Oulun seudun 7-luokkalaisten matematiikkakilpailun finaali 11.4.2015

Ratkaisuja

1. Laske $1 + 11 + 111 + 1111 + \cdots + 1111111111$.

Ratkaisu. Tehtävän voi laskea allekkain. Toinen tapa on laskea ensin

$$11 + 111 + \cdots + 1111111111 = 1234567899.$$

Lopuksi lasketaan

$$1 + 1234567899 = 1234567900.$$

2. Digitaalikello näyttää kellonaikaa tunneissa, minuuteissa ja sekunneissa kuudella numerolla, siis välillä 00:00:00–23:59:59. Kellonaika on *palindrominen*, jos sen numerot ovat samat sekä etu- että takaperin kirjoitettuina. Montako palindromista kellonaikaa on vuorokaudessa? (Ei siis ole tarkoitus välittää digitaalikellon numeroiden ”muodosta” eli esim. 15:33:51 on palindrominen, kun taas 12:33:51 ei ole.)

Ratkaisu. Tarkastelemme siis kellonaikoja muotoa $ab : cc : ba$, missä a, b ja c ovat numeroita. Jotta ab olisi sallittu tuntimäärä, on sen oltava väliltä 00–23. Toisaalta, jotta ba olisi sallittu sekuntimäärä, on sen oltava väliltä 00–59, mikä tarkoittaa samaa kuin että $b \leq 5$. Mutta nyt voimme todeta, että vastaavia vaihtoehtoja tunneille ovat siis 00–05, 10–15 ja 20–23. Tunneille ja sekunneille on siis $6 + 6 + 4 = 16$ eri vaihtoehtoa. Minuuteille vaihtoehdot ovat 00, 11, 22, 33, 44, ja 55, siis 6 vaihtoehtoa. Palindromisia kellonaikoja on vuorokaudessa siis $16 \cdot 6 = 96$ kappaletta.

3. Olkoon $\lfloor x \rfloor$ suurin kokonaisluku, joka on korkeintaan yhtä suuri kuin luku x. Esimerkiksi siis $\lfloor 2{,}99 \rfloor = 2$ ja $\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$. Mitä on

$$\left\lfloor \frac{1}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{10} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{29}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{30}{10} \right\rfloor?$$

Ratkaisu. Merkintä $\lfloor x \rfloor$ (nimeltään lattiafunktio) tarkoittaa käytännössä luvun x pyöristämistä alaspäin seuraavaan kokonaislukuun. Huomataan, että

$$\left\lfloor \frac{1}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2}{10} \right\rfloor = \cdots = \left\lfloor \frac{9}{10} \right\rfloor = 0 \text{ (9kpl)},$$

$$\left\lfloor \frac{10}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{11}{10} \right\rfloor = \cdots = \left\lfloor \frac{19}{10} \right\rfloor = 1 \text{ (10kpl)},$$

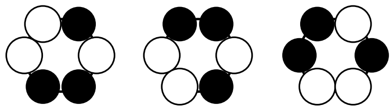
ja

$$\left\lfloor \frac{20}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{21}{10} \right\rfloor = \cdots = \left\lfloor \frac{29}{10} \right\rfloor = 2 \text{ (10kpl)}.$$

Lopuksi, $\lfloor \frac{30}{10} \rfloor = 3$. Yhteensä siis

$$\left\lfloor \frac{1}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{10} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{29}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{30}{10} \right\rfloor = 9 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 3 = 33.$$

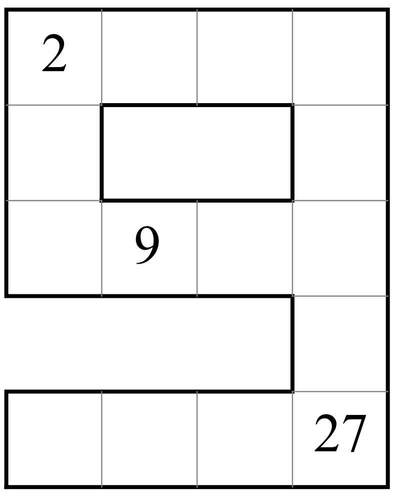
4. Liisalla on käytössään paljon mustia ja valkoisia helmiä. Hän tekee niistä lahjakoruja ystävilleen pujottamalla 6 helmeä nauhaan. Lopuksi nauhan päät sidotaan yhteen huomaamattoman pienellä solmulla. Jälkeenpäin siis helminauhan solmun paikka ei erotu, joten esimerkiksi alla olevat kolme kuvaa esittävät samaa helminauhaa. Kuinka monta erilaista korua Liisa voi tehdä?



