

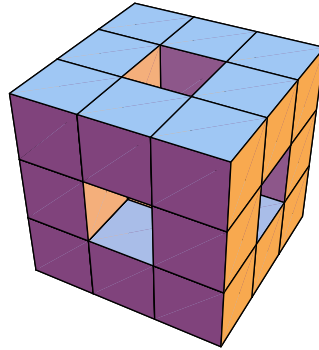
# Seitsemäsluokkalaisten Turun finaali 24.03.2012

**Tehtävä 1.** *Karkauspäiväksi kutsutaan helmikuun 29. päivää. Karkausvuonna on vuodessa 366 päivää, muulloin vain 365. Vuodet 1904 ja 1908 olivat karkausvuosia. Sen sijaan vuodet 1905, 1906 ja 1907 eivät olleet. Vuoden 1908 karkauspäivä oli lauantai. Mikä viikonpäivä oli vuoden 1904 karkauspäivänä?*

**Ratkaisu.** Päivästä 29.2.1908 on 366 yötä päivään 28.2.1907. Tästä puolestaan 365 yötä päivään 28.2.1906, samoin päivästä 28.2.1906 päivään 28.2.1905 ja päivästä 28.2.1905 päivään 29.2.1904. Yhteensä kysytyn kahden karkauspäivän välillä on siis 1461 yötä. Seitsemän yön jälkeen viikonpäivä on aina sama. Nyt  $1461 = 7 \cdot 208 + 5$ . Laskemme siis vuoden 1908 karkauspäivästä taaksepäin 208 täyttä viikkoa ja sen lisäksi viisi päivää. Lauantaista viisi päivää taaksepäin päädytään maanantaihin. Vuoden 1904 karkauspäivä oli siis maanantai.

**Tehtävä 2.** *Oheinen kappale halutaan maalata vihreäksi. Jokainen pikkuneliö vaatii litran maalia.*

A) *Kuinka paljon maalia vaatii koko kappale?*



B) *Kuinka monta pikkukuutiota koko kappale sisältää?*

**Ratkaisu.** A) Kappaleella on 8 sellaista pikkukuutiota, joilla on kolme näkyvää sivua. Lisäksi kappaleella on 12 sellaista pikkukuutiota, joilla on neljä näkyvää sivua. Yhteensä näkyviä sivuja on siis

$$8 \cdot 3 + 12 \cdot 4 = 24 + 48 = 72$$

kappaletta. Täsmälleen nämä on maalattava. Maalia kuluu siis 72 litraa.

B) Kappaleen alin kerros koostuu kahdeksasta pikkukuutiosta, keskikerros neljästä ja ylin kerros jälleen kahdeksasta. Yhteensä pikkukuutioita on siis 20 kappaletta.

**Tehtävä 3.** *Seuraava kuvio on nimeltään Pascalin kolmio:*

```
              1
             1  1
            1  2  1
           1  3  3  1
          1  4  6  4  1
         1  5  10 10 5  1
        1  6  15 20 15 6  1
       1  7  21 35 35 21 7  1
      1  8  28 56 70 56 28 8  1
     1  9  36 84 126 126 84 36 9  1
    1 10  45 120 210 252 210 120 45 10  1
    .....
    .....
```

Reunoilla olevia ykkösiä lukuun ottamatta siinä jokainen luku on kahden yläpuolellaan olevan luvun summa. Numeroimme rivit luvuilla  $0, 1, 2, \dots$ . Rivillä  $n$  numeroimme luvut järjestyksessä vasemmalta oikealle  $0., 1., 2., \dots$ , ja  $n$ . luvuksi. Merkitsemme  $n$ . rivin  $k$ . lukua  $\binom{n}{k}$ . Sievennä

