä, joita lähetin paikalle sijoitettu ratsu uhkaisi (ratsu uhkaa ruudusta A ruutua B jos ja vain jos se uhkaa ruutua B ruudusta A). Voidaan siis tarkastella erikseen tilanteet, joissa laudalla on lähetti yksin tai ratsu yksin, ja laskea kuinka montaa ruutua nappula uhkaa. Kysyttyjen asetusten lukumäärä saadaan, kun kaikista tavoista asettaa kaksi nappulaa laudalle vähennetään edellä mainitut lukumäärät kutakin ruutua kohden.

7	7	7	7	7	7	7	7		2	3	4	4	4	4	3	2
7	9	9	9	9	9	9	7		3	4	6	6	6	6	4	3
7	9	11	11	11	11	9	7		4	6	8	8	8	8	6	4
7	9	11	13	13	11	9	7		4	6	8	8	8	8	6	4
7	9	11	13	13	11	9	7		4	6	8	8	8	8	6	4
7	9	11	11	11	11	9	7		4	6	8	8	8	8	6	4
7	9	9	9	9	9	9	7		3	4	6	6	6	6	4	3
7	7	7	7	7	7	7	7		2	3	4	4	4	4	3	2

Vasemmanpuoleisessa taulukossa on esitetty niiden ruutujen lukumäärä, joita lähetti kustakin ruudusta uhkaa, ja oikeassa taulukossa niiden ruutujen lukumäärä, joita ratsu kustakin ruudusta uhkaa. Taulukot on luonnollisesti muodostettu tapauserittelyä ja symmetriaa käyttäen. Mahdollisia tapoja sijoittaa lähetti ja ratsu shakkilaudalle on yhteensä $64 \cdot 63$ kappaletta. Niiden tapojen lukumäärä, joissa kumpikaan nappuloista ei uhkaa toista, saadaan vähentämällä tästä kaikki yllä olevissa taulukoissa olevat luvut. Vastaukseksi saadaan siis

$$64 \cdot 63 - (4 \cdot 13 + 12 \cdot 11 + 20 \cdot 9 + 28 \cdot 7) - (16 \cdot 8 + 16 \cdot 6 + 20 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 4 \cdot 2)$$
$$= 4032 - 560 - 336 = 3136.$$

9. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$. Määritä yhtälöiden $(\alpha+1)x+(\alpha-1)y = \alpha-1$ ja $\alpha x-y = \alpha$ määrittelemien suorien leikkauskulma.

Ratkaisu. Suorat on annettu normaalimuodossa, joten niiden normaalivektorit voidaan lukea suoraan yhtälöistä. Ne ovat $\mathbf{a} = (\alpha+1)\mathbf{i} + (\alpha-1)\mathbf{j}$ ja $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Pistetulon avulla saadaan

$$\begin{aligned}
\cos\angle(\mathbf{a},\mathbf{b}) &= \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \\
&= \frac{(\alpha+1)\alpha + (\alpha-1)(-1)}{\sqrt{(\alpha+1)^2+(\alpha-1)^2}\sqrt{\alpha^2+1^2}} \\
&= \frac{\alpha^2+1}{\sqrt{2(\alpha^2+1)}\sqrt{\alpha^2+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Koska normaalien välinen kulma on sama kuin suorien välinen kulma, leikkaavat annetut suorat siis parametrin α arvosta riippumatta 45 asteen kulmassa.

10. Piirretään hyperbelille $xy = 1$ tangentti l_1, joka sivuaa hyperbeliä ensimmäisen neljänneksen pisteessä P ja jolla on enintään yksi yhteinen piste yksikköympyrän kanssa. Piirretään yksikköympyrälle pisteeseen Q tangentti l_2 siten, että sillä ja hyperbelillä $xy = 1$ on enintään yksi yhteinen piste. Suora l_1 muodostaa yhdessä x- ja y-akseleiden kanssa kolmion S_1 ja vastaavasti suora l_2 yhdessä x- ja y-akseleiden kanssa kolmion S_2. Valitaan P ja Q siten, että kolmioiden S_1 ja S_2 leikkauksen ala on suurin mahdollinen. Mikä on tämä suurin ala, ja missä kulmassa suorat l_1 ja l_2 leikkaavat toisensa?

