Pythagoraan polku 2004
Malliratkaisuja

Tehtävä 1. *Ratkaise reaalilukujen joukossa yhtälö*

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

Ratkaisu. Oletetaan, että x on yhtälön ratkaisu. Jotta yhtälö olisi mielekäs, on oltava $x > 0$. Kerrotaan yhtälö puolittain luvulla $\sqrt{x+\sqrt{x}}$: saadaan

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^2 - \left(\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

eli

$$x + \sqrt{x} - \sqrt{x^2 - x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

eli

$$\sqrt{x^2 - x} = x - \frac{1}{2}\sqrt{x}.$$

Kun tämä yhtälö kerrotaan puolittain itsellään, saadaan

$$x^2 - x = x^2 - x\sqrt{x} + \frac{1}{4}x,$$

josta $\sqrt{x} = \frac{5}{4}$, $x = \frac{25}{16}$. Kun tämä x:n arvo sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön, yhtälön molemmista puolista saadaan $\frac{1}{2}\sqrt{5}$. Yhtälö toteutuu, ratkaisu on siis $x = \frac{25}{16}$. □

Tehtävä 2. *Ratkaise yhtälö*

$$\left\lfloor \frac{5+6x}{8} \right\rfloor = \frac{15x-7}{5}.$$

Merkintä $\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa suurinta kokonaislukua n, jolle $n \le x$.

Ratkaisu. Jos x on yhtälön ratkaisu, niin

$$\frac{15x-7}{5} \le \frac{5+6x}{8} < \frac{15x-7}{5} + 1,$$

joka sievenee muotoon

$$\frac{41}{10} < 9x \le \frac{81}{10}$$

ja edelleen

$$-\frac{1}{30} < \frac{15x-7}{5} \le \frac{13}{10}.$$

Lisäksi $\frac{15x-7}{5}$ on kokonaisluku, joten

$$\frac{15x-7}{5} = 0 \quad \text{tai} \quad \frac{15x-7}{5} = 1.$$

Siis x voi olla $\frac{7}{15}$ tai $\frac{4}{5}$. Kumpikin mahdollinen x:n arvo myös toteuttaa yhtälön. □

Tehtävä 3. *Olkoot $a > 0$, b ja c reaalilukuja, joille*

$$\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0$$

jollain positiivisella luvulla m. Osoita, että yhtälöllä

$$ax^2 + bx + c = 0$$

on ratkaisu x_0, jolle pätee $0 < x_0 < 1$.

Ratkaisu. Olkoon $f(x) = ax^2 + bx + c$. Oletuksen nojalla

$$\begin{aligned} f\left(\frac{m}{m+1}\right) &= \frac{am^2}{(m+1)^2} + \frac{bm}{m+1} + c = m\left(\frac{am}{(m+1)^2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m}\right) \\ &= m\left(\frac{am}{(m+1)^2} - \frac{a}{m+2}\right) = \frac{-am}{(m+1)^2(m+2)} < 0. \end{aligned}$$

Jos $c > 0$, $f(0) = c > 0$, joten f:llä on nollakohta välillä $\left(0, \dfrac{m}{m+1}\right)$. Jos $c \le 0$, niin

$$\begin{aligned} f(1) = a + b + c &= (m+1)\left(\frac{a}{m+1} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m+1}\right) \\ &= (m+1)\left(\frac{a}{m+1} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m+1} - \frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m}\right) \\ &= (m+1)\left(\frac{a}{(m+1)(m+2)} - \frac{c}{m(m+1)}\right) > 0. \end{aligned}$$

Yhtälöllä on tässä tapauksessa juuri välillä $\left(\dfrac{m}{m+1}, 1\right)$. □

Tehtävä 4. *Osoita, että 1 048 576 on ainoa kokonaisluku välillä* [1 000 000, 2 000 000]*, jota ei voida ilmaista kahden tai useamman peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun summana.*