Ratkaisu. Helpointa on piirtää erilaiset vaihtoehdot näkyviin. Kokonaan mustia helminauhoja on yksi, MMMMMM. Kun valkoisia helmiä on yksi, voidaan tehdä yksi nauha, VMMMMM. Kahdella valkoisella voidaan tehdä seuraavat nauhat, VVMMMM, VMVMMM ja VMMVMM. Kuuden, viiden ja neljän valkoisen helmen tapaukset saa vaihtamalla valkoiset ja mustat päittäin nollan, yhden ja kahden valkoisen helmen tapauksista, joten niitäkin on yhteensä 5. Kun valkoisia helmiä on kolme, saadaan nauhat VVVMMM, VMVVMM ja VMVMVM. Yhteensä erilaisia helminauhoja on siis 13.

5. Lukujonoa sanotaan *aritmeettiseksi*, jos siinä peräkkäisten lukujen välinen erotus on vakio. Esimerkiksi $3, 5, 7, 9, 11$ on aritmeettinen jono, koska siinä seuraava luku saadaan aina edellisestä lisäämällä siihen kaksi. Täytä oheinen ”ristisanatehtävä” kirjoittamalla jokaiseen tyhjään ruutuun kokonaisluku väliltä 1–30. Samaan lukua ei saa käyttää kahdesti. Jokaisen ”sanan” lukujen on muodostettava aritmeettinen jono. Muutama luku on annettu valmiiksi. Oikeita ratkaisuja voi olla useita.

Kuva paperin kääntöpuolella.



Ratkaisu. Mietitään, mikä luku tulee oikeaan yläkulmaan. Koska kyseinen luku on luvusta 2 alkavan 4-kirjaimisen sanan viimeinen, se eroaa luvusta 2 kolmella jaollisella määrällä. Vaihtoehtoja sillä on näin ollen $5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26$ tai 29. Toisaalta kyseinen luku on ensimmäinen kirjain sellaisessa 5-kirjaimisessa sanassa, joka päättyy lukuun 27. Näin ollen se eroaa luvusta 27 neljällä jaollisen määrän. Täten se on $3, 7, 11, 15, 19$ tai 23. Ottamalla nämä molemmat rajoitukset huomioon, näemme, että kyseisessä ruudussa on oltava joko 11 tai 23.

Jos oikea vastaus olisi 23, olisi oikean reunan pystysuora sana $23, 24, 25, 26, 27$. Tällöin keskimmäisen rivin vaakasuoran sanan olisi pakko olla $1, 9, 17, 25$. Mutta tällöin emme kykene täyttämään vasemmanpuoleista pystysuoraa sanaa. Oikeaan yläkulmaan on siis pakko sijoittaa luku 11. Tällöin yläriviin tulee aritmeettinen jono $2, 5, 8, 11$, oikeaan sarakkeeseen jono $11, 15, 19, 23, 27$, keskimmäiseen vaakariviin jono $4, 9, 14, 19$, ja vasempaan sarakkeeseen $2, 3, 4$. Alarivi voidaan täyttää viidellä tavalla sääntöjä rikkomatta. Riville voi sijoittaa jonon $6, 13, 20, 27,\ \ 12, 17, 22, 27,\ \ 18, 21, 24, 27,\ \ 24, 25, 26, 27$ tai $30, 29, 28, 27$.

Koska kukaan oppilaista ei ollut perustellut vastausta, annoimme täydet 6 pistettä niille, jotka olivat löytäneet kaikki viisi ratkaisua. Jos oikeita ratkaisuja oli yksi, sai viisi pistettä.