Turun seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailu 9.-13.2.2015 Ratkaisuita

1. Laske $522 - 278$.

a) 233 **b)** 234 **c)** 235 **d)** 238 **e)** 244

Ratkaisu. $522 - 278 = 244$.

2. Laske $27 \cdot 66$.

a) 1583 **b)** 1582 **c)** 1682 **d)** 1782 **e)** 1882

Ratkaisu. $27 \cdot 66 = 1782$.

3. Jos $S = 4 \cdot 10000 + 1 \cdot 1000 + 6 \cdot 10 + 3 \cdot 1$, niin $S =$

a) 4163 **b)** 41063 **c)** 41631 **d)** 41603 **e)** 40163

Ratkaisu. Luku on 41063.

4. Mikä seuraavista murtoluvuista on suurin?

a) $\frac{5}{8}$ **b)** $\frac{14}{17}$ **c)** $\frac{97}{100}$ **d)** $\frac{52}{55}$ **e)** $\frac{12}{15}$

Ratkaisu. Annetuista luvuista suurin on $\frac{97}{100}$, sillä

$$\frac{5}{8} = 1 - \frac{3}{8}, \quad \frac{14}{17} = 1 - \frac{3}{17}, \quad \frac{97}{100} = 1 - \frac{3}{100}, \quad \frac{52}{55} = 1 - \frac{3}{55}, \quad \text{ja} \quad \frac{12}{15} = 1 - \frac{3}{15},$$

eli kaikki luvut ovat muotoa $1 - \frac{3}{r}$ jollakin positiivisella r. Luku $\frac{3}{r}$ on sitä pienempi mitä suurempi r on, ja mitä pienempi $\frac{3}{r}$ on, sitä suurempi on $1 - \frac{3}{r}$.

5. Kello 11:30 juna oli Tuusulassa, joka on 30 kilometrin päässä Pasilasta. Junan nopeus on 120 km/h ajon aikana, ja pysähdyksiin Tuusulan ja Pasilan välissä menee 5 minuuttia. Milloin juna on Pasilassa?

a) 11:40 **b)** 11:50 **c)** 12:00 **d)** 12:10 **e)** 12:20

Ratkaisu. 30 kilometrin ajamiseen menee 15 minuuttia. Pysähdyksiin menee 5 minuuttia, eli yhteensä menee 20 minuuttia. Juna on siis perillä Pasilassa klo. 11:50.

6. Koeastiassa on kasvava bakteeripopulaatio. Populaation koko kaksinkertaistuu joka toinen minuutti. Kello 12:00 astia on täynnä. Milloin astia oli puolillaan bakteereja?

a) klo. 11:58 **b)** klo. 11:56 **c)** klo. 11:30 **d)** klo. 6:00
e) Tehtävä ei ole ratkaistavissa annetuilla tiedoilla.

Ratkaisu. Koska bakteeripopulaatio kaksinkertaistuu joka toinen minuutti, ja klo. 12:00 astia on täynnä, oli astia puolillaan klo. 11:58.

7. Heitetään tavallista kuusisivuista noppaa. Mikä on todennäköisyys sille, että saadaan parillinen luku joka on suurempi kuin kolme?

a) $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{2}{5}$ **d)** $\frac{1}{2}$ **e)** $\frac{2}{3}$

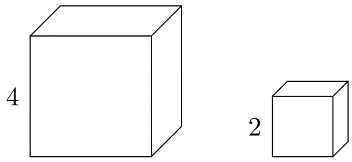
Ratkaisu. Kolmea suuremmat parilliset silmäluvut ovat 4 ja 6. Kaikkiaan silmälukuja on 6 kappaletta. Kysytty todennäköisyys on siis $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

8. Jos $P = 1$ ja $Q = 2$, niin mikä seuraavista **ei** ole kokonaisluku?

a) $P + Q$ **b)** $\frac{P}{Q}$ **c)** $\frac{Q}{P}$ **d)** PQ **e)** P^Q

Ratkaisu. Kahden positiivisen kokonaisluvun summa, tulo ja potenssi ovat kokonaislukuja. Siten vaihtoehdoista ainoastaan $\frac{P}{Q}$ ja $\frac{Q}{P}$ voivat olla olematta kokonaislukuja. Mutta $\frac{P}{Q} = \frac{1}{2}$ ja $\frac{Q}{P} = 2$.

9. Iso $4 \times 4 \times 4$-kuutio pilkotaan kahdeksaksi $2 \times 2 \times 2$-pikkukuutioksi. Mikä on pikkukuutioiden alojen summa?



a) 191 **b)** 192 **c)** 200 **d)** 204 **e)** 208

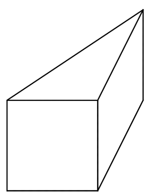
Ratkaisu. Pikkukuutiot ovat $2 \times 2 \times 2$-kuutioita. Jokaisen pikkukuution jokainen tahko on 2×2-neliö, jonka ala on $2 \cdot 2 = 4$. Yhdessä pikkukuutiossa on kuusi tahkoa, eli yhden pikkukuution ala on $6 \cdot 4 = 24$. Lopuksi, koska pikkukuutioita on kahdeksan, on niiden alojen summa $8 \cdot 24 = 192$.

10. Aluksi Juhani kirjoittaa paperille luvun 2014. Hän pelaa peliä, jossa joka kierroksella luku korvataan toisella seuraavien sääntöjen mukaan. Jos luku on parillinen, uusi luku saadaan jakamalla edellinen kahdella. Jos taas luku on pariton, uusi luku saadaan kertomalla edellinen kolmella ja lisäämällä tulokseen yksi. Mikä luku Juhanilla on paperilla 5 kierroksen jälkeen?

a) $(3 \cdot 1024 + 1)^5 = 274039269576686593$
b) $2^5 = 32$ **c)** 2551 **d)** 10204 **e)** 2267

Ratkaisu. Hän kirjoittaa paperille luvut 2014, 1007, 3022, 1511, 4534, 2267.

11. Seuraavassa kuviossa on kolmio, neliö ja suunnikas. Mikä on koko kuvion piiri (eli ympärysmitta), jos tiedetään, että kolmion piiri on 9, neliön piiri 8 ja suunnikkaan piiri 10?



a) 11 **b)** 12 **c)** 13 **d)** 14 **e)** 15

Ratkaisu. Koska neliön piiri on 8, on sen jokaisen sivun pituuden oltava neljäsosa tästä, eli 2. Nyt suunnikkaan lyhyiden sivujen pituuksien summa on $2 + 2 = 4$, eli sen pitkien sivujen pituuksien summan on oltava $10-4 = 6$. Suunnikkaan kummankin pitkän sivun pituus on siis 3. Nyt kolmiosta vain yhden sivun pituus on vielä tuntematon; sen täytyy olla $9 - 2 - 3 = 4$. Koko kuvion piiriksi saadaan

$$2 + 2 + 3 + 2 + 4 = 13.$$

12. Montako sellaista kaksinumeroista lukua on olemassa, joissa kymmeniä merkitsevä numero on suurempi kuin yksiköitä merkitsevä?

a) 10 **b)** 30 **c)** 45 **d)** 50 **e)** 55

Ratkaisu. Halutunlaisia numerolla 1 alkavia lukuja on vain yksi, nimittäin luku 10. Halutunlaisia numerolla 2 alkavia lukuja on täsmälleen kaksi, nimittäin 20 ja 21. Samoin numerolla 3 alkavia lukuja on kolme kappaletta, numerolla 4 alkavia neljä kappaletta, ..., ja lopuksi numerolla 9 alkavia lukuja yhdeksän kappaletta. Yhteensä halutunlaisia lukuja on siis

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45 \text{ kappaletta.}$$

13. Suorakaiteen muotoisen aitauksen pitkä sivu on kolme kertaa lyhyen sivun mittainen. Aitauksen pinta-ala on $75\,\mathrm{m}^2$. Laske sen piiri (aitojen yhteenlaskettu pituus).

a) $32\,\mathrm{m}$ **b)** $40\,\mathrm{m}$ **c)** $42\,\mathrm{m}$ **d)** $45\,\mathrm{m}$ **e)** $50\,\mathrm{m}$

Ratkaisu. Olkoon suorakaiteen lyhyt sivu x metriä pitkä, jolloin sen pitkä sivu on siis $3x$ metriä pitkä. Suorakaiteen ala on nyt $75\,\mathrm{m}^2 = x \cdot 3x = 3x^2$, jolloin $x^2 = 25\,\mathrm{m}^2$, ja on oltava $x = 5\,\mathrm{m}$. Suorakaiteen piiri on siis

$$x + 3x + x + 3x = 8x = 8 \cdot 5\,\mathrm{m} = 40\,\mathrm{m}.$$

14. Kaisa täytti 14 vuotta. Juhlan kunniaksi hän halusi laskea kuinka monta sellaista enintään nelinumeroista kokonaislukua on, joissa numerot 1 ja 4 esiintyvät peräkkäin tässä järjestyksessä. Mikä on oikea vastaus hänen kysymykseensä?

a) 100 **b)** 199 **c)** 200 **d)** 299 **e)** jokin muu lukumäärä

Ratkaisu. Jos luku on yksi-, kaksi- tai kolminumeroinen, niin voimme vapaasti kirjoittaa sen eteen riittävän monta nollaa niin, että sitä voi ajatella nelinumeroisena lukuna; tämä selventää asioita hieman.

Niitä enintään nelinumeroisia lukuja, jotka alkavat 14, on 100 kappaletta, koska viimeiset kaksi numeroa voivat olla mitä tahansa. Niitä lukuja, joiden keskellä esiintyy 14, on samoin 100 kappaletta, koska ensimmäinen ja viimeinen numero voivat jälleen olla mitä tahansa. Samassa hengessä niitä enintään nelinumeroisia lukuja, jotka päättyvät 14, on myös 100 kappaletta. Lopuksi, kun lasketaan $100 + 100 + 100 = 300$, olemme melkein valmiita, paitsi, että luku 1414 on laskettu kahdesti, joten haluttu vastaus on $300 - 1 = 299$.

15. Kuinka monta sellaista kokonaislukua välillä $1, 2, \ldots, 999$ on, jotka ovat jaollisia toisella luvuista 7 ja 11, mutta eivät molemmilla?

a) 90 **b)** 142 **c)** 220 **d)** 232 **e)** jokin muu lukumäärä

Ratkaisu. Seitsemällä jaollisia lukuja ovat $7, 14, 21, \ldots, 994$; näitä on $994/7 = 142$ kappaletta. Yhdellätoista jaollisia lukuja ovat $11, 22, 33, \ldots, 990$; näitä on $990/11 = 90$ kappaletta. Sekä seitsemällä että yhdellätoista jaollisia lukuja ovat $77, 154, \ldots, 924$; näitä on $924/77 = 12$ kappaletta.

Kun lasketaan yhteen $142 + 90 = 232$, on sekä seitsemällä että yhdellätoista jaolliset luvut laskettu mukaan kahdesti. Halutunlaisia lukuja on siis $232 - 2 \cdot 12 = 232 - 24 = 208$ kappaletta.