

## LOPPUKILPAILU 21.3.2013

### RATKAISUITA

**1.** Kokonaisluvuista  $a$  ja  $b$  tiedetään, että jokainen luvuista  $\frac{a}{7}$ ,  $\frac{b}{7}$  ja  $\frac{a+b}{25}$  on suurempi kuin yksi ja pienempi kuin kaksi. Mitkä luvut  $a$  ja  $b$  ovat?

**Ratkaisu.** Koska  $1 < \frac{a}{7} < 2$ , on oltava  $7 < a < 14$ . Vastaavasti  $7 < b < 14$ . Koska  $a$  ja  $b$  ovat kokonaislukuja, on itse asiassa oltava  $8 \leq a \leq 13$  ja  $8 \leq b \leq 13$ .

Koska  $1 < \frac{a+b}{25} < 2$ , on oltava  $25 < a+b < 50$ . Mutta nyt

$$25 < a+b \leq 13+13=26.$$

Koska  $a+b$  on kokonaisluku, on oltava  $a+b=26$ .

Jos olisi  $a < 13$ , niin olisi  $a+b < 13+13=26$ , mikä on mahdotonta. Siis on oltava  $a=13$ . Vastaavasti on oltava  $b=13$ .

Lopuksi, tehtävänannon ehdot toteutuvat luvuille  $a=b=13$  sillä

$$1 = \frac{7}{7} < \frac{13}{7} < \frac{14}{7} = 2 \quad \text{ja} \quad 1 = \frac{25}{25} < \frac{26}{25} < \frac{50}{25} = 2.$$

**2.** Etsi kaikki luvut  $x$ , joille pätee

$$(x-2012)(x-2013) = (x-2013)(x-2014).$$

**Ratkaisu.** Havaitaan ensin, että arvo 2013 on ratkaisu, sillä tällä arvolla yhtälön molemmat puolet ovat yhtä suuria kuin nolla.

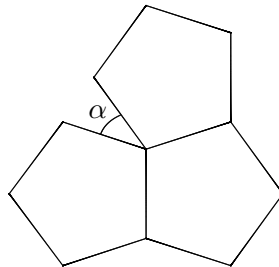
Oletetaan sitten, että  $x$  on ratkaisu jolle  $x \neq 2013$ . Tällöin molempien puolien yhteinen tekijä  $x-2013$  ei ole nolla, ja se voidaan jakaa puolittain pois, jolloin jäljelle jää yhtälö

$$x-2012 = x-2014.$$

Tämä sievenee muotoon  $2012 = 2014$ , mikä on mahdotonta.

Täten muita ratkaisuita kuin 2013 ei ole.

**3.** Seuraavassa kuvassa on kolme säännöllistä viisikulmiota:



Kuinka suuri on kuvaan merkitty kulma  $\alpha$ ?

**Ratkaisu.** Esimerkiksi jakamalla viisikulmio kolmeksi kolmioksi ja muistamalla, että kolmion kulmien summa on  $180^\circ$ , voi todeta, että viisikulmion kulmien summa on  $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$ . Yksi säännöllisen viisikulmion kulma on tietenkin viidesosa tästä, eli  $108^\circ$ .

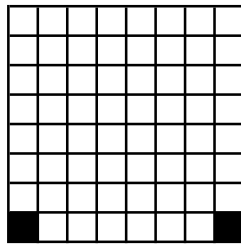
Kuvaan merkitty kulma on täyskulma, josta on vähennetty kolme säännöllisen viisikulmion kulmaa, eli

$$360^\circ - 3 \cdot 108^\circ = 360^\circ - 324^\circ = 36^\circ.$$

4.  $8 \times 8$ -ruudukon jokainen ruutu voi olla valkoinen tai punainen. Ruudukon värit muuttuvat joka minuutti seuraavasti:

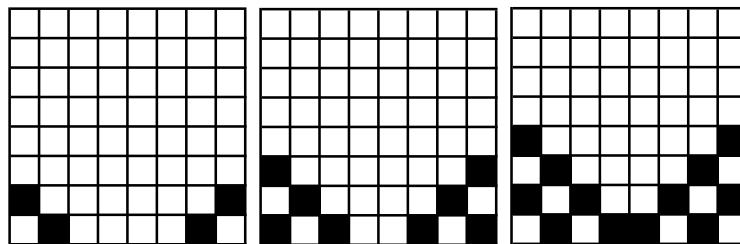
- Jos ruudulla on yhteinen sivu punaisen ruudun kanssa, se on seuraavaksi punainen.
- Jos ruudulla ei ole yhteistä sivua punaisen ruudun kanssa, se on seuraavaksi valkoinen.

Aluksi seuraavat ruudut ovat punaisia:



Muuttuuko ruudukko lopulta kokonaan punaiseksi?

**Ratkaisu.** Ensimmäisen, toisen ja kolmen minuutin kohdalla ruudukon kuvioinnit ovat:



Kolmen minuutin jälkeen taulukossa on siis kaksi vierekkäistä punaista ruutua, jotka eivät voi koskaan enään muuttua valkoisiksi. Ei ole vaikea nähdä, että enintään kymmenessä askeleessa näiden kahden ruudun muodostama alue kasvaa täyttämään koko ruudukon.