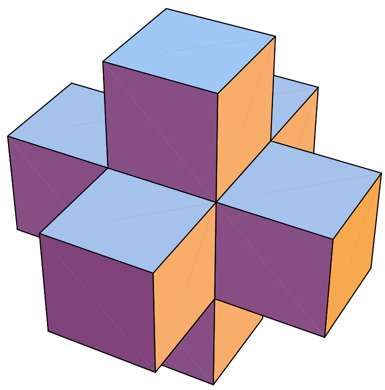
Loppukilpailu 15.3.2014
Ratkaisuja

1. Autiomaassa on 1000 kilometriä pitkä ympyräreitti, joka kulkee viiden kaupungin kautta. Myötäpäivään ajettaessa kaupungista A kaupunkiin B on matkaa 350 km, sieltä kaupunkiin C 120 km, sieltä kaupunkiin D 90 km, D:stä E:hen 180 km ja lopulta E:stä A:han ympyrän sulkeva 260 km:n tieosuus. Jokaisessa kaupungissa on avolavapaku, joka käyttää 10 litraa bensiiniä sadalla kilometrillä, mutta sen tankki on kuitenkin tyhjä. Jokaisesa kaupungissa on yksi bensakanisteri. Kaupungin A kanisterissa on 41 litraa, kaupungin B kanisterissa 8 litraa, kaupungin C kanisterissa 6 litraa, D:n 22 litraa ja E:n 23 litraa. Polttoainetta on siis yhteensä juuri tarvittavat 100 litraa. Sinut viedään helikopterilla valitsemaasi kaupunkiin, ja tehtäväsi on ajaa reitin läpi myötäpäivään palaten takaisin lähtökaupunkiin. Minkä lähtökaupungin valitset? Avolavapakun lavalle mahtuvat kaikki matkan varrella löytämäsi bensakanisterit talteen tulevaa käyttöä varten.

Ratkaisu. Tehtävä onnistuu aloittamalla kaupungista D. Siellä tankatusta 22 litrasta on kaupungissa E jäljellä $22-18=4$ litraa, ja mukaan otetun kanisterin kanssa siis yhteensä $4+23=27$ litraa. Kaupungissa A on tästä jäljellä $27-26=1$ litra, ja käytössä sen jälkeen $1+41=42$ litraa. Kaupungissa B on siitä jäljellä $42-35=7$ litraa, ja sen jälkeen $7+8=15$ litraa. Kaupunkiin C saavuttaessa jäljellä on $15-12=3$ litraa, ja viimeisen kanisterin kanssa yhteensä $3+6=9$ litraa, mikä kuluu kaikki palattaessa kaupunkiin D. Mikään muu aloituskaupunki ei tule kysymykseen. Aloitettaessa kaupungista B, C tai E ei bensa riitä edes seuraavaan kaupunkiin, ja aloitettaessa kaupungista A bensa loppuu 10 km ennen kaupunkia D.

2. Oheisessa kuvassa on kappale, joka syntyy kun umpinaisen teräskuution (sivun pituus 1 metri) jokaiselle tahkolle hitsataan kiinni toinen samanlainen kuutio.



Kyseinen palikka työnnetään kuution muotoiseen, ylhäältä avoimeen altaaseen. Allaskuution sivun pituus on 3 metriä, joten tämä kappale mahtuu sinne juuri ja juuri altaan reunoja hipoen. Altaassa oli alun perin vettä 2 metrin syvyydeltä.

Kuinka paljon veden pinta nousi, kun kappale oli kokonaan altaassa sen pohjaa metri $\times$ metrin alalta koskettaen?

Ratkaisu. Altaan pohjan ala on 9 neliömetriä. Jos siis lopputilanteessa kappaleemme veden alla olevan osan tilavuus on V, niin veden pinta nousee $x = V/9$ metriä. Koska vettä on aluksi 2 metrin syvyydeltä, kappaleemme 7 kuutiosta yksi pohjaa koskettava ja kaikki viisi toisessa kerroksessa olevaa joutuvat kokonaan veden alle. Koska kappaleen kokonaistilavuus on 7 kuutiometriä, niin vesi nousee alle metrin. Kappale ei siis jää kokonaan veden alle. Näin ollen ylimmästä kuutiosta veden alle jää vain vedenpinnan nousua vastaava osuus. Kaikkiaan siis veden alle jää kappaleesta $V = 6 + x$ kuutiometrin osuus. Saimme siis yhtälön

$$x = \frac{6+x}{9},$$

mistä ratkeaa $x = 3/4$. Veden pinta nousee siis 75 senttimetriä. Tarkistus: kappaleesta jää veden alle $6{,}75 = 9 * (3/4)$ kuutiometrin osuus.

3. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut x ja y, joille

$$x^3 + y^2 = 100.$$

Ratkaisu. Koska luvut x ja y ovat positiivisia kokonaislukuja, niin

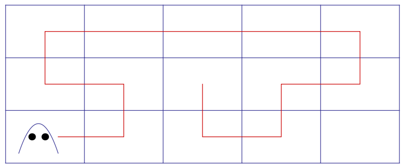
$$x^3 < x^3 + y^2 = 100.$$

Koska $64 = 4^3 < 100 < 125 = 5^3$, niin $x \leq 4$. Toisaalta $x \geq 1$. Jos $x = 4$, niin $y^2 = 100 - 4^3 = 36 = 6^2$, joten $y = 6$. Jos $x = 3$, niin $y^2 = 100 - 3^3 = 73$, joka ei ole neliö. Ei siis ratkaisua tällöin. Jos $x = 2$, niin $y^2 = 100 - 2^3 = 92$, joka myöskään ei ole neliö, eli ei nytkään ratkaisua. Jos $x = 1$, niin $y^2 = 100 - 1^3 = 99$, joka sekään ei kelpaa. Ainoa ratkaisu on siis $(x, y) = (4, 6)$.

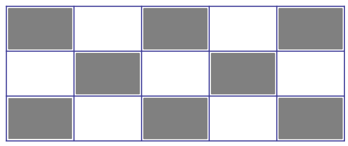
4. Onko mahdollista sijoittaa yhdeksän eri positiivista kokonaislukua lukua väliltä $[1, 15]$ 3×3-ruudukkoon siten, että ruudukon vaakarivien summat ovat myös väliltä $[1, 15]$ eri positiivisia kokonaislukuja?

Ratkaisu. Kun lasketaan kaikkien vaakarivien summat yhteen, tuloksen olisi oltava sama kuin kaikkien ruudukossa olevien lukujen summa. Lasketaan ensin, mikä on kaikkien ruudukossa olevien lukujen summa minimissä (eli valitaan luvut 1, 2, ..., 9). Merkitään kirjaimella r ruudukossa olevien lukujen minimisummaa, $r = 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$. Olkoon v vaakarivien summien summan maksimiarvo (valitaan 13, 14 ja 15), $v = 13 + 14 + 15 = 42$. Koska $r > v$, lukuja ei voida asettaa ruudukkoon annetulla tavalla.

5. Kartanon isäntä on murhattu työhuoneessaan. Kartanon yläkerran pohjapiirros on ohessa. Siellä on siis 15 huonetta 3×5-ruudukon mukaisesti. Isännän työhuone on nurkassa, ja takkahuone keskellä. Isännän haamu ei tiedä, kuka murhaaja oli, mutta hän tietää, että murhaaja asuu jossakin yläkerran 13 muusta huoneesta (pois lukien takkahuone ja työhuone). Haamu haluaa siis käydä työhuoneesta lähtien kummittelemassa jokaisessa huoneista, yhden kerran kussakin, ja lopuksi poistua takkahuoneen savupiipun kautta. Haamu pystyy kulkemaan seinien läpi, mutta ei nurkkien läpi. Kuvassa on esitetty yksi mahdollinen haamun reitti. Huomaat, ettei tämä reitti kuitenkaan toteuta haamun vaatimuksia, sillä yksi huone jää tässä siltä vierailematta. Auta haamua löytämään sopiva reitti, tai perustele, miksi sellaista reittiä ei ole olemassa, jolloin haamu on tuomittu kummittelemaan kartanossa ikuisesti.



Ratkaisu. Kuvitellaan kartanon huoneet väritetyiksi mustiksi ja valkoisiksi kuten shakkilaudan ruudut oheisen kuvan mukaisesti.



Siirtyessään huoneesta toiseen haamu siirtyy aina eriväriseen huoneeseen: mustasta valkoiseen tai valkoisesta mustaan. Isännän työhuone on väriltään musta, joten vaihdettuaan huoneesta toiseen 14 kertaa haamu on jälleen mustassa huoneessa. Koska takkahuone on valkoinen, ei haamu voi tällöin olla takkahuoneessa. Vaadittua reittiä ei siis ole olemassa.