Ratkaisu. Kaikki yhtä suuremmat parittomat positiiviset luvut $2n + 1$ voidaan ilmaista kahden peräkkäisen positiivisen luvun summina $n + (n + 1)$. Merkitään x:llä lukua, jota ei voida esittää. Koska x on parillinen, se on yhdistetty luku: $x = pq$ missä p ja q ovat kokonaislukuja. Olkoon x:n suurin alkutekijä p. Jos $p > 2$, niin p on pariton koska kaikki kakkosta suuremmat alkuluvut ovat parittomia. Siis $p = 2n+1$ jollakin kokonaisluvulla n. x voidaan ilmaista muodossa

$$x = pq = q(2n + 1) = (q - n) + (q - n + 1) + \cdots + q + \cdots + (q + n).$$

Siksi ainoa mahdollinen x on sellainen yhdistetty luku, jossa ei ole parittomia alkulukutekijöitä, eli luvun 2 jokin potenssi. Annetulle välille näitä osuu vain yksi, $2^{20} = 1\ 048\ 576$. Osoitetaan vielä, että tätä lukua ei voi ilmaista kahden tai useamman kokonaisluvun summana. Olkoon n peräkkäistä positiivista kokonaislukua, $a+1 \ldots a+n$, $n \ge 2$. Näiden summa on

$$(a + 1) + \cdots + (a + n) = an + n(n + 1)/2 = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (2a + n + 1).$$

Jos n on pariton, tulo sisältää parittoman tulontekijän n. Jos n on parillinen, tulo sisältää parittoman tulontekijän $2a + n + 1$. Siten summa ei voi olla arvoltaan sama kuin luvun 2 jokin potenssi, joka selvästikään ei sisällä parittomia lukuja tulontekijöinä. □

Tehtävä 5. *Taululle on kirjoitettu kymmenen kokonaislukua, joista jotkin voivat olla samoja. Kun lasketaan kaikki mahdolliset yhdeksän luvun summat, tuloksina saadaan seuraavat yhdeksän (!) lukua: 2000, 2001, 2002, 2003, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009. Mitkä luvut taululle on kirjoitettu?*

Ratkaisu. Olkoot taululle kirjoitetut luvut suuruusjärjestyksessä $n_1 \le n_2 \le \cdots \le n_{10}$, ja olkoon $S = n_1 + n_2 + \cdots + n_{10}$. Kun lasketaan yhteen kaikki luvut paitsi n_1, saadaan $S - n_1$, jne., joten kaikkien yhdeksän luvun summien summa on

$$(S - n_1) + (S - n_2) + \cdots + (S - n_{10}) = 10S - S = 9S.$$

Luetelluista yhdeksästä summasta täsmälleen yhden on esiinnyttävä kaksi kertaa; olkoon se x. Silloin

$$9S = 2000 + 2001 + 2002 + 2003 + 2005 + 2006 + 2007 + 2008 + 2009 + x.$$

Täten

$$0 \equiv 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 0 + 1 + 2 + x \pmod 9$$

eli

$$x \equiv 4 \pmod 9,$$

joten on oltava $x = 2002$. Siten

$$9S = 2000 + 2001 + 2 \cdot 2002 + 2003 + 2005 + 2006 + 2007 + 2008 + 2009 = 20043$$

eli $S = 2227$. Vähentämällä S:stä mainitut yhdeksän luvun summat saadaan alkuperäiset luvut: 218, 219, 220, 221, 222, 224, 225, 225, 226 ja 227. □

Tehtävä 6. *Olkoon L muotoa $4n+1$ olevien luonnollisten lukujen joukko:*

$$L = \{\,1, 5, 9, 13, 17, \dots\,\}.$$

Sanotaan L:n alkiota p L-alkuluvuksi, jos $p > 1$ eikä p:tä voida esittää pienempien L:n alkioiden tulona. Etsi L:n alkio, jonka voi esittää ainakin kahdella eri tavalla L-alkulukujen tulona (järjestyksen vaihtaminen ei tietenkään riitä).