    Ratkaisu. Merkitään $P = (x_0, y_0)$ ja $f(x) = 1/x$. Hyperbelille $xy = 1$ pisteeseen P piirretyn tangentin yhtälö on

$$\begin{aligned} y &= f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 + f(x_0) \\ &= -\frac{1}{x_0^2}x - \frac{-x_0}{x_0^2} + \frac{1}{x_0} \\ &= -\frac{1}{x_0^2}x + \frac{2}{x_0}. \end{aligned}$$

    Tämä suora leikkaa x-akselin pisteessä $(2x_0, 0)$ ja y-akselin pisteessä $(0, 2/x_0)$. Kolmion S_1 ala on siis $(1/2)2x_0(2/x_0) = 2$. Kolmioiden S_1 ja S_2 leikkauksen ala on siis enintään 2. Valitaan P siten, että P:n kautta piirretty tangentti sivuaa yksikköympyrää. Jos nyt Q on tämä sivuamispiste, pisteen P kautta hyperbelille $xy = 1$ ja pisteen Q kautta yksikköympyrälle piirretyt tangentit yhtyvät. Tällöin kolmio S_1 on sama kuin S_2 ja näiden leikkauksen ala on siis 2. Kysytty maksimiarvo on siis 2. On myös selvää, että jos S_1 ei ole sama kuin S_2, niin kolmioiden leikkauksen alan on oltava pienempi kuin 2. Niinpä tangenttien on leikkauksen maksimialan tapauksessa yhdyttävä eli niiden leikkauskulma on $0°$.

11. Eräässä koodijärjestelmässä sallittuja koodeja ovat kaikki nollista ja ykkösistä koostuvat jonot, jotka alkavat ykkösellä ja joissa ei ole kahta ykköstä peräkkäin. Kuinka monta enintään kymmenen merkin pituista sallittua koodisanaa tässä järjestelmässä on?

    Ratkaisu. Olkoon täsmälleen n merkin mittaisten sallittujen koodisanojen lukumäärä $c(n)$ ja enintään n merkin mittaisten koodisanojen lukumäärä $K(n)$. Tästä määritelmästä on selvää, että

$$K(n) = c(n) + c(n-1) + \cdots + c(1)$$

    kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

    Olkoon $n > 2$. Jokainen n merkin mittainen koodisana alkaa merkeillä 10. Tämän jälkeen voi seurata mikä tahansa sallittu enintään $n - 2$ merkin mittainen jono tai myös $n - 2$ merkin mittainen jono nollia. Niinpä

$$\begin{aligned} c(n) &= K(n-2) + 1 \\ &= c(n-2) + c(n-3) + \cdots + c(1) + 1. \end{aligned}$$

    Sijoittamalla tähän kaavaan luvun n paikalle $n + 1$ saadaan

$$c(n+1) = c(n-1) + c(n-2) + \cdots + c(1) + 1;$$

vähentämällä nämä yhtälöt toisistaan todetaan, että luvuilla $c(n)$ pätee rekursiivinen kaava

$$c(n+1) - c(n) = c(n-1)$$

kaikilla $n > 2$. Tätä rekursioyhtälöä on helppo käyttää luvun $c(n)$ laskemiseen pienillä muuttujan n arvoilla. (Havaitaan myös, että luvut $c(n)$ ovat itse asiassa samat kuin tunnetut Fibonaccin luvut.) Aiemmin todetun yhtälön $c(n) = K(n-2) + 1$ perusteella voidaan nyt laskea, että $K(10) = c(12) - 1 = 144 - 1 = 143$.

12. Kutsutaan *kokonaislukuväliksi* mitä tahansa joukkoa $\{i, i+1, \ldots, j-1, j\}$ missä $i, j \in \mathbb{N}$ ja $i \leq j$. Kokonaislukuvälin pituus on luonnollisesti erotus $j - i$. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joilla n^2 sisältyy johonkin kokonaislukuväliin, jonka pituus on $8n$ ja joka sisältää täsmälleen n neliölukua.

