Loppukilpailu 9.4.2015
Ratkaisuita

1. Olkoon $\lfloor x \rfloor$ suurin kokonaisluku, joka on korkeintaan yhtä suuri kuin luku x. Esimerkiksi siis $\lfloor 2{,}5 \rfloor = 2$. Mitä on

$$\left\lfloor \frac{1}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{10} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{29}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{30}{10} \right\rfloor ?$$

Ratkaisu. Huomataan, että

$$\left\lfloor \frac{1}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2}{10} \right\rfloor = \cdots = \left\lfloor \frac{9}{10} \right\rfloor = 0,$$

ja tällaisia lukuja on yhdeksän. Lisäksi

$$\left\lfloor \frac{10}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{11}{10} \right\rfloor = \cdots = \left\lfloor \frac{19}{10} \right\rfloor = 1$$

ja tällaisia lukuja on kymmenen. Lopulta vielä huomataan, että

$$\left\lfloor \frac{20}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{21}{10} \right\rfloor = \cdots = \left\lfloor \frac{29}{10} \right\rfloor = 2.$$

ja tällaisia lukuja on myös kymmenen. Lopuksi, $\lfloor 30/10 \rfloor = 3$. Yhteensä siis

$$\left\lfloor \frac{1}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{10} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{29}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{30}{10} \right\rfloor = 0 \cdot 9 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 3 = 33.$$

2. Digitaalikello näyttää kellonaikaa tunneissa ja minuuteissa neljällä numerolla, siis välillä 00:00–23:59. Kellonaika on palindrominen, jos sen numerot ovat samat sekä etu- että takaperin kirjoitettuina. Montako palindromikellonaikaa on vuorokaudessa? (Ei siis ole tarkoitus välittää digikellon numeroiden "muodosta": eli esim. 15:51 on palindromiaika, mutta 12:51 ei ole.)

Ratkaisu. Tarkastelemme siis kellonaikoja muotoa $ab{:}ba$, missä a ja b ovat numeroita. Jotta ab olisi sallittu tuntimäärä, on sen oltava väliltä 00–23. Toisaalta, jotta ba olisi sallittu minuuttimäärä, on sen oltava väliltä 00–59, mikä tarkoittaa samaa kuin että on oltava $b \leqslant 5$. Mutta nyt voimme todeta, että ennen aamukymmentä vastaavia vaihtoehtoja ovat 00–05, aamukymmenen ja iltakahdeksan välistä löytyy vaihtoehdot 10–15, ja iltakahdeksan jälkeen käyvät 20–23. Palindromisia kellonaikoja on siis $6+6+4 = 16$ erilaista, ja ne ovat 00:00, 01:10, 02:20, 03:30, 04:40, 05:50, 10:01, 11:11, 12:21, 13:31, 14:41, 15:51, 20:02, 21:12, 22:22 ja 23:32.

3. Nauhaan pujotetaan jossakin järjestyksessä kaksi punaista ja kymmenen vihreää helmeä. Sitten nauhan päät solmitaan yhteen niin huomaamattoman pienellä solmulla, että solmun olemassaolon voi unohtaa. Montako erilaista helminauhaa on mahdollista saada?

Ratkaisu. Pienen miettimisen jälkeen toteaa, että ainoastaan kahden punaisen helmen etäisyys erottaa eri mahdolliset helminauhat toisistaan. Punaiset helmet voivat olla vierekkäin, niiden välissä voi olla yksi vihreä helmi, tai niiden välissä voi olla kaksi vihreää helmeä, ja niin edelleen, aina viiteen vihreään helmeen saakka. Jos kahden punaisen helmen välissä on enemmän kuin viisi vihreää helmeä, niin toisella puolella nauhaa punaisten helmien välissä on vähemmän kuin viisi vihreää helmeä (koska vihreitä helmiä oli vain kymmenen). Siis erilaisia lopputuloksia on kuusi erilaista.

4. Mikä on lukujen 1^{60}, 2^{50}, 3^{40}, 4^{30}, 5^{20} ja 6^{10} keskinäinen suuruusjärjestys? [Tässä a^n tarkoittaa, että n kappaletta lukua a kerrotaan keskenään, esim. $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ ja $6^{10} = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$.]

Ratkaisu. Osoitamme, että lukujen keskinäinen suuruusjärjestys on

$$1^{60} < 6^{10} < 5^{20} < 2^{50} < 4^{30} < 3^{40}.$$

Todetaan aluksi, että luku $1^{60} = 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1$ on pienin, koska muut luvut ovat varmasti isompia kuin 1.

Todetaan seuraavaksi, että $6^{10} < 5^{20}$, onhan nimittäin

$$\begin{aligned}5^{20} &= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \\ &= 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 = 25^{10} \\ &> 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^{10}.\end{aligned}$$

Täysin samassa hengessä voimme todeta, että

$$2^{50} = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)^{10} = 32^{10} > 25^{10} = (5 \cdot 5)^{10} = 5^{20},$$

että

$$4^{30} = (4 \cdot 4 \cdot 4)^{10} = 64^{10} > 32^{10} = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)^{10} = 2^{50},$$

ja että

$$3^{40} = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)^{10} = 81^{10} > 64^{10} = (4 \cdot 4 \cdot 4)^{10} = 4^{30}.$$

5. Onko mahdollista muodostaa sellainen kuusikulmio, jonka kaikki kulmat ovat 120°, ja jonka sivujen pituudet ovat 1, 2, 3, 4, 5 ja 6 jossain järjestyksessä?

Ratkaisu. On mahdollista. Sellaisen voi rakentaa vaikkapa tasasivuisia kolmioita käyttämällä: