Pythagoraan polku 16.4.2011

1. Todista väittämä: Jos tasakylkisen kolmion toista kylkeä jatketaan omalla pituudellaan huipun toiselle puolelle ja jatkeen päätepiste yhdistetään kannan toisen päätepisteen kanssa, niin on yhdysjana kohtisuorassa kantaa vastaan.

   RATK Olkoot tasakylkisen kolmion kulmat α, $(\pi-\alpha)/2$ ja $(\pi-\alpha)/2$. Konstruktiossa syntyy toinen tasakylkinen kolmio, jonka kulmat ovat $\pi-\alpha$, $(\pi-(\pi-\alpha))/2$ ja $(\pi-(\pi-\alpha))/2$. Kysytty kulma muodostuu kantakulmista $(\pi-\alpha)/2$ ja $(\pi-(\pi-\alpha))/2$, joiden summa on $\pi/2$.

2. Puolita kolmion pinta suoralla, joka kulkee kolmion sivulla olevan tunnetun pisteen kautta.

   RATK Kolmiosta tunnetaan pituudet A, B ja H, sekä pituus x (katso kuvaa). Ratkaistaan pituus b, joka määrää kysytyn suoran. Yhdenmuotoisista kolmista saadaan verranto $\frac{h}{H}=\frac{b}{B}$. Toisaalta aloja koskeva ehto on $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}AH)=\frac{1}{2}xh$. Nämä yhdistämällä saadaan $b=\frac{AB}{2x}$.

3. Tunnetun kolmion kärkipisteet keskipisteinä on piirrettävä kolme ympyrää, jotka kaksittain sivuavat toisiansa ulkopuolelta.

   RATK Olkoot kolmion sivut a, b ja c ja r_a sivua a vastaavaan kärkeen pirretyn ympyrän säde. Samoin r_b ja r_c. Saadaan yhtälöt $a=r_b+r_c$, $b=r_a+r_c$ ja $c=r_a+r_b$. Ratkaisemalla ryhmä saadaan $r_a=(b+c-a)/2$, $r_b=(a+c-b)/2$ ja $r_c=(a+b-c)/2$.

4. Vuosien 1860–70 kuluessa lisääntyi Helsingin väkiluku puolella vuoden 1860 väkiluvusta. Paljonko väkeä olisi Helsingissä 1900, jos väkiluku lisääntyisi seuraavinakin vuosikymmeninä samassa suhteessa ja siellä 1860 oli 21 700?

   RATK Olkoon $a=21700$. Vuonna 1870 asukkaita oli $\frac{3}{2}a$. Kun kasvusuhde on sama, niin 1900 asukkaita on $(\frac{3}{2})^4a\approx 109900$.

5. Mies käveli kaupungista lähimpään majataloon. Kun hän oli käynyt 1 t, ajoi matkustaja kyydillä hänen ohitsensa. Majatalossa viipyi kyytimies $\frac{1}{4}$ t ja tapasi paluumatkallansa jalkamiehen 2 km:n päässä majatalosta. Kuinka kaukana kaupungista on majatalo, jos jalkamies 10 km:n matkalla viipyy 2 t ja kyytimies 50 min?

   RATK Saadaan heti jalkamiehen nopeus $v_1=5$ km/h ja kyytimiehen $v_2=12$ km/h. Olkoon x matka ensimmäiseltä kohtauspaikalta majatalolle. Nyt tapaamisten välinen aika (=matka/nopeus) voidaan ilmoittaa kahdella tavalla:

$$\frac{x-2km}{v_1} = \frac{x+2km}{v_2} + \frac{1}{4}h.$$

Tästä saadaan $x = 7km$, jolloin kysytty matka on $(7+5)km = 12km$.

6. Kolmenumeroisen luvun numeroiden summa on 15. Jos luku jaetaan ykkösten numerolla, saadaan osamääräksi 91; jos lukuun lisätään 99, saadaan toinen luku, jossa ovat samat numerot kuin alkuperäisessä, vaikka vastakkaisessa järjestyksessä. Mikä se luku on?

   RATK Olkoot luvun numerot abc. Ehdot ovat $a+b+c=15$, $100a+10b+c=91c$ ja $100a+10b+c+99=100c+10b+a$, joista ratkeaa $a=5, b=4$ ja $c=6$.

7. 600 m:n pituista ja 400 m:n levyistä suorakaiteen muotoista peltoa ympäröi joka taholta yhtä leveä niitty, jonka ala on 4 kertaa niin suuri kuin pellon. Kuinka leveä niitty on?

