Oulun seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailu 4.2.2014 Ratkaisuita

1. Laske $\frac{2}{7} - \frac{1}{8}$.

a) $\frac{1}{8}$ **b)** $\frac{5}{28}$ **c)** $\frac{1}{6}$ **d)** $\frac{3}{16}$ **e)** $\frac{9}{56}$

Ratkaisu.
$$\frac{2}{7} - \frac{1}{8} = \frac{2 \cdot 8}{7 \cdot 8} - \frac{7}{7 \cdot 8} = \frac{16-7}{7 \cdot 8} = \frac{9}{56}.$$

2. Määritä lukujen 2^7, 3^5 ja 5^3 keskinäinen suuruusjärjestys.

a) $2^7 < 3^5 < 5^3$ **c)** $5^3 < 2^7 < 3^5$ **e)** $2^7 < 5^3 < 3^5$
b) $3^5 < 2^7 < 5^3$ **d)** $5^3 < 3^5 < 2^7$

Ratkaisu. Koska $2^7 = 128$, $3^5 = 243$, ja $5^3 = 125$, on suuruusjärjestys $5^3 < 2^7 < 3^5$.

3. Mikä on 2014. luku jonossa $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots$?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3

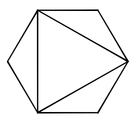
Ratkaisu. Lukujonon 3., 6., 9., ja niin edelleen luvut ovat kolmosia. Luku 2013 on kolmella jaollinen, koska $2013 = 3 \cdot 671$. Siis lukujonon 2013. luku on 3, ja jonon 2014. luvun täytyy olla 1.

4. Laske $1+6+11+16+\ldots+41+46$, missä yhteenlaskettavina ovat ne positiiviset kokonaisluvut, jotka ovat pienempiä kuin 50 ja joiden jakojäännös viidellä jaettaessa on 1.

a) 100 **b)** 225 **c)** 235 **d)** 275 **e)** 285

Ratkaisu. Kyseinen summa on
$$(1+46)+(6+41)+(11+36)+(16+31)+(21+26) = 5 \cdot 47 = 235.$$

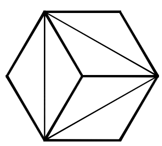
5. Seuraavassa kuvassa on säännöllinen kuusikulmio, jonka sisälle on piirretty tasasivuinen kolmio.



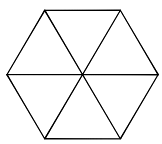
Kuinka monta prosenttia kolmion ala on kuusikulmion alasta?

a) 50% **b)** 55% **c)** 60% **d)** 65% **e)** 70%

Ratkaisu. Piirretään kolmion kärjistä kuusikulmion keskipisteeseen janat:



Nyt kuusikulmio jakautuu kolmeksi yhteneväksi alueeksi, joista kustakin kolmio peittää tasan puolet. Alojen yhtenevyyden näkee esimerkiksi pilkkomalla kuusikulmion kuudeksi tasasivuiseksi kolmioksi, jolloin jokainen kolmesta alueesta osoittautuukin kahden samanlaisen tasasivuisen kolmion yhdisteeksi:



Siis kolmion ala on 50% kuusikulmion alasta.

6. Sanotaan, että positiivinen kokonaisluku on ”allekkain laskijan unelma”, jos sillä on sellainen ominaisuus, että kun kyseinen luku saadaan tulokseksi laskettaessa yhteen kaksi sitä pienempää lukua, niin laskijan ei koskaan tarvitse käyttää muistinumeroita. Esimerkiksi 13 ei ole allekkain laskijan unelma, koska laskettaessa $9 + 4 = 13$ tulee kymmenien sarakkeeseen muistinumero. Mikä seuraavista luvuista on allekkain laskijan unelma?

a) 27 **b)** 38 **c)** 49 **d)** Ei mikään kolmesta edeltävästä.

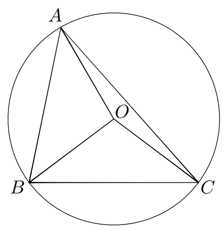
Ratkaisu. Luvut 27 ja 38 eivät ole yhteenlaskijan unelmia, koska ne saadaan yhteenlaskuina $19 + 8$ ja $19 + 19$, missä tarvitaan muistinumeroita. Sen sijaan luku 49 on yhteenlaskijan unelma. Nimittäin, kun sen kirjoittaa kahden pienemmän positiivisen kokonaisluvun summana, niiden viimeisten numeroiden summan viimeinen numero on 9, mikä on mahdollista vain jos niiden summa on pienempi kuin 10, eli muistinumeroa ei tarvita.