Ratkaisu. Tunnetusti "tavalliset" alkuluvut ovat muotoa $4n \pm 1$. Valitaan neljä alkulukua muotoa $4n-1$, esimerkiksi 3, 7, 11 ja 19. Niistä minkä tahansa kahden tulo on muotoa $4n+1$, joten se kuuluu L:ään ja on jopa L-alkuluku, koska sen tekijöistä mikään ei ole L-alkuluku. Siis luvulla $4389 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$ on ainakin kolme esitystä L-alkulukujen tulona:

$$4389 = 21 \cdot 209 = 33 \cdot 133 = 57 \cdot 77.$$

□

Tehtävä 7. *Olkoot suunnikkaan kärjet A, B, C ja D. Siirretään lävistäjä AC suuntansa säilyttäen alkamaan pisteestä B ja täydennetään tämän sivun ja lävistäjän BD aloittama suunnnikas. Osoita, että sen ala on täsmälleen kaksi kertaa alkuperäisen suunnikkaan ala.*

Ratkaisu. Olkoot suunnikkaan sivut a ja b, lävistäjät c ja d. Tällöin lävistäjistä muodostetun suunnikkaan ala on

$$cd \sin\gamma \le cd \le \frac{c^2+d^2}{2} = a^2 + b^2.$$

(Tässä γ on sivujen välinen kulma). Olkoon suunnikas $ABCD$. Kun siirretään AC alkamaan pisteestä B, olkoon sen uusi päätepiste C'. Uusi suunnikas olkoon siis $C'BDA'$ ja sen lävistäjien leikkauspiste on C. Tällöin väite seuraa yhdenmuotoisista kolmioista, eli $ABD = BDC = C'A'C$ ja $BC'C = DCA' = ABC = ACD$. □

Tehtävä 8. *Kolmion sivujen pituudet ovat a, b ja c, ja sivuja vastaan piirretyt korkeusjanat ovat h_a, h_b ja h_c. Oletetaan, että $a \ge b$. Osoita, että $a + h_a \ge b + h_b$. Milloin pätee yhtäsuuruus?*

Ratkaisu. Jos kolmion ala on A, niin $ah_a = bh_b = 2A$. Näin ollen

$$(a+h_a) - (b+h_b) = a - b + \frac{2A}{a} - \frac{2A}{b} = (a-b)\left(1 - \frac{2A}{ab}\right).$$

Koska $2A = ab\sin\gamma \ge ab$ (γ on a- ja b-sivujen välinen kulma), tulon jälkimmäinenkin tekijä on ei-negatiivinen, ja väite pätee. Yhtäsuuruus vallitsee, jos joko $a = b$ tai $\sin\gamma = 1$ eli $\gamma = 90°$. Yhtäsuuruuteen riittää kolmion tasakylkisyys tai suorakulmaisuus. □

Tehtävä 9. *Kuution projektio sen avaruuslävistäjää vastaan kohtisuoralle tasolle on kuusikulmio. Onko se säännöllinen? Laske kuusikulmion pinta-ala, kun kuution särmän pituus on s.*

Ratkaisu 1. On säännöllinen. Sen voi osoittaa symmetriaan vedoten tai asettamalla kuutio koordinaatiostoon ja projisoimalla jokainen sen kärkipiste tasolle $x+y+z=0$, joka on kohtisuorassa avaruuslävistäjää $s(i+j+k)$ vastaan, tai jakamalla origosta kuution kärkipisteisiin menevät vektorit komponentteihin, joista toinen on vektorin $i+j+k$ suuntainen ja toinen sitä vastaan kohtisuora. Jos kuution särmän pituus on s, on kuusikulmion sivun pituus $s\sqrt{2/3}$. Kuuden tasasivuisen kolmion pinta-alojen summana kuusikulmion alaksi tulee $6(\sqrt{3}/4)(s\sqrt{2/3})^2 = \sqrt{3} \cdot s^2$. □

Ratkaisu 2. Säännöllisyys kuten edellä. Projektion pinta-alan laskemiseksi todetaan, että kun kuutiota katsotaan avaruuslävistäjän suunnassa, siitä näkyy kolme neliön muotoista tahkoa, joista kunkin ala on s^2. Tahkon ja avaruuslävistäjän välinen kulma lasketaan pistetulon avulla: avaruuslävistäjä on vektorin $(1,1,1)$ suuntainen ja tahkon lävistäjä esimerkiksi vektorin $(1,1,0)$ suuntainen, joten kulman kosini on $2/(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}) = \sqrt{2}/\sqrt{3}$. Kulman sini on siten $1/\sqrt{3}$, joten tahkon projektion pinta-ala on $s^2/\sqrt{3}$. Koska tahkoja näkyy kolme, koko kuvion pinta-ala on $\sqrt{3}\cdot s^2$. □

