Turun seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailu 18.1.2012

Tehtävät ja ratkaisut

(1) Laske $20 \cdot 12 - 11 \cdot 21$.

a) -31 **b)** 0 **c)** 9 **d)** 31

Ratkaisu. Suoralla laskulla

$$20 \cdot 12 - 11 \cdot 21 = 240 - 231 = 9.$$

(2) Kahden peräkkäisen luonnollisen luvun tulo on 210. Mikä on luvuista pienempi?

a) 13 **b)** 14 **c)** 15 **d)** 16

Ratkaisu. Koska

$$210 = 21 \cdot 10 = 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 14 \cdot 15,$$

on kyseessä olevien peräkkäisten lukujen oltava 14 ja 15. Pienempi näistä on 14.

(3) Montako kierrosta tavallisen kellon sekuntiviisari pyörähtää tunnissa?

a) 1 **b)** 12 **c)** 60 **d)** 3600

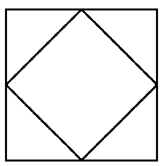
Ratkaisu. Sekuntiviisari tekee yhden kierroksen yhdessä minuutissa. Tunnissa on 60 minuuttia, eli sekuntiviisari tekee tunnissa 60 kierrosta.

(4) Neliön ala on 25. Mikä on sen piiri?

a) 5 **b)** 10 **c)** 15 **d)** 20

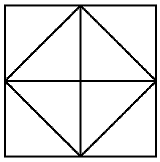
Ratkaisu. Koska neliön ala on $25 = 5^2$, on sen sivun pituus 5. Sen piiri on siis $5 + 5 + 5 + 5 = 20$.

(5) $1\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m}$-neliön vierekkäisten sivujen keskipisteet on yhdistetty, ja näin saatu keskelle alkuperäistä neliötä muodostettua pienempi neliö. Mikä tämän pienen neliön pinta-ala on?



a) $0{,}25\,\mathrm{m}^2$ **b)** $0{,}5\,\mathrm{m}^2$ **c)** $1\,\mathrm{m}^2$ **d)** $2\,\mathrm{m}^2$

Ratkaisu. Jaetaan kuvio samanlaisiksi pieniksi kolmioiksi seuraavasti:



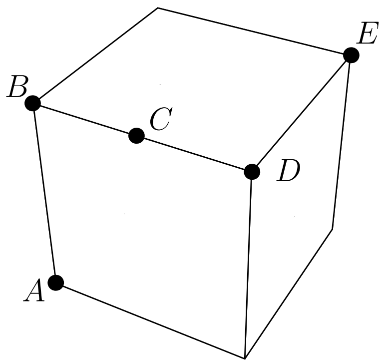
Nyt suuremman neliön ala on kahdeksan pientä kolmiota kun taas pienemmän neliön ala on neljä pientä kolmiota. Pienen neliön ala on siis puolet ison neliön alasta, eli $0{,}5\,\mathrm{m}^2$.

(6) Pikkuruisen metsämökin rakentamiseen tarvitaan sata viiden metrin hirttä. Hirsi on aluksi kahdenkymmenen metrin pätkissä. Kuinka monta kertaa on vähintään sahattava hirsi poikki, jotta mökki voidaan rakentaa?

a) 50 **b)** 75 **c)** 99 **d)** 100

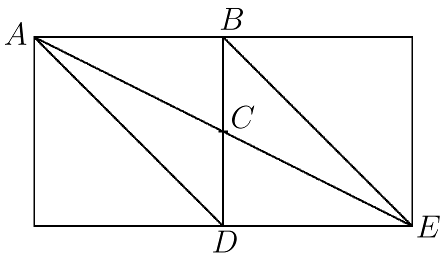
Ratkaisu. Yhdestä kahdenkymmenen metrin hirrestä saa kolmella sahauksella neljä viiden metrin hirttä. Siten $100 = 25 \cdot 4$ viiden metrin hirttä saa $25 \cdot 3 = 75$ sahauksella.

(7) Muurahainen voi kulkea pitkin kuution pintaa mitä reittiä tahansa. Se lähtee kärjestä A ja haluaa päästä kärkeen E. Kulkeeko lyhyin reitti pisteen B, C vai D kautta?



a) Pisteen B kautta. **b)** Pisteen C kautta. **c)** Pisteen D kautta.

Ratkaisu. Leikataan ne tahkot, joita pisteet A, B, C, D ja E reunustavat irti ja suoristetaan niiden välinen taitos. Tämä ei muuta reittien pituuksia.



Mutta nyt lyhin reitti pisteiden A ja E välillä on varmasti suora viiva, joka siis kulkee pisteen C kautta.

