Helsingin seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailu 7.2.2013 Ratkaisuita

1. Eräs kirjakauppa myy pokkareita yhdeksällä eurolla kappale, ja siellä on meneillään mainoskampanja, jossa seitsemän sellaista ostettuaan saa kahdeksannen ilmaiseksi. Kirjojen ystävä löytää liikkeestä 56 mielenkiintoista pokkaria. Kuinka paljon ne maksavat hänelle?

a) 392 € **b)** 432 € **c)** 441 € **d)** 495 € **e)** 504 €

Ratkaisu. Jokaisesta kahdeksasta teoksesta hän maksaa seitsemän, eli $7 \cdot 9$ €=63 €, ja saa kahdeksannen kaupan päälle. Koska hän haluaa $56 = 7 \cdot 8$ kirjaa, maksavat ne hänelle $7 \cdot 63$ € = 441 €.

2. Huoneen lattian koko on 3×5 metriä, ja korkeus 3 metriä. Lattian laatoittamiseen tarvitaan 60 laattaa. Kuinka monta laattaa tarvitaan koko huoneen (seinät, katto ja lattia) laatoittamiseen?

a) 240 **b)** 312 **c)** 360 **d)** 372 **e)** 390

Ratkaisu. Koska lattian pinta-ala on $3 \cdot 5 = 15$ neliömetriä, ja sen laatoittaminen vaatii 60 laattaa, vaatii yhden neliömetrin laatoittaminen $\frac{60}{15} = 4$ laattaa. Huoneen kummankin pitkän seinän ala on $15\,\mathrm{m}^2$, katon ala on sama kuin lattian, eli $15\,\mathrm{m}^2$, ja kummankin lyhyen seinän ala on $3 \cdot 3 = 9$ neliömetriä. Täten huoneen sisäpintojen (lattia, pitkät seinät, katto, lyhyet seinät) ala on

$$15 + 2 \cdot 15 + 15 + 2 \cdot 9 = 78\,\text{neliömetriä}.$$

Tarvitaan siis $4 \cdot 78 = 312$ laattaa.

3. Eräässä maassa yksi asukas kuluttaa keskimäärin 12 kg kahvia vuodessa. Kuinka monta tonnia kahvia maassa kuluu vuosittain jos sen asukasluku on 5,3 miljoonaa asukasta?

a) vähemmän kuin 10 tonnia
b) enemmän kuin 10 ja vähemmän kuin 100 tonnia
c) enemmän kuin 100 ja vähemmän kuin 1000 tonnia
d) enemmän kuin 1000 ja vähemmän kuin 10000 tonnia
e) enemmän kuin 10000 tonnia

Ratkaisu. Tuhat asukasta juo siis keskimäärin 12 tonnia kahvia vuodessa. Koko maan kulutus on tonneissa 5300 kertaa tämä, eli $12 \cdot 5300 = 63600$ tonnia, mikä on selvästi enemmän kuin 10000 tonnia.

4. Mitä on

$$\underbrace{2012 + 2012 + 2012 + \ldots + 2012}_{\text{luku 2012 kaikkiaan 2013 kertaa}} - \underbrace{2013 - 2013 - 2013 - \ldots - 2013}_{\text{luku 2013 kaikkiaan 2012 kertaa}}\ ?$$

a) -4025 **b)** -2013 **c)** 0 **d)** 1 **e)** 2012

Ratkaisu. Kyseinen luku on $2013 \cdot 2012 - 2012 \cdot 2013 = 0$.

5. Pienellä lapsella on neljä eriväristä kuutiorakennuspalikkaa, ja hän on vakaasti päättänyt rakentaa niistä neljän kuution korkuisen tornin. Kuinka monessa eri järjestyksessä värit voivat esiintyä tornissa?

a) 10 **b)** 12 **c)** 16 **d)** 18 **e)** 24

Ratkaisu. Pohjimmaisen värin voi valita neljällä eri tavalla, seuraavan kolmella eri tavalla, kolmannen vain kahdella eri tavalla, ja lopulta jäljellä on vain yksi palikka. Tapoja on siis kaikkiaan $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Jos värit ovat a, b, c ja d, niin eri väritornit on helppo jopa luetella:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
d	c	d	b	c	b	d	c	d	a	c	a	d	b	d	a	b	a	c	b	c	a	b	a
c	d	b	d	b	c	c	d	a	d	a	c	b	d	a	d	a	b	b	c	a	c	a	b
b	b	c	c	d	d	a	a	c	c	d	d	a	a	b	b	d	d	a	a	b	b	c	c
a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	c	c	c	c	c	c	d	d	d	d	d	d

6. Kokonaisluvuista x ja y tiedetään, että ne ovat molemmat parittomia ja niiden erotus on seitsemän. Kuinka paljon tällaisia lukupareja on olemassa?

a) ei yhtään **b)** yksi **c)** viisi **d)** yli sata, mutta alle tuhat **e)** äärettömän paljon

Ratkaisu. Kahden parittoman luvun erotus on välttämättä parillinen, mutta luku seitsemän on pariton. Siis kyseisenlaisia kokonaislukupareja ei ole olemassa.

