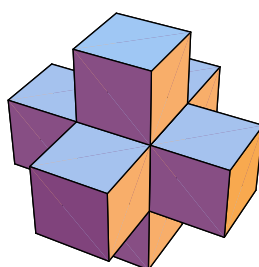


## Loppukilpailutehtävät 15.3.2014

1. Autiomaassa on 1000 kilometriä pitkä ympyräreitti, joka kulkee viiden kaupungin kautta. Myötäpäivään ajettaessa kaupungista  $A$  kaupunkiin  $B$  on matkaa 350 km, sieltä kaupunkiin  $C$  120 km, sieltä kaupunkiin  $D$  90 km,  $D$ :stä  $E$ :hen 180 km ja lopulta  $E$ :stä  $A$ :han ympyrän sulkeva 260 km:n tieosuus. Jokaisessa kaupungissa on avolavapaku, joka käyttää 10 litraa bensiiniä sadalla kilometrillä, mutta sen tankki on kuitenkin tyhjä. Jokaisessa kaupungissa on yksi bensakanisteri. Kaupungin  $A$  kanisterissa on 41 litraa, kaupungin  $B$  kanisterissa 8 litraa, kaupungin  $C$  kanisterissa 6 litraa,  $D$ :n 22 litraa ja  $E$ :n 23 litraa. Polttoainetta on siis yhteensä juuri tarvittavat 100 litraa. Sinut viedään helikopterilla valitsemaasi kaupunkiin, ja tehtäväsi on ajaa reitin läpi myötäpäivään palaten takaisin lähtökaupunkiin. Minkä lähtökaupungin valitset? Avolavapakun lavalle mahtuvat kaikki matkan varrella löytämäsi bensakanisterit talteen tulevaa käyttöä varten.
2. Oheisessa kuvassa on kappale, joka syntyy kun umpinaisen teräskuution (sivun pituus 1 metri) jokaiselle tahkolla hitsataan kiinni toinen samanlainen kuutio.



Kyseinen palikka työnnetään kuution muotoiseen, ylhäältä avoimeen altaaseen. Allaskuution sivun pituus on 3 metriä, joten tämä kappale mahtuu sinne juuri ja juuri altaan reunoja hipoen. Altaassa oli alun perin vettä 2 metrin syvyydeltä. Kuinka paljon veden pinta nousi, kun kappale oli kokonaan altaassa sen pohjaa metri  $\times$  metrin alalta koskettaen?

3. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut  $x$  ja  $y$ , joille

$$x^3 + y^2 = 100.$$

4. Onko mahdollista sijoittaa yhdeksän eri positiivista kokonaislukua lukua väliltä  $[1, 15]$   $3 \times 3$ -ruudukkoon siten, että ruudukon vaakarivien summat ovat myös väliltä  $[1, 15]$  eri positiivisia kokonaislukuja?
5. Kartanon isäntä on murhattu työhuoneessaan. Kartanon yläkerran pohjapiirros on ohessa. Siellä on siis 15 huonetta  $3 \times 5$ -ruudukon mukaisesti. Isännän työhuone on nurkassa, ja takkahuone keskellä. Isännän haamu ei tiedä, kuka murhaaja oli, mutta hän tietää, että murhaaja asuu jossakin yläkerran 13 muusta huoneesta (pois lukien takkahuone ja työhuone). Haamu haluaa siis käydä työhuoneesta lähtien kummitlemassa jokaisessa huoneista, yhden kerran kussakin, ja lopuksi poistua takkahuoneen savupiipun kautta. Haamu pystyy kulkemaan seinien läpi, mutta ei nurkkien läpi. Kuvassa on esitetty yksi mahdollinen haamun reitti. Huomaat, ettei tämä reitti kuitenkaan toteuta haamun vaatimuksia, sillä yksi huone jää tässä siltä vierailematta. Auta haamua löytämään sopiva reitti, tai perustelee, miksi sellaista reittiä ei ole olemassa, jolloin haamu on tuomittu kummitlemaan kartanossa ikuisesti.