   RATK Olkoon niityn leveys metreinä x. Tällöin niittyn pinta-alalle pätee $(400+2x)(600+2x)-600\cdot 400 = 4\cdot 400\cdot 600$. Sieventämällä saadaan toisen asteen yhtälö $x^2+500x-240000=0$, jonka postiivinen ratkaisu on $x=300$. Siis niityn leveys on 300m.

8. Neliön muotoisesta paperilevystä, jonka sivu on $1\frac{1}{2}$ dm, leikataan ympyräsektori, jonka keskipiste on neliön sivun keskipisteessä ja kaari sivuaa yhtä neliön sivua. Tämä sektori taivutetaan kartion vaippapinnaksi. Suuriko on täten syntyneen kartion tilavuus?

   RATK Sektorin sisään voidaan piirtää tasasivuinen kolmio, joten sektorin keskuskulma on 60 astetta. Nyt Kartion säde r saadaan yhtälöstä $2\pi r = \frac{60}{360}2\pi R$. Kartion korkeus $h = \sqrt{R^2-r^2}$ saadaan Pythagoraan lauseella. Lopulta $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi\sqrt{35}}{648}R^3 \approx 0,0968dm^3$.

9. Kahteen paikkaan, joiden väli on 10 pnk, näkyi sama lentotähti syttyvän 45° yli taivaanrannan, mutta päinvastaisissa ilmansuunnissa. Korkeallako maanpinnasta syttyi lentotähti, jos maapallon isoympyrän kehä on 40 000km? [Peninkulma on 10 km.]

   RATK Tarkastellaan pisteessä C olevaa lentotähteä pisteistä A ja B. Olkoon lisäksi O Maan keskipiste ja D piste, jossa pisteiden C ja O yhdysjana leikkaa pisteiden A ja B kautta kulkevan isoympyrän kaaren. Olkoon Maan säde R ja lentotähden lentokorkeus h. Verrannosta $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{50km}{40000km}$ saadaan kulmaksi $\alpha = \frac{\pi}{400}$. Koska lentotähti näkyy pisteestä A 45 asteen kulmassa, ovat kolmion muut kulmat $\frac{3\pi}{4}$ ja $\beta = \pi - \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{400} = \frac{99\pi}{400}$. Sovelletaan sinilausetta kolmioon OAC. $\frac{R}{\sin\beta} = \frac{R+h}{\sin\frac{3\pi}{4}}$, josta $h = R(\frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{sin\beta} - 1) \approx 50,6$km.

10. Missä on tasa-aineisen, ympyrä muotoisen levyn painopiste, jos siinä jossakin kohdassa on ympyrän muotoinen reikä?

    RATK Olkoon levyn säde R, rei'än säde r sekä d levyn ja rei'än keskipisteiden välinen etäisyys. Symmetrian nojalla painopiste on levyn ja rei'än keskipisteiden kautta kulkevalla suoralla ei-rei'än puolella levyn keskipistettä. Lasketaan painopisteen ja levyn keskipisteen etäisyys x. Kun reikä-levy tuetaan painopisteestä, niin $\Sigma\bar{M} = \bar{0}$ eli $m_l gx - m_r g(x+d) = 0$, jossa m_l on ehjän levyn massa ja m_r "rei'än massa". Koska kappleen paino on suoraan verrannollinen alaan, saadaan $\pi R^2 x - \pi r^2(x+d) = 0$, josta $x = \frac{r^2 d}{R^2 - r^2}$.

    ***

11. Olkoon $\bar{a} \neq \bar{0}$ origosta alkava avaruuden vektori. Minkä pinnan muodostavat ne avaruuden pisteet, joiden paikkavektoreilla $\bar{b}$ on voimassa yhtälö $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a} \cdot \bar{b}|$?

    RATK Ehto on $|ab\cos t| = |ab\sin t\ \bar{e}|$ eli $|\cos t| = |\sin t|$, josta ratkeaa kulma $t = 45 + 180n$ (astetta, $n \in \mathbb{Z}$). Siis $\bar{b}$:n pituus saa olla mikä vain kunhan se on 45 tai 225 asteen kulmassa $\bar{a}$:han nähden. Näiden origosta alkavien vektoreiden kärjet piirtävät avaruuteen äärettömän kaksoiskartion, jonka akseli on vektorin $\bar{a}$ määräämä suora, kärki on origossa ja akselin ja sivun välinen kulma 45 astetta.