    Ratkaisu. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Triviaali havainto: n^2 on n. neliöluku eli kokonaislukuväli $\{1, 2, \ldots, n^2 - 1, n^2\}$ sisältää n neliölukua. Mikään kokonaislukuväli pituudeltaan $n^2 - 1$ ei voi sisältää enempää kuin n neliölukua, sillä neliöluvut ovat tiheimmässä pienten lukujen joukossa.

    Perustellaan ja muotoillaan väite neliölukujen tiheydestä täsmällisemmin. Suurin kokonaislukuvälin $\{i, i+1, \ldots, j-1, j\}$ sisältämä neliöluku on $(\lfloor\sqrt{j}\rfloor)^2$, missä $\lfloor x \rfloor$ on suurin kokonaisluku n, jolla pätee $n \leq x$. Pienin tämän kokonaislukuvälin sisältämä neliöluku on $(\lfloor\sqrt{i-1}\rfloor + 1)^2$. Tästä voidaan päätellä, että kokonaislukuväli sisältää

$$\lfloor\sqrt{j}\rfloor - (\lfloor\sqrt{i-1}\rfloor + 1) + 1 = \lfloor\sqrt{j}\rfloor - \lfloor\sqrt{i-1}\rfloor$$

    neliölukua. Jos siis $j - i = n^2 - 1$, pätee

$$\begin{aligned} \lfloor\sqrt{j}\rfloor - \lfloor\sqrt{i-1}\rfloor &= \lfloor\sqrt{i-1+n^2}\rfloor - \lfloor\sqrt{i-1}\rfloor \\ &\leq \lfloor\sqrt{i-1} + \sqrt{n^2}\rfloor - \lfloor\sqrt{i-1}\rfloor \\ &\leq \lfloor\sqrt{i-1}\rfloor + \lfloor\sqrt{n^2}\rfloor - \lfloor\sqrt{i-1}\rfloor \\ &= n. \end{aligned}$$

    Tämä todistaa aiemman väitteen.

    On siis osoitettu, että jos kokonaislukuvälin pituus on n^2-1 (tai vähemmän), niin se sisältää enintään n neliölukua. Jos siis $8n \leq (n-1)^2 - 1$, n^2 ei voi sisältyä mihinkään kokonaislukuväliin, jonka pituus on $8n$ ja joka sisältää n neliölukua. Ratkaisemalla epäyhtälöstä n saadaan

$$8n \leq (n-1)^2 - 1 \iff 10n \leq n^2 \iff 10 \leq n.$$

    Tehtävän ehdot toteuttavia lukuja voivat siis olla vain ne n, joilla $1 \leq n \leq 9$.

    Tarkastelemalla tapaukset erikseen todetaan, että mahdollisten n joukko on $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

13. Todista, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee seuraava binomikertoimia koskeva summakaava:

$$\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1}\binom{n}{k} = n3^{n-1}$$

Ratkaisu. Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$ pätee tunnettu Newtonin binomikaava

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Derivoimalla tämä kaava puolittain saadaan

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1};$$

pyydetty summakaava saadaan tästä sijoittamalla $x = 2$.

14. Onko olemassa kolmannen asteen polynomia $P(x)$, jolla on tasan kolme eri reaalijuurta $r_1 < r_2 < r_3$ ja jonka derivaatalla pätee

$$P'\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right) = P'\left(\frac{r_2+r_3}{2}\right) = 0?$$

Ratkaisu. Olkoon $P(x)$ mielivaltainen kolmannen asteen polynomi, jolla on kolme eri reaalijuurta $r_1 < r_2 < r_3$ ja jonka 3. asteen termin kerroin on $a \neq 0$. Kirjoitetaan $P(x)$ juurimuodossa ja derivoidaan se.