Tehtävä 10. *Naparetkeilijä X lähtee liikkeelle Helsingistä (60° pohjoista leveyttä) edeten koko ajan tasaisella nopeudella v kohti koillista. (Oletetaan Maapallon säteeksi R.) Kuinka kauan retkeilijältä kestää päästä pohjoisnavalle?*

Ratkaisu. Retkeilijän nopeus voidaan jakaa kahteen pituudeltaan yhtä suureen komponenttiin, joista toinen osoittaa suoraan pohjoiseen ja toinen itään. Näin retkeilijä etenee kohti pohjoista nopeudella $v_p = v/\sqrt{2}$ ja matkaan kuluva aika on

$$T = \frac{s}{v_p} = \frac{30°}{360°} \cdot \frac{2\sqrt{2}\pi R}{v} = \frac{\sqrt{2}\pi R}{6v}.$$

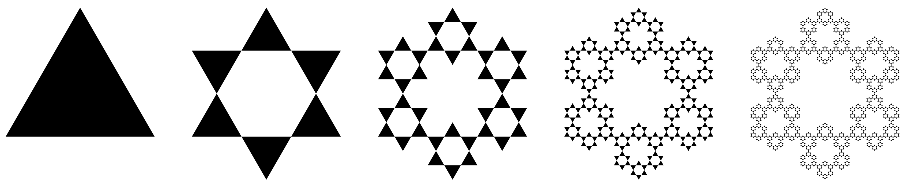
□

Tehtävä 11. *Todista, että jos kolmion korkeusjanojen leikkauspiste peilataan kolmion sivun (tai sen jatkeen) yli, kuvapiste on kolmion ympäri piirretyllä ympyrällä.*

Ratkaisu. Olkoon kolmio ABC ja korkeusjanojen leikkauspiste P. Olkoon pisteestä A lähtevän korkeusjanan kantapiste A', vastaavasti määritellään B' ja C'. Olkoon AA':n ja ABC:n ympäri piirretyn ympyrän leikkauspiste P'. Osoitetaan, että P' on A:n kuva peilauksessa BC:n yli.

Samaa kaarta vastaavina kehäkulmina $\angle CBP' = \angle CAP'$. $\angle A'CA$ on joko sama kulma kuin $\angle BCB'$ tai sen ristikulma, joten $\angle A'CA = \angle BCB'$. Täten suorakulmaiset kolmiot $A'CA$ ja BCB' ovat yhdenmuotoiset ja $\angle CAA' = \angle B'BC$. Koska $\angle CAP' = \angle CAA'$, niin $\angle CBP' = \angle B'BC$. Siis suorakulmaiset yhteisen sivun omaavat kolmiot $A'BP'$ ja $A'BP$ ovat yhtenevät, yhtenevien kolmioiden vastinosina $BP' = BP$ ja P' on P:n kuvapiste peilauksessa BC:n yli. □

Tehtävä 12. *Kuvassa on viisi ensimmäistä kuviota äärettömästä kuvioiden jonosta, jossa ensimmäisenä olevan kolmion sivun pituus on s. Kuvioiden pinta-alat ja piirit muodostavat kaksi lukujonoa. Määritä lukujonojen raja-arvot.*



Ratkaisu. Alkuperäisen kuvion piiri on $3s$. Jokaisessa vaiheessa kuvion piiri kaksinkertaistuu. Kuvioiden piirit muodostavat geometrisen lukujonon, joka hajaantuu, koska peräkkäisten termien osamäärän itseisarvo on suurempi kuin yksi.