12. Todista $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$.

    RATK
    $$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2,$$
    koska aritmeettisgeometrisen epäyhtälön mukaan
    $$\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}) \geq \sqrt{\sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} = 1.$$

13. Ratkaise yhtälö $x^4 - 3x^3 + 3x + 1 = 0$.

    RATK Jaetaan puolittain termillä x^2, jolloin saadaan
    $$x^2 - 3x + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = (x - \frac{1}{x})^2 - 3(x - \frac{1}{x}) + 2 = 0.$$

Jatketaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla. Saadaan $x - \frac{1}{x} = 1$ tai $x - \frac{1}{x} = 2$ ja edelleen $x = 1 \pm \sqrt{2}$ tai $x = 1/2(1 \pm \sqrt{5})$.

14. Olkoot A, B, C ja D tason pisteitä. Todista: Jos jokaisella pisteellä X on voimassa ehto $|AX|^2 + |CX|^2 = |BX|^2 + |DX|^2$, niin ABCD on suorakulmio. (Merkintä $|AB|$ tarkoittaa janan AB pituutta.)

    RATK Samaistetaan piste P paikkavektorinsa $\bar{OP}$ kanssa. Tällöin Ehto $|AX|^2 + |CX|^2 = |BX|^2 + |DX|^2$ voidaan kirjoittaa muodossa $(A-X)^2 + (C-X)^2 = (B-X)^2 + (D-X)^2$, joka edelleen saadaan muotoon $A^2 + C^2 - B^2 - D^2 = 2X \cdot (A + C - B - D)$. Yhtälö toteutuu kaikilla tason pisteillä X vain, kun $A + C = B + D$ (1) ja $A^2 + C^2 = B^2 + D^2$ (2). Ehdon (1) perusteella nelikulmio $ABCD$ on suunnikas. Lisäksi ehdosta (1) seuraa, että $(A + C)^2 = (B + D)^2 \Leftrightarrow A^2 + C^2 + 2A \cdot C = B^2 + D^2 + 2B \cdot D$ (3). Vähnetämällä kaavasta (3) kaava (2) saadaan $2A \cdot C = 2B \cdot D$ (4). Vähentämällä kaava (4) kaavasta (3) saadaan $(A - C)^2 = (B - D)^2$ eli suunnikkaan $ABCD$ lävistäjät ovat yhtä pitkät ja suunnikas on suorakulmio.

15. Olkoon n positiivinen kokonaisluku, joka ei ole jaollinen kahdella tai viidellä. Osoita, että on olemassa luvun n monikerta, joka koostuu pelkästään ykkösistä.

    RATK Tarkastellaan n alkion lukujoukkoa $\{1, 11, \ldots, 11 \cdots 1\}$. Olkoon x_i i kappaleesta ykkösiä koostuva luku. Jos jollekin joukon alkiolle x_i on voimassa $x_i \equiv 0 \mod n$, niin $x_i = kn$ ja x_i on haluttu pelkästään ykkösistä koostuva luvun n monikerta. Jos mikään luvuista x_i ei ole jaollinen luvulla n, niin mahdollisia jäännöksiä mod n ovat ovat $1, 2, \ldots n-1$. Koska jäännöksiä on $n-1$ kappaletta, vähintään kaksi joukon luvuista kuuluu samaan jäännösluokkaan mod n. Olkoot nämä luvut x_i ja x_j. Oletetaan, että $x_i > x_j$. Tällöin $x_i - x_j \equiv 0 \mod n$ eli $x_i - x_j = \underbrace{111 \cdots 1}_{(i-j)kpl}\underbrace{00 \cdots 0}_{jkpl}$ on jaollinen luvulla n. Koska oletuksen nojalla n ei ole jaollinen luvulla 2 eikä luvulla 5, niin välttämättä luvun alkuosan $111 \cdots 1$ on oltava jaollinen luvulla n.

16. Kymmenestä janasta kunkin pituus on pidempi kuin 1 cm mutta lyhempi kuin 55 cm. Osoita, että janoista voidaan valita kolmion kolme sivua.

    RATK Olkoot janojen pituudet $1 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_{10} < 55$. Jos janoista ei voida muodostaa kolmiota, niin tällöin välttämättä ovat voimassa epäyhtälöt $a_3 \geq a_1 + a_2 > 1 + 1 = 2, a_4 \geq a_2 + a_3 > 1 + 2 = 3, a_5 \geq a_3 + a_4 > 2 + 3 = 5, a_6 \geq a_4 + a_5 > 3 + 5 = 8, a_7 \geq a_5 + a_6 > 5 + 8 = 13, a_8 \geq a_6 + a_7 > 8 + 13 = 21, a_9 \geq a_7 + a_8 > 13 + 21 = 34, a_{10} \geq a_8 + a_9 > 21 + 34 = 55$. Koska päädyttiin ristiriitaan $a_{10} > 55$, voidaan janoista muodostaa kolmio.