$$P(x) = a(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3) \quad \Longrightarrow$$

$$P'(x) = a(x-r_2)(x-r_3) + a(x-r_1)(x-r_3) + a(x-r_1)(x-r_2)$$

Sijoitetaan derivaattaan arvo $(r_1+r_2)/2$:

$$\begin{aligned} P'\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right) &= a\frac{r_1-r_2}{2}\left(\frac{r_1+r_2}{2}-r_3\right) + a\frac{-r_1+r_2}{2}\left(\frac{r_1+r_2}{2}-r_3\right) \\ &\quad +a\frac{-r_1+r_2}{2}\frac{r_1-r_2}{2} \\ &= -a\left(\frac{r_2-r_1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Koska $a \neq 0$ ja $r_1 < r_2$, pätee $P'((r_1+r_2)/2) \neq 0$. Näin ollen vaaditut ehdot toteuttavaa polynomia ei voi olla olemassa.

15. Olkoon p alkuluku. Todista, että polynomi $x^4 - px + p$ on jaoton kokonaislukukertoimisten polynomien joukossa, eli että sitä ei voi jakaa kahden kokonaislukukertoimisen polynomin tuloksi.

Ratkaisu. Rationaalilukujuurikokeella todetaan, että tehtävän polynomin ainoat mahdolliset kokonaislukujuuret ovat $\pm 1, \pm p$. Kokeilemalla selviää, että mikään näistä ei ole juuri. Polynomia ei siis voida esittää ensimmäisen ja kolmannen asteen kokonaislukukertoimisten polynomien tulona.

Oletetaan, että tehtävän polynomi voidaan esittää kahden kokonaislukukertoimisen toisen asteen polynomin tulona eli että on olemassa kokonaisluvut a, b, c ja d, joilla pätee

$$\begin{aligned} x^4 - px + p &= (x^2+ax+b)(x^2+cx+d) \\ &= x^4 + (a+c)x^3 + (b+ac+d)x^2 + (ad+bc)x + bd. \end{aligned}$$

Kertoimia vertailemalla saadaan yhtälöryhmä

$$a + c = 0, \quad b + ac + d = 0, \quad ad + bc = -p, \quad bd = p.$$

Todistetaan, että tällä yhtälöryhmällä ei ole kokonaislukuratkaisuja. Sijoitetaan ensimmäisestä yhtälöstä saatava $c = -a$ kolmeen muuhun; ryhmä saa muodon

$$b + d = a^2, \quad a(b - d) = p, \quad bd = p.$$

Ensimmäisestä ja viimeisestä yhtälöstä todetaan, että sekä b että d ovat positiivisia; koska p on alkuluku ja muuttujat kokonaislukuja, viimeisen yhtälön nojalla joko b tai d on arvoltaan p ja toinen on 1. Ensimmäinen yhtälö saa siis muodon $p + 1 = a^2$. Toisaalta keskimmäisestä yhtälöstä nähdään, että a jakaa alkuluvun p; a on siis ± 1 tai $\pm p$. Tämä on selvästi ristiriidassa yhtälön $p + 1 = a^2$ kanssa.

16. Olkoon

$$I_n = e^{-n} \int_1^n \frac{e^x}{x^2} dx$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Osoita, että on olemassa vakio $C > 0$, jolla pätee

$$I_n < \frac{C}{n} \quad \text{kaikilla } n \geq 2.$$

Ratkaisu. Tarkastellaan integroitavaa funktiota $f(x) = e^x/x^2$. Sen derivaatta on

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x}{x^2} - 2\frac{e^x}{x^3} \\ &= e^x \frac{x-2}{x^3}. \end{aligned}$$