Alkuperäinen kuvion pinta-ala on $(\sqrt{3}/2)s^2$. Jokaisessa vaiheessa kolmio korvataan kuudella kolmiolla, joista jokaisen sivun pituus on kolmasosa korvattavan kolmion sivun pituudesta. Uusi ala on siis $(6\sqrt{3}/2)(s/3)^2$ eli kaksi kolmasosaa korvattavan kolmion alasta. Saadaan geometrinen lukujono, joka suppenee kohti nollaa, koska peräkkäisten termien osamäärän itseisarvo on pienempi kuin yksi. □

Tehtävä 13. *Kumpi on suurempi, e^π vai π^e? Perustele!*

Ratkaisu. Koska logaritmin otto ja positiivisella luvulla jakaminen säilyttävät kahden positiivisen luvun suuruusjärjestyksen, on x^y:llä ja y^x:llä sama suuruusjärjestys kuin $y \ln x$:llä ja $x \ln y$:llä, ja edelleen sama, kuin $x^{-1} \ln x$:llä ja $y^{-1} \ln y$:llä.

Tutkitaan siis funktiota $F(x) = x^{-1} \ln x$ välillä $]0, \infty[$. Saadaan $F'(x) = -x^{-2} \ln x + x^{-1}x^{-1} = x^{-2}(1 - \ln x)$. Derivaatta on positiivinen, kun $\ln x < 1$ eli $x < e$, ja negatiivinen, kun $\ln x > 1$, eli $x > e$. Siis F on kasvava, kun $x < e$, ja vähenevä, kun $x > e$. Täten F saavuttaa suurimman arvonsa kohdassa e, joten erityisesti $e^{-1} \ln e > \pi^{-1} \ln \pi$, ja siis $e^\pi > \pi^e$. □

Tehtävä 14. *Osoita, että integraalin*

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{\lambda x}}{1 + e^{\lambda x}} \, \mathrm{d}x$$

arvo ei riipu parametrista λ.

Ratkaisu 1. Integraali voidaan hajottaa osiin

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} \frac{e^{\lambda x}}{1 + e^{\lambda x}} \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{e^{\lambda x}}{1 + e^{\lambda x}} \, \mathrm{d}x &= \int_{0}^{1} \frac{e^{-\lambda x}}{1 + e^{-\lambda x}} \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{e^{\lambda x}}{1 + e^{\lambda x}} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{1} \frac{1}{e^{\lambda x} + 1} \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{e^{\lambda x}}{1 + e^{\lambda x}} \, \mathrm{d}x = \int_{0}^{1} \frac{1 + e^{\lambda x}}{e^{\lambda x} + 1} \, \mathrm{d}x = 1. \end{aligned}$$

□

Ratkaisu 2. Olkoon $\lambda \neq 0$. Muuttujanvaihto $e^{\lambda x} = t \equiv x = \lambda^{-1} \ln(t) \implies \mathrm{d}x = \lambda^{-1} \, \mathrm{d}t/t$, ja uudet integroimisrajat ovat $e^{\pm\lambda}$. Siis kysytty integraali on

$$\begin{aligned} \int_{e^{-\lambda}}^{e^{\lambda}} \frac{v}{1 + v} \frac{\mathrm{d}t}{\lambda t} = \frac{1}{\lambda} \int_{e^{-\lambda}}^{e^{\lambda}} \frac{\mathrm{d}v}{1 + v} &= \frac{1}{\lambda} (\ln(1 + e^{\lambda}) - \ln(1 + e^{-\lambda})) \\ = \frac{1}{\lambda} (\ln(1 + e^{\lambda}) - \ln(e^{-\lambda}(e^{\lambda} + 1))) &= \frac{1}{\lambda} (\ln(1 + e^{\lambda}) - \ln(e^{-\lambda}) - \ln(e^{\lambda} + 1)) \\ &= \frac{1}{\lambda} (-\ln(e^{-\lambda})) = 1. \end{aligned}$$

Jos $\lambda = 0$ saadaan suoraan integroimalla sama tulos. □

Tehtävä 15. *Tarkastellaan suorassa kulmassa olevaa kulmausta, jossa kaksi käytävää kohtaavat. Toisen käytävän leveys on x ja toisen y. Käytävästä toiseen halutaan kuljettaa vaakatasossa hyvin ohut, suora keppi. Kuinka pitkä keppi voi korkeintaan olla, jotta tämä on mahdollista?*