(8) Turku-hallissa järjestetään konsertti. Konsertin järjestäjät arvioivat, että jos lipun hinnaksi asetetaan x euroa, niin lipun ostaa $10000 + 400x - 10x^2$ fania. Järjestäjät pohtivat tulisiko lipun hinnan olla 30 vai 40 euroa. Kumpi valinta tuo paikalle enemmän ihmisiä? Kumpi hintavaihtoehto tuo järjestäjille enemmän lipputuloja?

a) 30 euroa tuo enemmän ihmisiä ja enemmän lipputuloja
b) 30 euroa tuo enemmän ihmisiä, ja 40 euroa enemmän lipputuloja
c) 40 euroa tuo enemmän ihmisiä, ja 30 euroa enemmän lipputuloja
d) 40 euroa tuo enemmän ihmisiä ja enemmän lipputuloja

Ratkaisu. Järjestäjien arvion mukaan siis 30 euron lippu toisi paikalle

$$10000 + 400 \cdot 30 - 10 \cdot 30^2 = 10000 + 12000 - 9000 = 13000$$

ihmistä, jotka maksaisivat lipuista tietenkin

$$13000 \cdot 30 = 390000 \,\text{euroa.}$$

Sen sijaan 40 euron lippu toisi paikalle

$$10000 + 400 \cdot 40 - 10 \cdot 40^2 = 10000 + 16000 - 16000 = 10000$$

ihmistä, jotka maksaisivat lipuista

$$10000 \cdot 40 = 400000 \,\text{euroa.}$$

Täten 30 euron lippu toisi paikalle enemmän ihmisiä ja 40 euron lippu toisi järjestäjille enemmän rahaa.

(9) Kuinka moneen nollaan luku $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 30$ päättyy?

a) 4 **b)** 5 **c)** 6 **d)** 7

Ratkaisu. Oleellinen seikka on se, kuinka monta kertaa luku 10 jakaa kyseisen tulon, eli kuinka monta kertaa sekä luku kaksi että luku viisi jakavat sen.

Luku kaksi esiintyy tekijöissä 2, 4, ..., 30, eli luku kaksi jakaa tulon ainakin 15 kertaa.

Luku viisi esiintyy vain tekijöissä 5, 10, 15, 20, 25 ja 30, ja näissä jokaisessa vain kerran lukuun ottamatta lukua 25 jossa se esiintyy kahdesti. Luku viisi jakaa siis tarkasteltavan tulon täsmälleen $1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 = 7$ kertaa.

Toisin sanoen, luku 10 jakaa tulon täsmälleen 7 kertaa, eli tulon täytyy päättyä täsmälleen seitsemään nollaan.

(10) Olkoon $X = 1 + 2 + 3 + \ldots + 63 + 64 + 65 + 64 + 63 + \ldots + 3 + 2 + 1$. Kuinka suuri on X?

a) 2015 **b)** 2080 **c)** 4180 **d)** 4225

Ratkaisu. Luku X on siis lukujen

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 63 & 64 & 65 \\ 64 & 63 & 62 & 61 & \cdots & 2 & 1 & \end{array}$$

summa. Mutta tässä taulukossa jokaisen sarakkeen lukujen summa on 65, ja sarakkeita on 65. Siten $X = 65 \cdot 65 = 4225$.

(11) Kuusikerroksisessa talossa asuvat pojat halusivat selvittää, kuinka monennesta kerroksesta voidaan pullo pudottaa talon nurmikolle pullon särkymättä. Pojilla oli käytössään kaksi samanlaista pulloa. He päättelivät, että jos pullo hajoaa jostakin kerroksesta pudotettuna, se hajoaa myös korkeammalta pudotettuna. Pojat halusivat selvittää asian mahdollisimman vähillä pudotuskokeilla, koska koko ajan kasvoi riski siitä, että kärttyisä talonmies keskeyttäisi leikin. Tuleeko tällöin ensimmäinen pudotuskoe tehdä

a) ensimmäisestä, **b)** kolmannesta, **c)** neljännestä, vai **d)** kuudennesta kerroksesta?

Ratkaisu. Erilaisia vastausvaihtoehtoja poikien kysymykseen on seitsemän. (Onhan mahdollista, ettei pulloa voi pudottaa edes ensimmäisestä kerroksesta särkymättä.) Kahdella pudotuskokeella ei voi mitenkään selvittää asiaa, koska kahden pudotuskokeen tuloksena voi olla vain neljä eri mahdollisuutta. Poikien täytyy siis olla valmiita tekemään kolme pudotuskoetta.