Havaitaan, että derivaatta on ei-negatiivinen, kun $x \in [2, \infty[$. Tämä tarkoittaa, että $f(x)$ on tällä välillä kasvava. Niinpä funktion $f(x)$ maksimiarvo välillä $[2, n]$ on $f(n)$. Jaetaan tehtävän integraali väleille $[1, 2]$ ja $[2, n]$ ja arvioidaan jälkimmäisen välin integraalia välin pituuden ja integroitavan funktion maksimiarvon tulolla:

$$\begin{aligned} I_n &= e^{-n} \int_1^n \frac{e^x}{x^2} dx \\ &= e^{-n} \int_1^2 \frac{e^x}{x^2} dx + e^{-n} \int_2^n \frac{e^x}{x^2} dx \\ &\leq e^{-n} \int_1^2 \frac{e^x}{x^2} dx + e^{-n}(n-2)\frac{e^n}{n^2} \\ &= e^{-n} \int_1^2 \frac{e^x}{x^2} dx + \frac{n-2}{n^2}. \end{aligned}$$

Välillä $[1, 2]$ voidaan käyttää karkeaa arviota $e^{x-n}/x^2 \leq e^{2-n}$; saadaan

$$\begin{aligned} I_n &\leq \int_1^2 e^{2-n} dx + \frac{n-2}{n^2} \\ &= e^{2-n} + \frac{n-2}{n^2}. \end{aligned}$$

Eksponenttifunktion tiedetään kasvavan nopeammin kuin minkään polynomin. Niinpä termille $e^{2-n} = e^2/e^n$ löytyy varmasti muotoa A/n, missä $A > 0$, oleva yläraja. Esimerkiksi kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätevästä tunnetusta epäyhtälöstä $1+x \leq e^x$ voidaan päätellä, että $e^2/e^n \leq e^2/(1+n) < e^2/n$. Nyt siis

$$\begin{aligned} I_n &< \frac{e^2}{n} + \frac{n-2}{n^2} \\ &= \frac{e^2}{n} + \frac{1-\frac{2}{n}}{n} \\ &< \frac{e^2}{n} + \frac{1}{n} = \frac{e^2+1}{n}. \end{aligned}$$

Luku $C = e^2 + 1$ toteuttaa siis tehtävässä vaaditun ehdon.

17. Olkoon $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jono reaalilukuja, jolla $a_1 = 1$ ja

$$3^{a_{n+1}-a_n} = 1 + \frac{5}{5n-4} \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Määritä pienin $n > 1$, jolla a_n on kokonaisluku.

Ratkaisu. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Kirjoitetaan jonon $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ määrittävä rekursioyhtälö kaikille $1 \leq k \leq n$.

$$\begin{aligned} 3^{a_2-a_1} &= 1 + \frac{5}{5\cdot 1-4} \\ 3^{a_3-a_2} &= 1 + \frac{5}{5\cdot 2-4} \\ &\vdots \\ 3^{a_{n+1}-a_n} &= 1 + \frac{5}{5n-4} \end{aligned}$$

Kertomalla nämä yhtälöt puolittain toisillaan saadaan määritettyä jonon jäsenelle a_{n+1} eksplisiittinen kaava:

$$\begin{aligned} 3^{a_{n+1}-a_1} &= \left(1+\frac{5}{5n-4}\right)\left(1+\frac{5}{5(n-1)-4}\right)\cdots\left(1+\frac{5}{5\cdot 2-4}\right)\left(1+\frac{5}{5\cdot 1-4}\right) \\ &= \left(\frac{5n+1}{5n-4}\right)\left(\frac{5(n-1)+1}{5(n-1)-4}\right)\cdots\left(\frac{5\cdot 2+1}{5\cdot 2-4}\right)\left(\frac{5\cdot 1+1}{5\cdot 1-4}\right) \end{aligned}$$

Koska $5(k-1)+1 = 5k-4$ kaikilla k, supistuu yhtälön oikealta puolelta pois kaikki paitsi $(5n+1)/(5-4)$; saadaan siis

$$3^{a_{n+1}} = 3^{a_1}(5n+1) = 3(5n+1).$$

Jotta a_n olisi kokonaisluku, on siis luvun $3(5(n-1)+1) = 3(5n-4)$ oltava luvun 3 potenssi. Tutkimalla kolmosen potensseja todetaan, että $3^4 = 81$ on pienin ykköstä suurempi muotoa $5n-4$ oleva kolmosen potenssi. Tällöin $n = 17$, eli pienin ykköstä suurempi indeksi, jolla a_n on kokonaisluku, on 17.