Ratkaisu. Tiukimmillaan kepinkuljetus on tilanteessa, jossa keppi koskee käytävänmutkan sisäkulmaa, ja sen molemmat päät koskevat käytävien seiniä. Olkoon kepin ja x-levyisen käytävän sisäseinän välinen kulma $\theta \in]0, \pi/2[$. Tällöin (piirrä kuva!) kepin osuus x-käytävässä on $x/\cos\theta$ ja y-käytävässä $y/\sin\theta$, eli suurin mahdollinen tähän asentoon mahtuvan kepin pituus on $f(\theta) = x/\cos\theta + y/\sin\theta$. Tämä lähestyy ∞:tä, kun $\theta \to 0$ tai $\theta \to \pi/2$. Tiukimmillaan tilanne on $f(\theta)$:n (jossakin) minimissä välillä $]0, \pi/2[$. Derivoidaan:

$$f'(\theta) = -\frac{x}{\cos^2\theta}(-\sin\theta) - \frac{y}{\sin^2\theta}\cos\theta.$$

Nollakohta: $\tan^3\theta = y/x \implies \tan\theta = \sqrt[3]{y/x}$.

Jakamalla yhtälö $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ luvulla $\cos^2\theta$ saadaan $\tan^2\theta + 1 = \cos^{-2}\theta$, josta ratkaisemalla

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta}, \qquad \sin^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}.$$

Siis derivaatan nollakohdassa $\cos\theta = (1+(y/x)^{2/3})^{-1/2}$ ja $\sin\theta = \sqrt[3]{y/x}(1+(y/x)^{2/3})^{-1/2}$, joten

$$f(\theta) = x\sqrt{1+(y/x)^{2/3}} + y\sqrt[3]{x/y}\sqrt{1+(y/x)^{2/3}} = x\sqrt{1+(y/x)^{2/3}} + y\sqrt{1+(x/y)^{2/3}}.$$

Tämä on siis suurin mahdollinen kepin pituus.

Hauskana harjoitustehtävänä voit osoittaa, että edellisen kanssa yhtäpitävä on Nurmon lukion joukkueen ratkaisu $(x^{2/3} + y^{2/3})^{3/2}$. □

Tehtävä 16. *Osoita, että on olemassa sellainen positiivinen irrationaaliluku x, että x^x on rationaaliluku.*

Ratkaisu. Tarkastellaan kuvausta $g(x) = x^x = e^{x\log x}$. Helposti todetaan, että tämä on aidosti kasvava, ja kuvaa välin $[1, \infty[$ itselleen. Erityisesti on olemassa $x > 1$, jolla $g(x) = x^x = 2$. Osoitetaan, että x on irrationaaliluku.

Vastaoletus: $x = m/n$, missä m, n ovat positiivisia kokonaislukuja. Koska $x > 1$, niin $m > n > 0$. Voidaan olettaa, että m/n on supistetussa muodossa, niin että erityisesti korkeintaan toinen luvuista m ja n on parillinen. Siis $(m/n)^{m/n} = 2 \implies (m/n)^m = 2^n \implies m^m = 2^n n^m$. Tästä nähdään, koska $n > 0$, että m^m ja siis m on parillinen, joten $m = 2\ell$. Siis $2^m\ell^m = 2^n n^m \implies 2^{m-n}\ell^m = n^m$. Koska $m - n > 0$, nähdään nyt, että n^m ja siis n on parillinen. Tämä on ristiriita. □

Tehtävä 17. *Tutkitaan pintaa, joka syntyy, kun polynomin $P(x)$ kuvaaja välillä $0 \le x \le R$ $(R > 0)$ pyörähtää avaruudessa pystyakselin ympäri. Pyörähdyspinta on "malja", johon voidaan kaataa vettä, kun oletetaan, että $P(x)$ on parillista ja vähintään toista astetta, ja että sen korkeimman asteen termin kerroin on positiivinen. Oletetaan lisäksi, että sen kaikki nollakohdat ovat yksinkertaisia ja sijaitsevat avoimella välillä $]0, R[$. Merkitään*

$$\begin{aligned} a &= \max\{P(x) : x \text{ on } P\text{:n lokaali minimipiste}\}, \\ b &= \min\{P(x) : x \text{ on } P\text{:n lokaali maksimipiste}\}, \qquad \text{ja} \\ c &= \min\{b, P(0), P(R)\}. \end{aligned}$$