7. Huoneessa on lamppu, ja katkaisija, jota painamalla lamppu syttyy, jos se ei ole ennestään päällä, ja sammuu, jos se oli päällä. Joka toinen huoneessa kävijä painaa katkaisijaa kahdesti ja joka toinen kerran. Aluksi lamppu on pois päältä. Ensimmäinen huoneessa kävijä painaa katkaisijaa kahdesti. Kuinka monta kertaa lamppu on laitettu päälle, kun huoneessa on käynyt viisi henkilöä?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Ratkaisu. Jokainen huoneessa kävijä, joka painaa katkaisijaa kahdesti, laittaa sen kerran päälle ja sammuttaa sen kerran. Näitä henkilöitä on kolme. Jäljellä olevista kahdesta toinen on sammuttanut ja toinen sytyttänyt lampun. Lamppu on siis laitettu päälle neljä kertaa.

8. Seuraavassa kuviossa pisteet A, B ja C ovat ympyrän kehällä, ja O on saman ympyrän keskipiste.



Jos kulma $\widehat{BAO}$ on $30°$, ja kulma $\widehat{OAC}$ on $10°$, niin kuinka suuri on kulma $\widehat{BOC}$?

a) $70°$ **b)** $80°$ **c)** $90°$ **d)** $100°$ **e)** $110°$

Ratkaisu. Koska janat AO, BO ja CO ovat yhtä pitkät, ovat kolmiot $\triangle ABO$ ja $\triangle ACO$ tasakylkisiä. Siispä niiden kantakulmat ovat yhtä suuret, eli

$$\widehat{OBA} = \widehat{BAO} = 30° \quad \text{ja} \quad \widehat{ACO} = \widehat{OAC} = 10°.$$

Koska kolmion kulmien summa on aina $180°$, on

$$\widehat{AOB} = 180° - \widehat{BAO} - \widehat{OBA} = 180° - 30° - 30° = 120°,$$

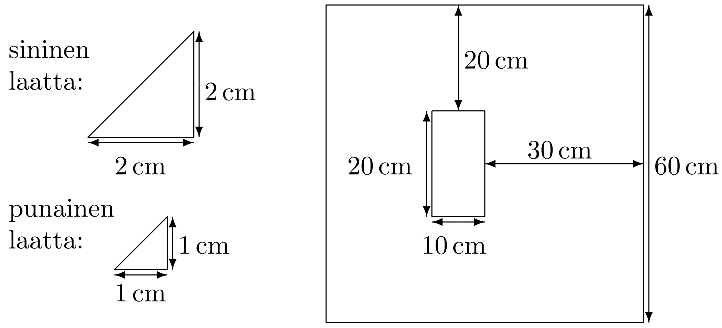
ja

$$\widehat{COA} = 180° - \widehat{OAC} - \widehat{ACO} = 180° - 10° - 10° = 160°.$$

Lopuksi, pisteestä O avautuvien kolmen kulman summa on tietenkin $360°$, ja on oltava

$$\widehat{BOC} = 360° - \widehat{AOB} - \widehat{COA} = 360° - 120° - 160° = 80°.$$

9. Neliön muotoisen, $60\,\text{cm} \times 60\,\text{cm}$-mosaiikin keskellä on sinisillä suorakulmaisilla kolmioilla päällystetty $10\,\text{cm} \times 20\,\text{cm}$ suorakaide (ks. kuva). Muuten mosaiikki on täytetty punaisilla suorakulmaisilla kolmioilla. Kuinka monta sinistä ja punaista kolmiota mosaiikissa on? Sinisen kolmion kateetit ovat 2 cm pitkiä, punaisen kolmion 1 cm.



a) Sinisiä 50 kpl ja punaisia 3400 kpl
b) Sinisiä 50 kpl ja punaisia 3600 kpl
c) Sinisiä 50 kpl ja punaisia 7200 kpl
d) Sinisiä 100 kpl ja punaisia 6800 kpl
e) Sinisiä 100 kpl ja punaisia 7200 kpl

Ratkaisu. Havaitaan, että kaksi sinistä kolmiota muodostavat $2\,\mathrm{cm}\times 2\,\mathrm{cm}$-neliön ja kaksi punaista kolmiota $1\,\mathrm{cm} \times 1\,\mathrm{cm}$-neliön. Sinisiä neliöitä menee mosaiikin suorakaiteeseen $5 \cdot 10 = 50$ kpl eli kolmioita yhteensä 100 kpl. Punaisten neliöiden täytyy täyttää jäljelle jäävä ala neliöstä, eli $3600 - 200 = 3400$ kpl $1\,\mathrm{cm} \times 1\,\mathrm{cm}$-neliöitä. Yhteensä punaisia kolmioita tarvitaan siis $3400 \cdot 2 = 6800$.

10. Mikä on luvun $2014 \cdot 2014 \cdot \ldots \cdot 2014$, missä luku 2014 esiintyy 2014 kertaa, viimeinen numero?

a) 0 **b)** 2 **c)** 4 **d)** 6 **e)** 9

Ratkaisu. Tulon viimeinen numero riippuu vain tulontekijöiden viimeisistä numeroista. Esimerkiksi tarkastellun tulon $2014 \cdot \ldots \cdot 2014$ viimeinen numero on sama kuin tulon $4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 4$, missä luku 4 esiintyy 2014 kertaa, viimeinen numero.