18. Tarkastellaan positiivisten kokonaislukujen *osituksia* eli esityksiä toisten positiivisten kokonaislukujen summina. Ositukset ovat samoja, jos niissä esiintyvät yhteenlaskettavat eli *osat* ovat samat; osien järjestyksellä ei siis ole väliä. Listataan esimerkkinä luvun 5 kaikki eri ositukset:

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ &= 4+1 \\ &= 3+2 \\ &= 3+1+1 \\ &= 2+2+1 \\ &= 2+1+1+1 \\ &= 1+1+1+1+1 \end{aligned}$$

Määritellään $P_k(n)$ luvun n niiden ositusten lukumääräksi, joiden jokainen osa on pienempi tai yhtäsuuri kun k. Olkoon $P^k(n)$ luvun n niiden ositusten lukumäärä, joissa on enintään k osaa. Esimerkistä havaitaan, että $P_k(5) = P^k(5)$ pätee kaikilla mahdollisilla k:n arvoilla. Todista, että tämä pätee yleisesti, ts. että

$$P_k(n) = P^k(n) \quad \text{kaikilla } n, k \in \mathbb{N}, \quad k \leq n.$$

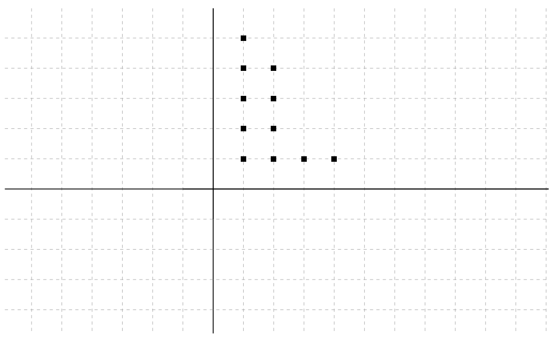
Ratkaisu. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Luvun n mielivaltainen ositus voidaan aina järjestää siten, että ensin kirjoitetaan suurin osa, ja seuraavat osat kirjoitetaan laskevassa järjestyksessä; ositus, jossa on k osaa voidaan siis kirjoittaa muodossa

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k,$$

missä luvut a_i ovat positiivisia kokonaislukuja ja $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k$. Esitetään näin järjestetty ositus koordinaatistossa värittämällä kokonaislukukoordinaattiset pisteet

$$\begin{array}{ccc} (1,1),(1,2) & \cdots & (1,a_1) \\ (2,1),(2,2) & \cdots & (2,a_2) \\ & \vdots & \\ (k,1),(k,2) & \cdots & (k,a_k). \end{array}$$

Esitetään esimerkkinä luvun 11 ositus $11 = 5+4+1+1$.



Lukemalla tämä graafinen esitys tulkitsemalla x- ja y-akselit toisinpäin - siis peilaamalla esitys suoran $y = x$ suhteen - kuva esittääkin luvun 11 ositusta $11 = 4 + 2 + 2 + 2 + 1$. Ositus, jonka suurin osa oli 5 muuttui siis peilattuna ositukseksi, jossa on 5 osaa. On selvää, että tämä menettely toimii yleisesti - graafisen esityksen peilaus suoran $y = x$ suhteen antaa siis yksikäsitteisen vastaavuuden luvun n niiden ositusten joukon, joissa on k osaa, ja niiden ositusten joukon, joiden suurin osa on k, välille. Tehtävän väite seuraa tästä.