7. Maija matkustaa junalla, joka viilettää 180 km/h, kun vastaan tulee vesitorni ja hän näkee sen junasta 45° asteen kulmassa radasta. Selvittääkseen kuinka kaukana vesitorni on junaradasta, hän päättää ottaa aikaa kellostaan, ja toteaa, että kymmenen sekunnin kuluttua vesitorni näkyy takana päin 45° asteen kulmassa. Kuinka kaukana vesitorni suurin piirtein on junaradasta?

a) 250 m **b)** 350 m **c)** 500 m **d)** 700 m
e) annetut tiedot eivät riitä asian selvittämiseen

Ratkaisu. Noiden kymmenen sekunnin aikana juna kulkee

$$10\,\mathrm{s} \cdot 180 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 10\,\mathrm{s} \cdot \frac{180\,\mathrm{km}}{3600\,\mathrm{s}} = \frac{180}{360}\,\mathrm{km} = \frac{1}{2}\,\mathrm{km} = 500\,\mathrm{m}.$$

Junan sijainti alussa, sen sijainti lopussa ja vesitorni muodostavat tasakylkisen kolmion, jonka huippu on vesitornin kohdalla. Kolmion kantana on se matka, jonka juna kulki kymmenen sekunnin aikana. Kysytty etäisyys on sama kuin kolmion korkeus, joka on puolet kannan pituudesta, eli puolet siitä etäisyydestä, jonka juna kulki, eli $\frac{1}{2} \cdot 500\,\mathrm{m} = 250\,\mathrm{m}$.

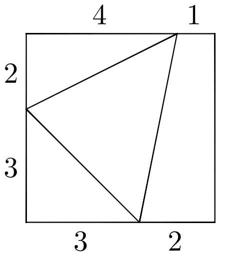
8. Viidestä luvusta ensimmäinen on 1 ja viimeinen 9. Lisäksi listan minkä tahansa kolmen peräkkäisen kolmen luvun tulo on 3. Mikä on keskimmäinen luku?

a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **c)** 1 **d)** $\sqrt{3}$ **e)** 3

Ratkaisu. Olkoot luvut a, b, c, d ja e. Koska peräkkäiset tulot ovat muuta kuin nollia, mikään luvuista ei voi olla nolla. Koska $bcd = cde$, on oltava $b = e = 9$. Koska

$$3 = abc = 1 \cdot 9 \cdot c, \quad \text{on oltava} \quad c = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

9. Neliön sisälle on piirretty kolmio, jonka kärjet ovat neliön sivuilla seuraavan kuvan mukaisesti:



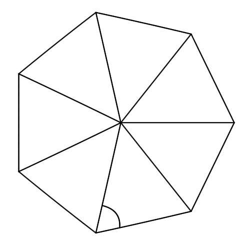
Mikä on kolmion ala?

a) 14 **b)** 15 **c)** 16 **d)** vähemmän kuin 14 **e)** enemmän kuin 16

Ratkaisu. Neliön ala on $5 \cdot 5 = 25$. Vasemmassa ylänurkassa olevan kolmion ala on $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$. Vasemmassa alanurkassa olevan kolmion ala on $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2}$. Keskellä olevan kolmion oikealla puolella olevan alueen voi jakaa 1×5-suorakaiteeksi, jonka ala on 5, ja kolmioksi, jonka kanta on 1 ja korkeus 5, ja ala siis $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 = \frac{5}{2}$. Keskellä olevan kolmion ala on se, mitä neliön alasta jää jäljelle kun muiden osien alat siitä vähennetään, eli

$$25 - 4 - \frac{9}{2} - 5 - \frac{5}{2} = 16 - \frac{14}{2} = 16 - 7 = 9.$$

10. Seuraavassa kuvassa on säännöllinen seitsemänkulmio, ja sen kärjet on yhdistetty suorilla viivoilla sen keskipisteeseen. Mikä on kuvaan merkityn kulman suuruus?



a) $50°$ **b)** $51\frac{3}{7}°$ **c)** $60°$ **d)** $64\frac{2}{7}°$ **e)** $72\frac{4}{7}°$

Ratkaisu. Kuvassa on seitsemän täysin samanlaista tasakylkistä kolmiota. Niiden huippukulmien summa on $360°$, eli jokainen huippukulma on $\frac{360}{7}°$. Koska kolmion kulmien summa on aina $180°$, on kuvan kussakin kolmiossa kantakulmien summa $180° - \frac{360}{7}°$, jolloin yksi kantakulma on puolet tästä, eli

$$\frac{180° - \frac{360}{7}°}{2} = 90° - \frac{180}{7}° = \frac{630° - 180°}{7} = \frac{450}{7}° = 60° + \frac{30}{7}° = 64\frac{2}{7}°.$$