Havaitaan, että $4 \cdot 4 = 16$, missä viimeinen numero on 6. Lisäksi $4 \cdot 4 \cdot 4 = 16 \cdot 4$, ja tämän tulon viimeinen numero on sama kuin tulon $6 \cdot 4 = 24$, eli 4. Havaitaan, että täten 4 ja 6 vuorottelevat viimeisinä numeroina siten, että 4 on viimeinen numero, kun tulossa $4 \cdot \ldots \cdot 4$ on pariton määrä nelosia, ja 6, kun siinä on parillinen määrä nelosia. Koska tulossa $4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 4$, missä on 2014 nelosta, on parillinen määrä nelosia, kysytty viimeinen numero on 6.

11. Mikä seuraavista väittämistä ei ole tosi jokaisella reaaliluvulla x?

a) $x^2 + 1 \geqslant 2x$ **b)** $x^2 + 1 \geqslant -2x$ **c)** $4x^2 + 1 \geqslant 4x$
d) $x^2 + 2 \geqslant 2\sqrt{2}x$ **e)** $x^2 + 2 \geqslant 4x$

Ratkaisu. Jos väite pätee kaikilla reaaliluvuilla x, niin sen on pädettävä myös kun $x = 1$. Tässä erikoistapauksessa e)-kohta väittää, että

$$1^2 + 2 \geqslant 4 \cdot 1, \quad \text{eli, että} \quad 3 \geqslant 4,$$

mikä ei pidä paikkaansa. Jos tehtävänanto on hyvin asetettu, niin oikea vastaus voi siis olla vain e).

Todistetaan silti täydellisyyden vuoksi, että kohtien a)–d) väitteet pitävät aina paikkaansa. Koska kaikilla reaaliluvuilla x pätee $(x-1)^2 \geqslant 0$, on $x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$, eli $x^2 + 1 \geqslant 2x$. Samoin, koska $(x+1)^2 \geqslant 0$, on $x^2 + 2x + 1 \geqslant 0$, eli $x^2 + 1 \geqslant -2x$. Samassa hengessä aina pätee $(2x-1)^2 \geqslant 0$, mistä seuraa, että $4x^2 - 4x + 1 \geqslant 0$, eli $4x^2 + 1 \geqslant 4x$. Lopuksi, koska aina $(x - \sqrt{2})^2 \geqslant 0$, on $x^2 - 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2})^2 \geqslant 0$, eli $x^2 + 2 \geqslant 2\sqrt{2}x$.

12. Kuinka monta kappaletta listassa 1, 2, 3, ..., 999 on sellaisia kokonaislukuja, joissa esiintyy numero 7 ainakin yhden kerran?

a) 270 **b)** 271 **c)** 280 **d)** 300 **e)** 301

Ratkaisu. Ajatellaan yksinkertaisuuden vuoksi niin, että alle kolme numeroa sisältävät luvut alkavat nollilla niin, että kaikki luvut 0, 1, 2, ..., 999 ovat kolminumeroisia. Näitä lukuja on tasan tuhat kappaletta. Tällaisessa ”kolminumeroisessa” luvussa ei esiinny numeroa 7 täsmälleen silloin kun sen kaikki kolme numeroa ovat jotain muuta kuin seitsemäisiä. Siis jokaiselle numerolle on yhdeksän eri vaihtoehtoa, ja kaikkiaan numeron 7 sisältämättömiä lukuja on $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ kappaletta. Kaikki muut $1000 - 729 = 271$ lukua siis sisältävät numeron 7.

13. Kun seitsemäs luokka aloitti yläasteella, luokkatoverit vaihtuivat alakoulun vuosilta melkoisesti. Ensimmäisenä koulupäivänä huomattiin, että jokainen luokan pojista tunsi entuudestaan 4 luokan tytöistä. Edelleen jokainen tytöistä tunsi entuudestaan 3 luokan pojista. Laskettiin, että tyttöjä luokalla oli 12, mutta kello soi ennen kuin ehdittiin laskea poikien lukumäärä. Tässä ”tunteminen” on aina molemminpuolista, eli jos Ville tuntee Maijan, niin tällöin myös Maija tuntee Villen. Kuinka monta poikia oli?

a) 9 **b)** 10 **c)** 11 **d)** 12
e) Poikien lukumäärää ei pysty päättelemään annettujen tietojen perusteella.

Ratkaisu. Olkoon tyttöjen lukumäärä $t = 12$ ja tuntematon poikien lukumäärä p. Ajatellaan lisäksi, että paperille on lueteltu kaikki oppilaat, ja jos tyttöoppilas ja poikaoppilas tuntevat toisensa, niin heidän nimiensä välille vedetään viiva. Olkoon viivojen lukumäärä N. Nyt viivojen lukumäärä on toisaalta $3t$, koska jokainen tyttö tunsi kolme poikaoppilasta, ja toisaalta $4p$, koska jokainen poika tunsi neljä tyttöoppilasta. Siis

$$4p = N = 3t = 3 \cdot 12 = 36,$$

ja on oltava $p = \frac{36}{4} = 9$.