Oletetaan, että asian voi selvittää kolmella pudotuskokeella. On selvää, ettei ensimmäistä pudotuskoetta kannata tehdä ensimmäisestä kerroksesta, koska jos pullo säilyy ehjänä niin pitäisi kahdella pudotuskokeella löytää oikea kerros kuuden peräkkäisen vaihtoehdon joukosta. Samoin ensimmäistä pudotusta ei kannata tehdä kuudennesta kerroksesta, koska jos pullo rikkoutuisi olisi tällöin kahdella lisäpudotuksella löydettävä oikea kerros kuuden peräkkäisen vaihtoehdon joukosta.

Neljännestä kerroksesta pudottaminen ei myöskään käy. Oletetaan, että teemme ensimmäisen pudotuskokeen neljännestä kerroksesta ja pullo rikkoutuu. Tällöin meidän täytyy tehdä kahdella pudotuskokeella ero neljän peräkkäisen vaihtoehdon välillä. Mutta nyt kahdella käytettävissämme olevalla lisäpudotuksella on vain kolme mahdollista lopputulosta, sillä jos ensimmäisessä pullo hajoaa, emme voi enään tehdä toista lisäpudotusta, olihan meillä käytettävissämme vain kaksi pulloa, jotka nyt olisivat molemmat rikki.

Samassa hengessä voi perustella, ettei ensimmäistä pudotusta kannata tehdä myöskään toisesta tai viidennestä kerroksesta.

Lopuksi, on helppo todeta, että tekemällä ensimmäisen pudotuksen kolmannesta kerroksesta, oikean kerroksen löytää vain kolmella pudotuksella. Toinen pudotuskoe kannattaa tehdä ensimmäisestä tai viidennestä kerroksesta sen mukaan mitä ensimmäisessä pudotuskokeessa käy.

(12) Olkoon $X = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729}$. Mitä voidaan sanoa luvusta X?

a) $0 < X \leqslant \frac{1}{4}$ **b)** $\frac{1}{4} < X \leqslant \frac{1}{2}$ **c)** $\frac{1}{2} < X \leqslant \frac{3}{4}$ **d)** $\frac{3}{4} < X \leqslant 1$

Ratkaisu. Varmasti $X > \frac{1}{4}$, onhan $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$. Toisaalta, koska kaikki nimittäjät ovat luvun kolme potensseja,

$$X = \frac{243 + 81 + 27 + 9 + 1}{729} = \frac{361}{729},$$

ja $2 \cdot 361 = 722 < 729$, eli $X < \frac{1}{2}$.

Olemme päätelleet, että $\frac{1}{4} < X \leqslant \frac{1}{2}$.

(13) Erään tasakylkisen kolmion huippukulman ja yhden kantakulman yhteenlaskettu suuruus on $112°$. Kuinka suuri on kolmion huippukulma?

a) $24°$ **b)** $34°$ **c)** $44°$ **d)** $54°$

Ratkaisu. Kun huippukulman ja yhden kantakulman summaan $112°$ lisää toisenkin kantakulman, saadaan kolmion kulmien summa, eli $180°$. Täten kolmion kantakulman on oltava $180° - 112° = 68°$. Nyt kantakulmien summa on $68° + 68° = 136°$ ja huippukulman on oltava $180° - 136° = 44°$.

(14) Onko olemassa kokonaislukuja x ja y siten, että $x^2 + 6 = y^2$?

a) Kyllä on. **b)** Ei ole.

Ratkaisu. Neliölukujen jono alkaa seuraavasti:

$$0, \quad 1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \quad 36, \quad 49, \quad 64, \quad \ldots$$

Näiden peräkkäisten erotusten jono on

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 9, \quad 11, \quad 13, \quad 15, \quad \ldots,$$

mikä antaa aiheen epäillä, että neliöluvusta $3^2 = 9$ eteen päin peräkkäiset neliöluvut ovat etäämmällä kuin kuusi yksikköä toisistaan. Tämä pitääkin paikkaansa. Nimittäin, jos $n \geqslant 3$ on luonnollinen luku, niin

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 \geqslant 2 \cdot 3 + 1 = 7 > 6.$$

Yllä olevat havainnot merkitsevät siis sitä, että jos olisi $x^2 + 6 = y^2$, niin olisi välttämättä $x^2 \leqslant 2^2 = 4$. Mutta koska luvut

$$0^2 + 6 = 6, \quad 1^2 + 6 = 7, \quad \text{ja} \quad 2^2 + 6 = 10$$

eivät ole neliölukuja, päädymme siihen johtopäätökseen, ettei halutunlaisia kokonaislukuja x ja y voi mitenkään olla olemassa.