19. Olkoon $M > 0$ mielivaltainen ja $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio, jolla pätee $|f(x)| \leq M$ kaikilla $x \in [0, 2]$. Määritellään funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ rekursiivisesti asettamalla $f_1 = f$ ja

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt$$

kaikilla $n \geq 1$ ja $x \in [0, 2]$. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{kaikilla } x \in [0, 2].$$

Ratkaisu. Pyritään arvioimaan funktioiden f_n itseisarvoja. Funktion $f_1 = f$ itseisarvon ylärajan perusteella tiedetään, että

$$\begin{aligned} |f_2(x)| &= \left|\int_0^x f_1(t)dt\right| \leq \int_0^x |f_1(t)|dt \\ &\leq \int_0^x M dt = Mx. \end{aligned}$$

Tätä integroimalla saadaan yläraja funktion f_3 itseisarvolle:

$$\begin{aligned} |f_3(x)| &= \left|\int_0^x f_2(t)dt\right| \leq \int_0^x |f_2(t)|dt \\ &\leq \int_0^x Mx dt = \frac{M}{2}x^2. \end{aligned}$$

Menettelyä toistamalla voidaan päätellä epäyhtälö

$$|f_n(x)| \leq \frac{M}{(n-1)!}x^{n-1}.$$

Edellä todettiin jo, että epäyhtälö pätee, kun $n = 1, 2$; jos se pätee, kun $n = k$, niin

$$\begin{aligned} |f_{k+1}(x)| &= \left|\int_0^x f_k(t)dt\right| \leq \int_0^x |f_k(t)|dt \\ &\leq \int_0^x \frac{M}{(k-1)!}x^{k-1}dt = \frac{M}{(k-1)!k}x^k = \frac{M}{k!}x^k; \end{aligned}$$

epäyhtälö siis pätee myös, kun $n = k + 1$. Induktioperiaatteen mukaan epäyhtälö siis pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Näin ollen

$$|f_n(x)| \leq \frac{M}{(n-1)!}2^{n-1}$$

kaikilla $x \in [0,2]$ ja $n \in \mathbb{N}$. Koska $2^{n-1}/(n-1)! \to 0$ kun $n \to \infty$, on siis oltava

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

kaikilla $x \in [0,2]$.

20. Olkoon $q(n)$ yhtälön

$$x^2 + y^2 = n$$

sellaisten ratkaisuparien (x,y) lukumäärä, missä x ja y ovat positiivisia kokonaislukuja. (Merkintä (x,y) viittaa *järjestettyyn* pariin, eli (x,y) ja (y,x) ovat eri ratkaisut, jos $x \neq y$.) Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q(1)+q(2)+\cdots+q(n)}{n} = \frac{\pi}{4}.$$

Ratkaisu. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tarkastellaan kaikkia kokonaislukupareja (x,y), jotka ratkaisevat jonkun yhtälöistä

$$x^2 + y^2 = k,$$

missä $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n$. Määritelmän mukaan tällaisia kokonaislukupareja on yhteensä $q(1)+q(2)+\cdots+q(n)$ kappaletta. Sijoitetaan kokonaislukuparit koordinaatistoon. Havaitaan, että kyseessä ovat kaikki ensimmäisen neljänneksen kokonaislukukoordinaattiset pisteet, jotka sisältyvät origokeskiseen $\sqrt{n}$-säteiseen ympyrään. Tulkitaan jokainen koordinaatistoon sijoitettu pistepari 1-sivuisen neliön, jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset, oikeaksi yläkulmaksi. Pinta-aloja vertailemalla päädytään toteamaan epäyhtälö

$$q(1)+q(2)+\cdots+q(n) \le \frac{\pi}{4}\sqrt{n}^2 = \frac{\pi}{4}n.$$

Jos taas piirretään origokeskinen $\sqrt{n}-1$-säteinen ympyrä, havaitaan että edellämainitut neliöt yhdessä peittävät koko tämän ympyrän ensimmäiseen neljännekseen sijoittuvan osan. Niinpä

$$\frac{\pi}{4}(\sqrt{n}-1)^2 \le q(1)+q(2)+\cdots+q(n).$$

Yhdistämällä nämä epäyhtälöt ja jakamalla luvulla n saadaan kaksoisepäyhtälö

$$\frac{\pi}{4}\frac{n-2\sqrt{n}+1}{n} \le \frac{q(1)+q(2)+\cdots+q(n)}{n} \le \frac{\pi}{4}.$$

Tehtävän väite seuraa, kun annetaan $n \to \infty$.