17. Kuinka monessa joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ osajoukossa ei ole yhtään peräkkäistä lukua?

RATK Jokaista osajoukkoa vastaa n merkin pituinen binäärijono. Olkoon a_n sellaisten n merkin binäärijonjoen lukumäärä, joissa ei ole peräkkäisiä ykkösiä. Jos binäärijonon alussa on 0, niin jono voi jatkua a_{n-1} tavalla ja jos jonon alussa on 10, niin jono voi jatkua a_{n-2} tavalla. Siis $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Lisäksi $a_1 = 2$ ja $a_2 = 3$. Siis a_n on Fibonaccin luku F_{n+2}.

18. Osoita, että seitsemästä reaaliluvusta $y_1, \ldots, y_7$ voidaan valita kaksi lukua siten, että niille on voimassa $0 \leq \frac{y_i - y_j}{1 + y_i y_j} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

RATK Olkoot x_i välin $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ luvut, joille $y_i = \tan x_i$. Jaetaan väli $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ kuuteen yhtä pitkään osaväliin. Seitsemästä luvusta x_i välttämättä vähintään kaksi on samalla osavälillä, joten on voimassa $0 \leq x_i - x_j \leq \frac{\pi}{6}$. Koska tangentti on aidosti kasvava funktio, saadaan $\tan 0 \leq \tan(x_i - x_j) \leq \tan(\frac{\pi}{6})$, mistä tangentin yhteenlaskukaavan avulla saadaan $0 \leq \frac{\tan x_i - \ tan x_j}{1 + \tan x_i \tan x_j} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ ja edelleen $0 \leq \frac{y_i - y_j}{1 + y_i y_j} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

19. Osoita, ettei ole olemassa polynomia $p(x)$, jolle on voimassa

$$p(n) = \log 1 + \log 2 \ + \cdots + \log n$$

kaikille luonnollisille luvuille n.

RATK Koska $\log x < x$, niin $p(n) < n \log n < n^2$, joten polynomin p aste on korkeintaan kaksi. Selvästi $p(x)$ ei ole vakio eikä lineaarinen, joten voidaan olettaa, että $p(x)$ on toisen asteen polynomi. Koska $p(1) = \log 1 = 0$, voidaan kirjoittaa $p(x) = (x-1)(ax+b)$. Tarkastelemalla muuttujan arvoja $x = 2$ ja $x = 4$ saadaan yhtälöt $\log 2 = p(2) = 2a + b$ ja $\log 24 = p(4) = 3(4a + b)$, joista ratkaistaan $a = \frac{1}{6} \log 3$ ja $b = \log 2 - \frac{1}{3} \log 3$. Mutta nyt $\log 2 + \log 3 = p(3) = 2(\frac{3 \log 3}{6} + \log 2 - \frac{1}{3} \log 3)$ eli $3 \log 2 = 2 \log 3$ eli päädyttiin ristiriitaan $2^3 = 3^2$, joten polynomia p ei ole olemassa.

20. Newtonin jäähtymislain mukaan kappaleen lämpötilan muutos on suoraan verrannollinen kappaleen ja ympäristön lämpötilaeroon. Uunin lämpötila on 190 $°C$. Sinne laitetaan kello viideltä 2kg:n paisti, jonka lämpötila on 10 $°C$. Varttia yli kuusi paistin sisälämpötila on 50 astetta. Milloin saadaan päivällistä, jos paisti halutaan syödä mediumina – sisälämpötila 65 astetta?

RATK Olkoon $u(t)$ paistin lämpötila ajan t (minuuttia) kuluttua. On annettu siis $u(0) = 10$ ja $u(75) = 50$. Ratkaistaan t, jolla $u(t) = 65$. Newtonin mukaan

$$\frac{du}{dt} = k(190 - u),$$

josta integroimalla

$$\int_{10}^{50} \frac{du}{190-u} = \int_0^{75} k\ dt$$

saadaan $k = \frac{\ln(9/7)}{75}$. Nyt sijoittamalla k ja integroimalla lauseke

$$\int_{10}^{65} \frac{du}{190-u} = \int_0^{t} k\ dt$$

saadaan $t = \frac{\ln(180/125)}{\ln(9/7)} \cdot 75 = 108$ (min). Siis päivällinen aikaisintaan kello 6.48.