Osoita, että jos vedenpinnan korkeus kaikissa maljan kuopissa on sama h (laskettuna pystyakselin koordinaateissa, ei maljan pohjalta!), niin muodostuvan rantaviivan pituus on vakio kaikilla $h \in]a, c[$.

Ratkaisu. Rantaviiva koostuu ympyröistä, joiden säteet ovat yhtälön $P(x) = h$ ratkaisuita, eli polynomin $P(x) - h$ juuria. Kun h on annetulla välillä, ovat kaikki nämä juuret erillisiä ja sijaitsevat välillä $]0, R[$, ja rantaviivaa muodostuu x-säteinen ympyrä jokaista tällaista ratkaisua kohti. Siis rantaviivan kokonaispituus on

$$L(h) = \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i(h),$$

missä $x_1(h), \ldots, x_n(h)$, ovat kaikki polynomin $P(x) - h$ juuret.

Polynomin $Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ $(a_n \ne 0)$ juurten summa on $-a_{n-1}/a_n$, mikä seuraa kertomalla auki $Q(x)$:n tekijöihin jaettu muoto $Q(x) = a_n(x - x_1)\cdots(x - x_n)$ ja vertaamalla sitä ensin annettuun $Q(x)$:n lausekkeeseen. Koska P on vähintään toista astetta, nähdään siis, että polynomin $P(x) - h$ juurten summa on sama, kuin polynomin $P(x)$. Merkitsemällä P:n juurten summaa σ:lla, saatiin siis, että $L(h) = 2\pi\sigma$ riippumatta h:n arvosta annetulla välillä. □

Tehtävä 18. *Pythagoraan polun tehtävänvalintakomitea valitsi itselleen puheenjohtajaa kolmesta ehdokkaasta. Jokainen komitean 15 jäsenestä kirjoitti äänestyslippuun ehdokkaiden nimet paremmuusjärjestykseen. Havaittiin, että 11 lipussa oli asetettu ehdokas A ehdokkaan B edelle ja 9 lipussa ehdokas B ehdokkaan C edelle. Ehdokas A väitti, että enemmistön mielipide suosii siten järjestystä ABC. Ehdokas C protestoi, koska hänet oli asetettu 10 lipussa ehdokkaan A edelle. Kuinka monessa lipussa oli ensimmäisenä C?*

Ratkaisu. Merkitään erilaisten äänestyslippujen lukumääriä seuraavasti:

$$p : ABC \quad q : ACB \quad r : BAC \quad s : BCA \quad t : CAB \quad u : CBA.$$

Tehtävän tiedoista saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} p+q+t &= 11 \\ p+r+s &= 9 \\ s+t+u &= 10 \\ p+q+r+s+t+u &= 15. \end{aligned}$$

Vähentämällä neljännestä yhtälöstä puolittain kolmas saadaan $p+q+r=5$. Vähentämällä tämä kahden ensimmäisen yhtälön summasta saadaan $p+s+t=15$. Tämä tarkoittaa, että $q=r=u=0$. Vähentämällä kahden ensimmäisen yhtälön summasta kolmas saadaan $2p=10$. Helposti nähdään, että $p=5$, $t=6$ ja $s=4$. Siis C:n asetti ensimmäiseksi $t+u=6$ äänestäjää. □

Tehtävä 19. *Kahden arpakuution tahkoille on kirjoitettu ei-negatiivisia kokonaislukuja. Kun kuutioita heitetään ja tulokset lasketaan yhteen, summa voi olla yhtä todennäköisesti mikä tahansa luvuista $1, 2, \ldots, n$. Millä n:n arvoilla tämä on mahdollista? Mitkä luvut tahkoille pitää tällöin kirjoittaa?*