$$\binom{7}{7} + \binom{8}{7} + \binom{9}{7} + \dots + \binom{2012}{7}.$$

**Ratkaisu.**

$$\begin{aligned} & \binom{7}{7} + \binom{8}{7} + \binom{9}{7} + \binom{10}{7} + \dots + \binom{2011}{7} + \binom{2012}{7} \\ = & \binom{8}{8} + \binom{8}{7} + \binom{9}{7} + \binom{10}{7} + \dots + \binom{2011}{7} + \binom{2012}{7} \\ = & \binom{9}{8} + \binom{9}{7} + \binom{10}{7} + \dots + \binom{2011}{7} + \binom{2012}{7} \\ = & \binom{10}{8} + \binom{10}{7} + \dots + \binom{2011}{7} + \binom{2012}{7} \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ = & \binom{2011}{8} + \binom{2011}{7} + \binom{2012}{7} \\ = & \binom{2012}{8} + \binom{2012}{7} = \binom{2013}{8}. \end{aligned}$$

**Tehtävä 4.** *Köyhäjoen Punttipoikien C-juniorien painijoukkueen 5 edustajaa kilpailevat painoluokissa 42 kg, 46 kg, 50 kg, 55 kg ja 60 kg (kukin omassa sarjassaan). Pojat ovat valmistautumassa ison turnauksen punnitukseen, ja haluavat koepunnituksella selvittää, ketkä heistä joutuvat vielä jatkamaan painonpudotusta (painoluokka = yläraja). Valitettavasti he löytävät kisakaupungista ainoastaan kolikoilla toimivan vaa’an, ja valmentajalla on mukanaan vain yksi lantti. Neuvokkaat pojat huomaavat kuitenkin, että vaaka toimii yhdellä lantilla niin kauan, kunnes sen päällä ei enää seiso kukaan, ja että vaa’an alusta on riittävän iso kahdelle. Niinpä pojat vaihtelevat paikkoja vaa’alla siten, että jokainen kahden painijan pari tulee punnituksi. Valmentaja saa nämä kahden painijan yhteispainot kirjattua ylös, mutta ei muista ketkä kaksi kulloinkin olivat vaa’alla: 94 kg, 96 kg, 100 kg, 103 kg, 104 kg, 107 kg, 108 kg, 109 kg, 110 kg ja 117 kg. Ketkä pojista joutuvat vielä hikoilemaan?*

**Ratkaisu.** Lasketaan ensin kaikki 10 punnitustulosta yhteen. Summaksi tulee

$$94 + 96 + 100 + 103 + 104 + 107 + 108 + 109 + 110 + 117 = 1048 \text{ kg.}$$

Tässä lukemassa on jokainen poika mukana 4 kertaa, koska jokainen punnittiin kertaalleen kunkin joukkueoverinsa kanssa. Näin ollen pojat painoivat yhteensä  $1048/4 = 262 \text{ kg}$ . Selvästi 94 kg on kahden kevyimmän ja 117 kg kahden painavimman kilpailijan paino. Keskimmäisen (painoltaan) kilpailijan paino on siis

$$262 - 94 - 117 = 51$$

kilogrammaa. Toisaalta 96 on kevyimmän ja keskimmäisen yhteenlaskettu paino, eli kevyin painaa 45 kg. Koska 110 on taas keskimmäisen ja painavimman yhteenlaskettu paino, niin painavin painaa 59 kg. Koska 94 on kevyimmän ja toiseksi kevyimmän paino, niin toiseksi kevyin painaa 49 kg. Koska 117 on painavimman ja toiseksi painavimman paino, niin toiseksi painavin painaa 58 kg.

Tarkistuksena laskemme nämä painot pareittain yhteen, ja saamme tehtävässä annetun luettelon:

$$\begin{aligned} 45 + 49 &= 94, & 45 + 51 &= 96, & 45 + 58 &= 103, & 45 + 59 &= 104, & 49 + 51 &= 100, \\ 49 + 58 &= 107, & 49 + 59 &= 108, & 51 + 58 &= 109, & 51 + 59 &= 110, & 58 + 59 &= 117. \end{aligned}$$

Punttipojista siis ainoastaan raskaimman sarjan edustaja voi jo lopettaa painonpudotuksen.