11. Jos A on sellainen luku, että $A^2 + A + 1 = 0$, niin mitä on $\frac{1}{A^2}$?

a) 1 **b)** A **c)** A^2 **d)** 0 **e)** -1

Ratkaisu. Aloitetaan toteamalla, että

$$0 = (A-1)(A^2 + A + 1) = A^3 + A^2 + A - A^2 - A - 1 = A^3 - 1,$$

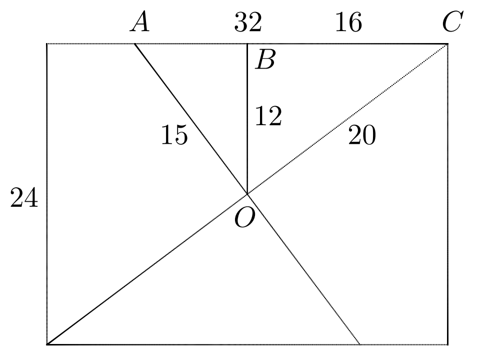
eli $A^3 = 1$, mistä seuraakin, että

$$\frac{1}{A^2} = 1 \cdot \frac{1}{A^2} = A^3 \cdot \frac{1}{A^2} = A.$$

12. Paperiarkin mitat ovat 24×32. Se taitellaan niin, että yksi nurkka kohtaa vastakkaisen nurkan. Mikä on taitosviivan pituus?

a) 26 **b)** 28 **c)** 30 **d)** 32 **e)** 34

Ratkaisu. Taitosviiva on kohtisuorassa päällekkäin asetettujen kärkien välistä lävistäjää ja kulkee paperiarkin keskipisteen kautta. Olkoot A, B, C ja O kuten seuraavassa kuvassa:



Pythagoraan lauseen nojalla paperiarkin lävistäjä on pituudeltaan $\sqrt{24^2 + 32^2} = 40$, eli $OC = 20$. Lisäksi $OB = 12$ ja $BC = 16$. Kolmiot $\triangle ABO$ ja $\triangle OBC$ ovat yhdenmuotoiset, ja siksipä esimerkiksi

$$\frac{AO}{BO} = \frac{OC}{BC}, \quad \text{eli} \quad AO = 12 \cdot \frac{20}{16} = 12 \cdot \frac{5}{4} = 3 \cdot 5 = 15.$$

Taitosviivan pituus on siis $2 \cdot AO = 2 \cdot 15 = 30$.

13. Neliölukuja ovat

$$0^2, \quad 1^2, \quad 2^2, \quad 3^2, \quad 4^2, \quad \ldots, \qquad \text{eli} \qquad 0, \quad 1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad \ldots.$$

Mitkä ovat mahdolliset jakojäännökset, kun neliöluku jaetaan viidellä?

a) 0 ja 1 **b)** 0, 1 ja 2 **c)** 0, 1 ja 4 **d)** 0, 1, 3 ja 4 **e)** 0, 1, 2, 3 ja 4

Ratkaisu. Jos luvusta vähentää viimeisen numeron, jäljelle jää kymmenellä, ja siis myös viidellä, jaollinen luku. Siis luvun jakojäännös viidellä jaettaessa on sama kuin sen viimeisen numeron jakojäännös viidellä jaettaessa. Tehtävä siis palautuu siihen, mitkä ovat neliöluvun mahdolliset viimeiset numerot.

Lukujen tulon viimeinen numero riippuu tietenkin vain alkuperäisten lukujen viimeisistä numeroista, eli riittää tarkastella vain ensimmäistä kymmentä neliölukua, jotka ovat

$$0, \quad 1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \quad 36, \quad 49, \quad 64, \quad \text{ja} \quad 81.$$

Mahdolliset viimeiset numerot ovat siis 0, 1, 4, 5, 6 ja 9, ja mahdolliset jakojäännökset ovat täten 0, 1 ja 4.

14. Kuinka monella eri tavalla on mahdollista valita positiiviset kokonaisluvut x ja y, joille $x^4 + y = 10001$?

a) yhdellä tavalla **d)** äärettömän monella eri tavalla
b) 10 tavalla **e)** ei yhdelläkään tavalla
c) 100 tavalla

Ratkaisu. Jokaisessa halutunlaisessa positiivisten kokonaislukujen parissa on oltava $y = 10001 - x^4$, eli luvun x arvo määrää luvun y yksikäsitteisellä tavalla. Toisaalta, jos x on positiivinen kokonaisluku, jolle $10001 - x^4$ on positiivinen, niin silloin nämä kaksi lukua muodostavat halutunlaisen parin. Halutunlaisia pareja on siis yhtä monta kuin positiivisia kokonaislukuja x, joille $10001 - x^4$ on positiivinen, eli joille $x^4 < 10001$, eli joille $x^4 \leqslant 10000$. Mutta $10000 = 10^4$. Täten mahdolliset luvun x^4 arvot ovat 1^4, 2^4, 3^4, ..., 10^4, eli mahdolliset luvun x arvot ovat 1, 2, 3, ..., 10, joita on siis täsmälleen kymmenen kappaletta.