Ratkaisu. Kahden arpakuution heiton tulosten muodostama tapahtumakenttä koostuu 36 keskenään yhtä todennäköisestä alkeistapahtumasta. Näiden perusteella voidaan muodostaa tasajakauma joukkoon $\{1, 2, \ldots, n\}$ ainoastaan silloin, kun $n \mid 36$, eli n on yksi luvuista 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 ja 36. Tällöin kutakin summan arvoa vastaa aina $\frac{36}{n}$ alkeistapahtumaa ja kunkin summan todennäköisyydeksi tulee $\frac{1}{36} \cdot \frac{36}{n} = \frac{1}{n}$. Muutoin alkeistapahtumia ei voida jakaa tasan kaikille summille. Kaikki näistä n:n arvoista voidaan myös toteuttaa esimerkiksi seuraavin nopin:

n	Kuutioiden pistemäärät	n	Kuutioiden pistemäärät
1	$(0,0,0,0,0,0), (1,1,1,1,1,1)$	9	$(0,0,3,3,6,6), (1,1,2,2,3,3)$
2	$(0,0,0,0,0,0), (1,1,1,2,2,2)$	12	$(0,0,0,6,6,6), (1,2,3,4,5,6)$
3	$(0,0,0,0,0,0), (1,1,2,2,3,3)$	18	$(0,0,6,6,12,12), (1,2,3,4,5,6)$
4	$(0,0,0,2,2,2), (1,1,1,2,2,2)$	36	$(0,6,12,18,24,30), (1,2,3,4,5,6)$
6	$(0,0,0,0,0,0), (1,2,3,4,5,6)$		

□

Tehtävä 20. *Olkoon $m, n \in \mathbb{Z}^+$, $m+n>2$. Tarkastellaan $m \times n$-ruudukkoa. Alussa vain ruudukon ulkoreunat on väritetty. Kaksi pelaajaa valitsee vuorotellen jonkin kahden vierekkäisen tai päällekkäisen ruudun yhteisen sivun ja värittää sen. Väritettyjä sivuja ei saa valita. Jos pelaaja saa vuorollaan jonkin ruudun viimeisen vapaan sivun väritettyä, saa hän tämän ruudun. Peli loppuu, kun kaikki sivut on väritetty, ja voittaja on se, jolla on enemmän ruutuja. Milloin aloittajalla, milloin toisella on voittostrategia, kun*

(a) $m=1$,

(b) m ja n ovat parittomia?

[Tehtävän laatijat eivät tunne ratkaisua mielivaltaisten lukujen m ja n tapauksessa.]

Ratkaisu. *(a)* Osoitetaan induktiolla, että aloittaja voittaa, kun n on parillinen, toinen muulloin. Tapaukset $n=2$ ja $n=3$ ovat selviä.

Oletetaan, että väite on voimassa, kun $n<k$. Jos k on parillinen, niin aloittaja voi värittää äärimmäisen viivan. Nyt toinen on tilanteessa, josta hän induktio-oletuksen mukaan häviää.

Oletetaan sitten, että k on pariton (tämä osuus seuraa helpommin b-kohdasta). Jos aloittaja värittää äärimmäisen viivan, hän saa yhden ruudun, mutta toinen pääsee tilanteeseen, jonka hän induktio-oletuksen mukaan voittaa, ja ruutujen parillisuuden vuoksi vähintään kahdella, joten aloittaja häviää.

Jos aloittaja värittää jonkun etäämmällä päistä olevan viivan, hän jakaa ruudukon kahteen eri pariteettia olevaan osaan. Toinen pelaaja voittaa nyt näistä parillisen, ja koska siinä on pariton määrä viivoja, on aloittajan aloitettava pariton osa. Siten aloittaja häviää. Induktio on valmis.

(b) Toinen pelaaja voittaa aina peilaamalla aloittajan siirrot ruudukon keskipisteen suhteen. Aina, kun aloittaja saa ruudun, saa toinen sen peilikuvan seuraavalla siirrollaan. Lisäksi hän saa keskimmäisen ruudun. (Jos m ja n ovat parillisia, tämä strategia johtaa tasapeliin.) □